

Jaouad Madkour

**SÉRIES TEMPORELLES**  
**EXERCICES et EXAMENS**

*Avec solutions*

Édition 2023



Le polycopié "1000 QCM DE STATISTIQUE DESCRIPTIVE" est composé de deux parties :

- La première partie contient une série de 1000 QCM de statistique descriptive
- La deuxième partie....

# Table des matières

I Exercices corrigés	4
II Examens corrigés	57
III Annexe	122

**Première partie**  
**Exercices corrigés**

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

### EXERCICES CORRIGÉS

Tout au long de ces exercices, l'espérance mathématique du processus  $y_t$  sera notée  $\mu$ , sa variance  $\sigma^2$  et sa fonction d'autocovariance  $\gamma_k$ . La variance du terme d'erreur  $\varepsilon_t$  sera notée  $\sigma_\varepsilon^2$  (son espérance mathématique est par définition nulle).

#### Ex. 1 — Stationnarité des processus

Les processus suivants sont-ils stationnaires ?

1.  $y_t = 1 + 1.5y_{t-1} - 2y_{t-2} + 0.5y_{t-3} + \varepsilon_t$
2.  $y_t = 1 - 0.6y_{t-1} + 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t$
3.  $y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$
4.  $y_t = 3 - 0.7y_{t-1} + 0.4y_{t-2} - 0.7\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
5.  $y_t = -0.8y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} - 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
6.  $y_t = -1 + 2y_{t-1} - 1.25y_{t-2} + 0.25y_{t-3} + 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
7.  $y_t = 0.4 + 1.2y_{t-1} - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
8.  $y_t = 1.15y_{t-1} - 0.425y_{t-2} + 0.05y_{t-3} - 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
9.  $y_t = 0.5 - 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
10.  $y_t = 2.25y_{t-1} - 0.75y_{t-2} + 0.0625y_{t-3} + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2} + 0.1\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

#### Solution (Ex. 1) —

Afin de savoir si les processus en question sont stationnaires ou non, il convient de résoudre l'équation caractéristique associée au polynôme retard de leur partie autorégressive et de comparer ses racines à un. Un processus est stationnaire si toutes les racines sont strictement supérieures à un en module<sup>1</sup> et non-stationnaire si au moins une racine viole cette condition. Dans le cas d'un processus moyenne mobile, aucune condition de stationnarité n'est à vérifier étant donné que ce type de processus est toujours stationnaire.

1.  $y_t = 1 + 1.5y_{t-1} - 2y_{t-2} + 0.5y_{t-3} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(3). Exprimons-le à l'aide d'un polynôme retard comme suit :

$$y_t = 1 + 1.5Ly_t - 2L^2y_t + 0.5L^3y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 1.5Ly_t + 2L^2y_t - 0.5L^3y_t = 1 + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 1.5L + 2L^2 - 0.5L^3) = 1 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = 1 + \varepsilon_t$$

1. Le « module » d'un nombre complexe est simplement la généralisation de la « valeur absolue » dans le cas des nombres réels. Le module d'un nombre complexe  $z = a + ib$ , noté  $|z|$ , est donné par  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$  avec  $\bar{z} = a - ib$  le conjugué de  $z$ .

avec  $\alpha(L) = 1 - 1.5L + 2L^2 - 0.5L^3$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme s'écrit :

$$1 - 1.5z + 2z^2 - 0.5z^3 = 0$$

ou encore :

$$z^3 - 4z^2 + 3z - 2 = 0$$

Cette équation admet deux racines complexes ( $z_1 \approx 0.3652 - 0.6916i$  et  $z_2 \approx 0.3652 + 0.6916i$ ) de module ( $|z_1| = |z_2| = \sqrt{z_1 z_2} \approx 0.7553$ ) inférieur à un et une racine réelle ( $z_3 = 3.2695$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus n'est pas stationnaire.

2.  $y_t = 1 - 0.6y_{t-1} + 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(2)<sup>2</sup>. Exprimons-le à l'aide d'un polynôme retard comme suit :

$$y_t = 1 - 0.6Ly_t + 0.5L^2y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t + 0.6Ly_t - 0.5L^2y_t = 1 + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 + 0.6L - 0.5L^2) = 1 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = 1 + \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.6L - 0.5L^2$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 + 0.6z - 0.5z^2 = 0$$

ou encore :

$$5z^2 - 6z - 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -0.9362$  et  $z_2 \approx 2.1362$ ) dont une inférieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus n'est pas stationnaire.

3.  $y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un modèle MA(3), il est stationnaire sans aucune condition.

4.  $y_t = 3 - 0.7y_{t-1} + 0.4y_{t-2} - 0.7\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;1). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$y_t = 3 - 0.7Ly_t + 0.4L^2y_t - 0.7L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t + 0.7Ly_t - 0.4L^2y_t = 3 - 0.7L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 + 0.7L - 0.4L^2) = 3 + \varepsilon_t(1 - 0.7L)$$

$$\alpha(L)y_t = 3 + \beta(L)\varepsilon_t$$

---

2. Les conditions de stationnarité d'un processus autorégressif d'ordre 2 ( $y_t = \alpha_0 + \alpha_1y_{t-1} + \alpha_2y_{t-2} + \varepsilon_t$ ) sont : a)  $\alpha_2 + \alpha_1 < 1$ , b)  $\alpha_2 - \alpha_1 < 1$  et c)  $-1 < \alpha_2 < 1$  (Voir, par exemple, RACHEV et al. (2007), « *Financial econometrics : from basics to advanced modeling techniques* », page 217).

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.7L - 0.4L^2$  et  $\beta(L) = 1 - 0.7L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 + 0.7z - 0.4z^2 = 0$$

ou encore :

$$4z^2 - 7z - 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -0.9321$  et  $z_2 \approx 2.6821$ ) dont une inférieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est non stationnaire.

5.  $y_t = -0.8y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} - 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;2). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$\begin{aligned} y_t &= -0.8Ly_t + 0.3L^2y_t + 0.3L\varepsilon_t - 0.1L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\ y_t + 0.8Ly_t - 0.3L^2y_t &= 0.3L\varepsilon_t - 0.1L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\ y_t(1 + 0.8L - 0.3L^2) &= \varepsilon_t(1 + 0.3L - 0.1L^2) \\ \alpha(L)y_t &= \beta(L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.8L - 0.3L^2$  et  $\beta(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 + 0.8z - 0.3z^2 = 0$$

ou encore :

$$3z^2 - 8z - 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -0.9274$  et  $z_2 \approx 3.5941$ ) dont une inférieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus n'est pas stationnaire.

6.  $y_t = -1 + 2y_{t-1} - 1.25y_{t-2} + 0.25y_{t-3} + 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(3;1). Son écriture polynomiale est la suivante :

$$\begin{aligned} y_t &= -1 + 2Ly_t - 1.25L^2y_t + 0.25L^3y_t + 0.5L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\ y_t - 2Ly_t + 1.25L^2y_t - 0.25L^3y_t &= -1 + 0.5L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\ y_t(1 - 2L + 1.25L^2 - 0.25L^3) &= -1 + \varepsilon_t(1 + 0.5L) \\ \alpha(L)y_t &= -1 + \beta(L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 2L + 1.25L^2 - 0.25L^3$  et  $\beta(L) = 1 + 0.5L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 2z + 1.25z^2 - 0.25z^3 = 0$$

ou encore :

$$z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0$$

Cette équation admet des racines réelles ( $z_1 = 1$  et  $z_2 = z_3 = 2$ ) dont une unitaire. On conclut que ce processus est non stationnaire.

7.  $y_t = 0.4 + 1.2y_{t-1} - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(1;1). Exprimons-le sous forme polynomiale comme suit :

$$\begin{aligned}y_t &= 0.4 + 1.2Ly_t - 0.6L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\y_t - 1.2Ly_t &= 0.4 - 0.6L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\y_t(1 - 1.2L) &= 0.4 + \varepsilon_t(1 - 0.6L) \\\alpha(L)y_t &= 0.4 + \beta(L)\varepsilon_t\end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 1.2L$  et  $\beta(L) = 1 - 0.6L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 1.2z = 0$$

Cette équation admet une racine réelle ( $z \approx 0.8333$ ) inférieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est non stationnaire.

8.  $y_t = 1.15y_{t-1} - 0.425y_{t-2} + 0.05y_{t-3} - 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

C'est un ARMA(3;2). Son écriture polynomiale est la suivante :

$$\begin{aligned}y_t &= 1.15Ly_t - 0.425L^2y_t + 0.05L^3y_t - 0.2L\varepsilon_t + 0.3L^2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \\y_t - 1.15Ly_t + 0.425L^2y_t - 0.05L^3y_t &= -0.2L\varepsilon_t + 0.3L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\y_t(1 - 1.15L + 0.425L^2 - 0.05L^3) &= \varepsilon_t(1 - 0.2L + 0.3L^2) \\\alpha(L)y_t &= \beta(L)\varepsilon_t\end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 1.15L + 0.425L^2 - 0.05L^3$  et  $\beta(L) = 1 - 0.2L + 0.3L^2$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 1.15z + 0.425z^2 - 0.05z^3 = 0$$

ou encore :

$$2z^3 - 17z^2 + 46z - 40 = 0$$

Cette équation admet trois racines réelles ( $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 2.5$  et  $z_3 = 4$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

9.  $y_t = 0.5 - 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(2), il est stationnaire sans aucune condition.

10.  $y_t = 2.25y_{t-1} - 0.75y_{t-2} + 0.0625y_{t-3} + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2} + 0.1\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$   
 Il s'agit d'un ARMA(3;3).

$$\begin{aligned} y_t &= 2.25Ly_t - 0.75L^2y_t + 0.0625L^3y_t + 0.2L\varepsilon_t - 0.3L^2\varepsilon_t + 0.1L^3\varepsilon_t + \varepsilon_t \\ y_t - 2.25Ly_t + 0.75L^2y_t - 0.0625L^3y_t &= 0.2L\varepsilon_t - 0.3L^2\varepsilon_t + 0.1L^3\varepsilon_t + \varepsilon_t \\ y_t(1 - 2.25L + 0.75L^2 - 0.0625L^3) &= \varepsilon_t(1 + 0.2L - 0.3L^2 + 0.1L^3) \\ \alpha(L)y_t &= \beta(L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 2.25L + 0.75L^2 - 0.0625L^3$  et  $\beta(L) = 1 + 0.2L - 0.3L^2 + 0.1L^3$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 2.25z + 0.75z^2 - 0.0625z^3 = 0$$

ou encore :

$$z^3 - 12z^2 + 36z - 16 = 0$$

Cette équation admet trois racines réelles ( $z_1 \approx 0.5359$ ,  $z_2 = 4$  et  $z_3 \approx 7.4641$ ) dont une inférieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est non stationnaire.

### Ex. 2 — Stationnarité et propriétés statistiques des processus AR

Vérifier la stationnarité des processus autorégressifs suivants et calculer leurs espérances mathématiques  $E(y_t)$  et leurs fonctions d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0; 1; 2; 3$  (on suppose que  $\varepsilon_t \sim WN(0; 2)$ ) :

1.  $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$
2.  $y_t = 2 - 0.6y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \varepsilon_t$
3.  $y_t = 1 + 1.5y_{t-1} - 0.75y_{t-2} + 0.125y_{t-3} + \varepsilon_t$
4.  $y_t = -0.7y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$
5.  $y_t = 1.25y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + 0.0625y_{t-3} + \varepsilon_t$
6.  $y_t = 3 + 0.6y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$
7.  $y_t = 2 + 1.2y_{t-1} - 0.48y_{t-2} + 0.064y_{t-3} + \varepsilon_t$
8.  $y_t = 0.25y_{t-1} + \varepsilon_t$
9.  $y_t = -1 + 0.4y_{t-1} - 0.03y_{t-2} + \varepsilon_t$
10.  $y_t = 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t$

### Solution (Ex. 2) —

1.  $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un modèle autorégressif d'ordre 1 stationnaire puisque son unique paramètre est inférieur à un en valeur absolue. On peut aussi vérifier sa stationnarité en le réécrivant à l'aide

d'un polynôme retard comme suit :

$$\begin{aligned}y_t &= 1 + 0.5Ly_t + \varepsilon_t \\y_t - 0.5Ly_t &= 1 + \varepsilon_t \\y_t(1 - 0.5L) &= 1 + \varepsilon_t \\\alpha(L)y_t &= 1 + \varepsilon_t\end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.5L$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 - 0.5z = 0$$

Cette équation admet une seule racine réelle ( $z = 2$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}E(y_t) &= E(1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t) \\E(y_t) &= 1 + 0.5E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\E(y_t) &= 1 + 0.5E(y_t) + E(\varepsilon_t) \\\mu &= 1 + 0.5\mu + 0 \\\mu(1 - 0.5) &= 1 \\\mu &= \frac{1}{1 - 0.5} \\\mu &= 2\end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

– Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}V(y_t) &= V(1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t) \\V(y_t) &= V(0.5y_{t-1} + \varepsilon_t) \\V(y_t) &= 0.5^2V(y_{t-1}) + V(\varepsilon_t) + 2 \times 0.5 \times cov(y_{t-1}; \varepsilon_t) \\V(y_t) &= 0.5^2V(y_t) + V(\varepsilon_t) + 2 \times 0.5 \times cov(y_{t-1}; \varepsilon_t) \\\sigma^2 &= 0.25\sigma^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2 \times 0.5 \times 0 \\\sigma^2(1 - 0.25) &= \sigma_\varepsilon^2 \\\sigma^2 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - 0.25} \\\sigma^2 &\approx 2.6667\end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre  $k$  :

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

$$\gamma_k = E[(0.5(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t)(y_{t-k} - \mu)]$$

$$\gamma_k = E[0.5(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu) + \varepsilon_t(y_{t-k} - \mu)]$$

$$\gamma_k = 0.5E[(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + E[(\varepsilon_t - 0)(y_{t-k} - \mu)]$$

$$\gamma_k = 0.5\gamma_{k-1} + cov(\varepsilon_t; y_{t-k})$$

– Autocovariance d'ordre 1 :

$$\gamma_1 = 0.5\gamma_0 + cov(\varepsilon_t; y_{t-1})$$

$$\gamma_1 = 0.5\sigma^2 + cov(\varepsilon_t; y_{t-1})$$

$$\gamma_1 \approx 0.5 \times 2.6667 + 0$$

$$\gamma_1 \approx 1.3333$$

– Autocovariance d'ordre 2 :

$$\gamma_2 = 0.5\gamma_1 + cov(\varepsilon_t; y_{t-2})$$

$$\gamma_2 \approx 0.5 \times 1.3333 + 0$$

$$\gamma_2 \approx 0.6667$$

– Autocovariance d'ordre 3 :

$$\gamma_3 = 0.5\gamma_2 + cov(\varepsilon_t; y_{t-3})$$

$$\gamma_3 = 0.5 \times 0.6667 + 0$$

$$\gamma_3 = 0.3333$$

2.  $y_t = 2 - 0.6y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(2). Son écriture polynomiale est la suivante :

$$y_t = 2 - 0.6Ly_t + 0.3Ly_t + \varepsilon_t$$

$$y_t + 0.6Ly_t - 0.3L^2y_t = 2 + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 + 0.6L - 0.3L^2) = 2 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = 2 + \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.6L - 0.3L^2$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 + 0.6z - 0.3z^2 = 0$$

ou encore :

$$3z^2 - 6z - 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -1.0817$  et  $z_2 \approx 3.0817$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(2 - 0.6y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 2 - 0.6E(y_{t-1}) + 0.3E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 2 - 0.6E(y_t) + 0.3E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 2 - 0.6\mu + 0.3\mu + 0$$

$$\mu(1 + 0.6 - 0.3) = 2$$

$$\mu = \frac{2}{1 + 0.6 - 0.3}$$

$$\mu = 1.5385$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\gamma_0 = -0.6\gamma_{-1} + 0.3\gamma_{-2} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = -0.6\gamma_0 + 0.3\gamma_{-1}$$

$$\gamma_2 = -0.6\gamma_1 + 0.3\gamma_0$$

$$\gamma_3 = -0.6\gamma_2 + 0.3\gamma_1$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient

les équations de Yule-Walker<sup>3</sup> associées à ce modèle :

$$\begin{aligned} 1 &= -0.6\rho_1 + 0.3\rho_2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \\ \rho_1 &= -0.6 + 0.3\rho_1 \\ \rho_2 &= -0.6\rho_1 + 0.3 \\ \rho_3 &= -0.6\rho_2 + 0.3\rho_1 \end{aligned}$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \rho_1 &\approx -0.8571 \\ \rho_2 &\approx -0.2143 \\ \rho_3 &\approx -0.1286 \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} &= 0.55 \end{aligned}$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\approx 3.6364 \\ \gamma_1 &= \rho_1\gamma_0 \approx -3.1168 \\ \gamma_2 &= \rho_2\gamma_0 \approx -0.7793 \\ \gamma_3 &= \rho_3\gamma_0 \approx -0.4676 \end{aligned}$$

3.  $y_t = 1 + 1.5y_{t-1} - 0.75y_{t-2} + 0.125y_{t-3} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(3). Son écriture polynomiale est la suivante :

$$\begin{aligned} y_t &= 1 + 1.5Ly_t - 0.75L^2y_t + 0.125L^3y_t + \varepsilon_t \\ y_t(1 - 1.5L + 0.75L^2 - 0.125L^3) &= 1 + \varepsilon_t \\ \alpha(L)y_t &= 1 + \varepsilon_t \end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 1.5L + 0.75L^2 - 0.125L^3$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 - 1.5z + 0.75z^2 - 0.125z^3 = 0$$

ou encore :

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0$$

---

3. Les équations de Yule-Walker mettent en relation les autocorrélations d'un processus autorégressif en reprenant la même structure du modèle à l'exception du terme constant et du terme d'erreur.

Cette équation admet une racine réelle triple ( $z_1 = z_2 = z_3 = 2$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(1 + 1.5y_{t-1} - 0.75y_{t-2} + 0.125y_{t-3} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 1 + 1.5E(y_{t-1}) - 0.75E(y_{t-2}) + 0.125E(y_{t-3}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 1 + 1.5E(y_t) - 0.75E(y_t) + 0.125E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 1 + 1.5\mu - 0.75\mu + 0.125\mu + 0$$

$$\mu(1 - 1.5 + 0.75 - 0.125) = 1$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 1.5 + 0.75 - 0.125}$$

$$\mu = 8$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\gamma_0 = 1.5\gamma_{-1} - 0.75\gamma_{-2} + 0.125\gamma_{-3} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = 1.5\gamma_0 - 0.75\gamma_{-1} + 0.125\gamma_{-2}$$

$$\gamma_2 = 1.5\gamma_1 - 0.75\gamma_0 + 0.125\gamma_{-1}$$

$$\gamma_3 = 1.5\gamma_2 - 0.75\gamma_1 + 0.125\gamma_0$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient les équations de Yule-Walker associées à ce modèle :

$$1 = 1.5\rho_1 - 0.75\rho_2 + 0.125\rho_3 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}$$

$$\rho_1 = 1.5 - 0.75\rho_1 + 0.125\rho_2$$

$$\rho_2 = 1.5\rho_1 - 0.75 + 0.125\rho_1$$

$$\rho_3 = 1.5\rho_2 - 0.75\rho_1 + 0.125$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans

cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\rho_1 \approx 0.9091$$

$$\rho_2 \approx 0.7273$$

$$\rho_3 \approx 0.5341$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \approx 0.1151$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\gamma_0 \approx 17.3762$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 \approx 15.7967$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 \approx 12.6377$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 \approx 9.2806$$

4.  $y_t = -0.7y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(2) sans terme constant. Son écriture polynomiale est la suivante :

$$y_t = -0.7Ly_t + 0.2L^2y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t + 0.7Ly_t - 0.2L^2y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t(1 + 0.7L - 0.2L^2) = \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.7L - 0.2L^2$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 + 0.7z - 0.2z^2 = 0$$

ou encore :

$$2z^2 - 7z - 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -1.8395$  et  $z_2 \approx 3.8395$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(-0.7y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -0.7E(y_{t-1}) + 0.2E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -0.7E(y_t) + 0.2E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = -0.7\mu + 0.2\mu + 0$$

$$\mu(1 + 0.7 - 0.2) = 0$$

$$\mu = \frac{0}{1 + 0.7 - 0.2}$$

$$\mu = 0$$

Ce processus est donc centré du fait de l'absence du terme constant.

- **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :** On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\gamma_0 = -0.7\gamma_{-1} + 0.2\gamma_{-2} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = -0.7\gamma_0 + 0.2\gamma_{-1}$$

$$\gamma_2 = -0.7\gamma_1 + 0.2\gamma_0$$

$$\gamma_3 = -0.7\gamma_2 + 0.2\gamma_1$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient les équations de Yule-Walker associées à ce modèle :

$$1 = -0.7\rho_1 + 0.2\rho_2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}$$

$$\rho_1 = -0.7 + 0.2\rho_1$$

$$\rho_2 = -0.7\rho_1 + 0.2$$

$$\rho_3 = -0.7\rho_2 + 0.2\rho_1$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans

cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -0.875 \\ \rho_2 &= 0.8125 \\ \rho_3 &\approx -0.7438 \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} &= 1.775\end{aligned}$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\begin{aligned}\gamma_0 &\approx 1.1268 \\ \gamma_1 &= \rho_1\gamma_0 \approx -0.9860 \\ \gamma_2 &= \rho_2\gamma_0 \approx 0.9155 \\ \gamma_3 &= \rho_3\gamma_0 \approx -0.8381\end{aligned}$$

5.  $y_t = 1.25y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + 0.0625y_{t-3} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(3) sans terme constant. Son écriture polynomiale est la suivante :

$$\begin{aligned}y_t &= 1.25Ly_t - 0.5L^2y_t + 0.0625L^3y_t + \varepsilon_t \\ y_t - 1.25Ly_t + 0.5L^2y_t - 0.0625L^3y_t &= \varepsilon_t \\ y_t(1 - 1.25L + 0.5L^2 - 0.0625L^3) &= \varepsilon_t \\ \alpha(L)y_t &= \varepsilon_t\end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 1.25L + 0.5L^2 - 0.0625L^3$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 - 1.25z + 0.5z^2 - 0.0625z^3 = 0$$

ou encore :

$$z^3 - 8z^2 + 20z - 16 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z = 2$  et  $z = 4$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(1.25y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + 0.0625y_{t-3} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 1.25E(y_{t-1}) - 0.5E(y_{t-2}) + 0.0625E(y_{t-3}) + E(\varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 1.25E(y_t) - 0.5E(y_t) + 0.0625E(y_t) + E(\varepsilon_t) \\
 \mu &= 1.25\mu - 0.5\mu + 0.0625\mu + 0 \\
 \mu(1 - 1.25 + 0.5 - 0.0625) &= 0 \\
 \mu &= \frac{0}{1 - 1.25 + 0.5 - 0.0625} \\
 \mu &= 0
 \end{aligned}$$

Ce processus est donc centré du fait de l'absence du terme constant.

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 1.25\gamma_{-1} - 0.5\gamma_{-2} + 0.0625\gamma_{-3} + \sigma_\varepsilon^2 \\
 \gamma_1 &= 1.25\gamma_0 - 0.5\gamma_{-1} + 0.0625\gamma_{-2} \\
 \gamma_2 &= 1.25\gamma_1 - 0.5\gamma_0 + 0.0625\gamma_{-1} \\
 \gamma_3 &= 1.25\gamma_2 - 0.5\gamma_1 + 0.0625\gamma_0
 \end{aligned}$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient les équations de Yule-Walker associées à ce modèle :

$$\begin{aligned}
 1 &= 1.25\rho_1 - 0.5\rho_2 + 0.0625\rho_3 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \\
 \rho_1 &= 1.25 - 0.5\rho_1 + 0.0625\rho_2 \\
 \rho_2 &= 1.25\rho_1 - 0.5 + 0.0625\rho_1 \\
 \rho_3 &= 1.25\rho_2 - 0.5\rho_1 + 0.0625
 \end{aligned}$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans

cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\rho_1 \approx 0.8594$$

$$\rho_2 \approx 0.6280$$

$$\rho_3 \approx 0.4178$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \approx 0.2136$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\gamma_0 \approx 9.3633$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 \approx 8.0468$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 \approx 5.8802$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 \approx 3.9120$$

6.  $y_t = 3 + 0.6y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(2). Son écriture polynomiale est la suivante :

$$y_t = 3 + 0.6Ly_t + 0.2L^2y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.6Ly_t - 0.2L^2y_t = 3 + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.6L - 0.2L^2) = 3 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = 3 + \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.6L - 0.2L^2$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 - 0.6z - 0.2z^2 = 0$$

ou encore :

$$z^2 + 3z - 5 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -4.1926$  et  $z_2 \approx 2.1926$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(3 + 0.6y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 3 + 0.6E(y_{t-1}) + 0.2E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 3 + 0.6E(y_t) + 0.2E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 3 + 0.6\mu + 0.2\mu + 0$$

$$\mu(1 - 0.6 - 0.2) = 3$$

$$\mu = \frac{3}{1 - 0.6 - 0.2}$$

$$\mu = 15$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\gamma_0 = 0.6\gamma_{-1} + 0.2\gamma_{-2} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = 0.6\gamma_0 + 0.2\gamma_{-1}$$

$$\gamma_2 = 0.6\gamma_1 + 0.2\gamma_0$$

$$\gamma_3 = 0.6\gamma_2 + 0.2\gamma_1$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient les équations de Yule-Walker associées à ce modèle :

$$1 = 0.6\rho_1 + 0.2\rho_2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}$$

$$\rho_1 = 0.6 + 0.2\rho_1$$

$$\rho_2 = 0.6\rho_1 + 0.2$$

$$\rho_3 = 0.6\rho_2 + 0.2\rho_1$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans

cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\rho_1 = 0.75$$

$$\rho_2 = 0.65$$

$$\rho_3 = 0.54$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} = 0.42$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\gamma_0 \approx 4.7619$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 \approx 3.5714$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 \approx 3.0952$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 \approx 2.5714$$

7.  $y_t = 2 + 1.2y_{t-1} - 0.48y_{t-2} + 0.064y_{t-3} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(3). Son écriture polynomiale est la suivante :

$$y_t = 2 + 1.2Ly_t - 0.48L^2y_t + 0.064L^3y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 1.2Ly_t + 0.48L^2y_t - 0.064L^3y_t = 2 + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 1.2L + 0.48L^2 - 0.064L^3) = 2 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = 2 + \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 1.2L + 0.48L^2 - 0.064L^3$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 - 1.2z + 0.48z^2 - 0.064z^3 = 0$$

ou encore :

$$8z^3 - 60z^2 + 150z - 125 = 0$$

Cette équation admet une racine triple ( $z_1 = z_2 = z_3 = 2.5$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(2 + 1.2y_{t-1} - 0.48y_{t-2} + 0.064y_{t-3} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 2 + 1.2E(y_{t-1}) - 0.48E(y_{t-2}) + 0.064E(y_{t-3}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 2 + 1.2E(y_t) - 0.48E(y_t) + 0.064E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 2 + 1.2\mu - 0.48\mu + 0.064\mu + 0$$

$$\mu(1 - 1.2 + 0.48 - 0.064) = 2$$

$$\mu = \frac{2}{1 - 1.2 + 0.48 - 0.064}$$

$$\mu = 9.2593$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\gamma_0 = 1.2\gamma_{-1} - 0.48\gamma_{-2} + 0.064\gamma_{-3} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = 1.2\gamma_0 - 0.48\gamma_{-1} + 0.064\gamma_{-2}$$

$$\gamma_2 = 1.2\gamma_1 - 0.48\gamma_0 + 0.064\gamma_{-1}$$

$$\gamma_3 = 1.2\gamma_2 - 0.48\gamma_1 + 0.064\gamma_0$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient les équations de Yule-Walker associées à ce modèle :

$$1 = 1.2\rho_1 - 0.48\rho_2 + 0.064\rho_3 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}$$

$$\rho_1 = 1.2 - 0.48\rho_1 + 0.064\rho_2$$

$$\rho_2 = 1.2\rho_1 - 0.48 + 0.064\rho_1$$

$$\rho_3 = 1.2\rho_2 - 0.48\rho_1 + 0.064$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans

cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\rho_1 \approx 0.8358$$

$$\rho_2 \approx 0.5765$$

$$\rho_3 \approx 0.3546$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \approx 0.2511$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\gamma_0 \approx 7.9650$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 \approx 6.6571$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 \approx 4.5918$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 \approx 2.8244$$

8.  $y_t = 0.25y_{t-1} + \varepsilon_t$

Ce processus est un autorégressif d'ordre 1 stationnaire puisque son unique paramètre est inférieur à un en valeur absolue. On peut vérifier cette stationnarité en passant également par un polynôme retard comme suit :

$$y_t = 0.25Ly_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.25Ly_t = \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.25L) = \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.25L$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 - 0.25z = 0$$

Cette équation admet une seule racine réelle ( $z = 4$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est stationnaire.

- **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(0.25y_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 0.25E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 0.25E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 0.25\mu + 0$$

$$\mu(1 - 0.25) = 0$$

$$\mu = \frac{0}{1 - 0.25}$$

$$\mu = 0$$

Ce processus est donc centré du fait de l'absence du terme constant.

- **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

– Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$V(y_t) = V(0.25y_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$V(y_t) = 0.25^2V(y_{t-1}) + V(\varepsilon_t) + 2 \times 0.25 \times cov(y_{t-1}; \varepsilon_t)$$

$$V(y_t) = 0.25^2V(y_t) + V(\varepsilon_t) + 2 \times 0.25 \times cov(y_{t-1}; \varepsilon_t)$$

$$\sigma^2 = 0.0625\sigma^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2 \times 0.25 \times 0$$

$$\sigma^2(1 - 0.0625) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - 0.0625}$$

$$\sigma^2 \approx 2.1333$$

– Autocovariance d'ordre  $k$  :

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

$$\gamma_k = E(y_t y_{t-k})$$

$$\gamma_k = E[(0.25y_{t-1} + \varepsilon_t)y_{t-k}]$$

$$\gamma_k = E(0.25y_{t-1}y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k})$$

$$\gamma_k = 0.25E(y_{t-1}y_{t-k}) + E(\varepsilon_t y_{t-k})$$

$$\gamma_k = 0.25\gamma_{k-1} + cov(\varepsilon_t; y_{t-k})$$

– Autocovariance d'ordre 1 :

$$\gamma_1 = 0.25\gamma_0 + cov(\varepsilon_t; y_{t-1})$$

$$\gamma_1 = 0.25\sigma^2 + cov(\varepsilon_t; y_{t-1})$$

$$\gamma_1 \approx 0.25 \times 2.1333 + 0$$

$$\gamma_1 \approx 0.5333$$

– Autocovariance d'ordre 2 :

$$\gamma_2 = 0.25\gamma_1 + cov(\varepsilon_t; y_{t-2})$$

$$\gamma_2 \approx 0.25 \times 0.5333 + 0$$

$$\gamma_2 \approx 0.1333$$

– Autocovariance d'ordre 3 :

$$\gamma_3 = 0.25\gamma_2 + cov(\varepsilon_t; y_{t-3})$$

$$\gamma_3 \approx 0.25 \times 0.1333 + 0$$

$$\gamma_3 \approx 0.0333$$

9.  $y_t = -1 + 0.4y_{t-1} - 0.03y_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(2). Son écriture polynomiale est la suivante :

$$y_t = -1 + 0.4Ly_t - 0.03L^2y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.4Ly_t + 0.03L^2y_t = -1 + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.4L + 0.03L^2) = -1 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = -1 + \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.4L + 0.03L^2$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme s'écrit :

$$1 - 0.4z + 0.03z^2 = 0$$

ou encore :

$$3z^2 - 40z + 100 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx 3.3333$  et  $z_2 = 10$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(-1 + 0.4y_{t-1} - 0.03y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -1 + 0.4E(y_{t-1}) - 0.03E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -1 + 0.4E(y_t) - 0.03E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = -1 + 0.4\mu - 0.03\mu + 0$$

$$\mu(1 - 0.4 + 0.03) = -1$$

$$\mu = \frac{-1}{1 - 0.4 + 0.03}$$

$$\mu = -1.5873$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\gamma_0 = 0.4\gamma_{-1} - 0.03\gamma_{-2} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = 0.4\gamma_0 - 0.03\gamma_{-1}$$

$$\gamma_2 = 0.4\gamma_1 - 0.03\gamma_0$$

$$\gamma_3 = 0.4\gamma_2 - 0.03\gamma_1$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient les équations de Yule-Walker associées à ce modèle :

$$1 = 0.4\rho_1 - 0.03\rho_2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}$$

$$\rho_1 = 0.4 - 0.03\rho_1$$

$$\rho_2 = 0.4\rho_1 - 0.03$$

$$\rho_3 = 0.4\rho_2 - 0.03\rho_1$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans

cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\rho_1 \approx 0.3883$$

$$\rho_2 \approx 0.1253$$

$$\rho_3 \approx 0.0385$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \approx 0.8484$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\gamma_0 \approx 2.3574$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 \approx 0.9154$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 \approx 0.2954$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 \approx 0.0908$$

10.  $y_t = 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un AR(2) sans terme constant. Son écriture polynomiale est la suivante :

$$y_t = 0.3Ly_t - 0.02L^2y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.3Ly_t + 0.02L^2y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.3L + 0.02L^2) = \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.3L + 0.02L^2$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme retard s'écrit :

$$1 - 0.3z + 0.02z^2 = 0$$

ou encore :

$$z^2 - 15z + 50 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 = 5$  et  $z_2 = 10$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 0.3E(y_{t-1}) - 0.02E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 0.3E(y_t) - 0.02E(y_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 0.3\mu - 0.02\mu + 0$$

$$\mu(1 - 0.3 + 0.02) = 0$$

$$\mu = \frac{0}{1 - 0.3 + 0.02}$$

$$\mu = 0$$

Ce processus est donc centré du fait de l'absence du terme constant.

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

On peut aisément montrer que les autocovariances du processus  $y_t$  maintiennent la même structure de dépendance que le processus lui-même (en omettant la constante et le terme d'erreur et en veillant à ajouter la variance du choc pour  $k = 0$ ). On obtient les équations suivantes :

$$\gamma_0 = 0.3\gamma_{-1} - 0.02\gamma_{-2} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = 0.3\gamma_0 - 0.02\gamma_{-1}$$

$$\gamma_2 = 0.3\gamma_1 - 0.02\gamma_0$$

$$\gamma_3 = 0.3\gamma_2 - 0.02\gamma_1$$

En divisant les membres de chaque équation par  $\gamma_0$  et en notant que  $\gamma_{-k} = \gamma_k$ , on obtient les équations de Yule-Walker associées à ce modèle :

$$1 = 0.3\rho_1 - 0.02\rho_2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}$$

$$\rho_1 = 0.3 - 0.02\rho_1$$

$$\rho_2 = 0.3\rho_1 - 0.02$$

$$\rho_3 = 0.3\rho_2 - 0.02\rho_1$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  la fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . La résolution de ces équations dans

cet ordre précis donne les résultats suivants :

$$\rho_1 \approx 0.2941$$

$$\rho_2 \approx 0.0682$$

$$\rho_3 \approx 0.0146$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \approx 0.9131$$

Comme  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ , on déduit :

$$\gamma_0 \approx 2.1903$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 \approx 0.6442$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 \approx 0.1494$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 \approx 0.0320$$

**Ex. 3 — Stationnarité et propriétés statistiques des processus ARMA**

Vérifier la stationnarité des processus autorégressifs - moyennes mobiles suivants et calculer leurs espérances mathématiques  $E(y_t)$  et leurs fonctions d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0; 1; 2; 3$  (on suppose que  $\varepsilon_t \sim WN(0; 1)$ ) :

1.  $y_t = 1 - 0.5y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
2.  $y_t = -0.8y_{t-1} - 0.1y_{t-2} - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
3.  $y_t = 2 + 0.2y_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
4.  $y_t = 3 - 0.2y_{t-1} + 0.01y_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
5.  $y_t = 1 - 0.6y_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
6.  $y_t = -1 + 0.1y_{t-1} + 0.08y_{t-2} - 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
7.  $y_t = 0.25y_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
8.  $y_t = 3 - 0.1y_{t-1} + 0.3y_{t-2} - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
9.  $y_t = 1 + 0.8y_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
10.  $y_t = -2 + 0.65y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

**Solution (Ex. 3) —**

1.  $y_t = 1 - 0.5y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;1). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$\begin{aligned}y_t &= 1 - 0.5Ly_t + 0.3L^2y_t + 0.3L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\y_t + 0.5Ly_t - 0.3L^2y_t &= 1 + 0.3L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\y_t(1 + 0.5L - 0.3L^2) &= 1 + \varepsilon_t(1 + 0.3L) \\ \alpha(L)y_t &= 1 + \beta(L)\varepsilon_t\end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.5L - 0.3L^2$  et  $\beta(L) = 1 + 0.3L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 + 0.5z - 0.3z^2 = 0$$

ou encore :

$$3z^2 - 5z - 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -1.1736$  et  $z_2 \approx 2.8403$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}E(y_t) &= E(1 - 0.5y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\E(y_t) &= 1 - 0.5E(y_{t-1}) + 0.3E(y_{t-2}) + 0.3E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\E(y_t) &= 1 - 0.5E(y_t) + 0.3E(y_t) + 0.3E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t) \\\mu &= 1 - 0.5\mu + 0.3\mu + 0.3 \times 0 + 0 \\\mu &= \frac{1}{1 + 0.5 - 0.3} \\\mu &= 0.8333\end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

2.  $y_t = -0.8y_{t-1} - 0.1y_{t-2} - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;2) sans terme constant. Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$\begin{aligned}y_t &= -0.8Ly_t - 0.1L^2y_t - 0.5L\varepsilon_t + 0.3L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\y_t + 0.8Ly_t + 0.1L^2y_t &= -0.5L\varepsilon_t + 0.3L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\y_t(1 + 0.8L + 0.1L^2) &= \varepsilon_t(1 - 0.5L + 0.3L^2) \\ \alpha(L)y_t &= \beta(L)\varepsilon_t\end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.8L + 0.1L^2$  et  $\beta(L) = 1 - 0.5L + 0.3L^2$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 + 0.8z + 0.1z^2 = 0$$

ou encore :

$$z^2 + 8z + 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -6.4495$  et  $z_2 \approx -1.5505$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(-0.8y_{t-1} - 0.1y_{t-2} - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -0.8E(y_{t-1}) - 0.1E(y_{t-2}) - 0.5E(\varepsilon_{t-1}) + 0.3E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -0.8E(y_t) - 0.1E(y_t) - 0.5E(\varepsilon_t) + 0.3E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = -0.8\mu - 0.1\mu - 0.5 \times 0 + 0.3 \times 0 + 0$$

$$\mu = \frac{0}{1 + 0.8 + 0.1}$$

$$\mu = 0$$

Ce processus est donc centré du fait de l'absence du terme constant.

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

– Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

– Autocovariance d'ordre 1 :

– Autocovariance d'ordre 2 :

– Autocovariance d'ordre 3 :

3.  $y_t = 2 + 0.2y_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(1;1). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$y_t = 2 + 0.2Ly_t + 0.7L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.2Ly_t = 2 + 0.7L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.2L) = 2 + \varepsilon_t(1 + 0.7L)$$

$$\alpha(L)y_t = 2 + \beta(L)\varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.2L$  et  $\beta(L) = 1 + 0.7L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 0.2z = 0$$

Cette équation admet une seule racine réelle ( $z = 5$ ) supérieure à un en valeur absolue. On

conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(2 + 0.2y_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 2 + 0.2E(y_{t-1}) + 0.7E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 2 + 0.2E(y_t) + 0.7E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 2 + 0.2\mu + 0.7 \times 0 + 0$$

$$\mu = \frac{2}{1 - 0.2}$$

$$\mu = 2.5$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

– Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

– Autocovariance d'ordre 1 :

– Autocovariance d'ordre 2 :

– Autocovariance d'ordre 3 :

4.  $y_t = 3 - 0.2y_{t-1} + 0.01y_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;1). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$y_t = 3 - 0.2Ly_t + 0.01L^2y_t - 0.1L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t + 0.2Ly_t - 0.01L^2y_t = 3 - 0.1L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 + 0.2L - 0.01L^2) = 3 + \varepsilon_t(1 - 0.1L)$$

$$\alpha(L)y_t = 3 + \beta(L)\varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.2L - 0.01L^2$  et  $\beta(L) = 1 - 0.1L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 + 0.2z - 0.01z^2 = 0$$

ou encore :

$$z^2 - 20z - 100 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -4.1421$  et  $z_2 \approx 24.1421$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(3 - 0.2y_{t-1} + 0.01y_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 3 - 0.2E(y_{t-1}) + 0.01E(y_{t-2}) - 0.1E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 3 - 0.2E(y_t) + 0.01E(y_t) - 0.1E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t) \\
 \mu &= 3 - 0.2\mu + 0.01\mu - 0.1 \times 0 + 0 \\
 \mu &= \frac{3}{1 + 0.2 - 0.01} \\
 \mu &= 2.5210
 \end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

5.  $y_t = 1 - 0.6y_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(1;2). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$\begin{aligned}
 y_t &= 1 - 0.6Ly_t + 0.2L\varepsilon_t + 0.5L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\
 y_t + 0.6Ly_t &= 1 + 0.2L\varepsilon_t + 0.5L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\
 y_t(1 + 0.6L) &= 1 + \varepsilon_t(1 + 0.2L + 0.5L^2) \\
 \alpha(L)y_t &= 1 + \beta(L)\varepsilon_t
 \end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.6L$  et  $\beta(L) = 1 + 0.2L + 0.5L^2$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 + 0.6z = 0$$

Cette équation admet une seule racine réelle ( $z \approx -1.6667$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(1 - 0.6y_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 1 - 0.6E(y_{t-1}) + 0.2E(\varepsilon_{t-1}) + 0.5E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 1 - 0.6E(y_t) + 0.2E(\varepsilon_t) + 0.5E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t) \\
 \mu &= 1 - 0.6\mu + 0.2 \times 0 + 0.5 \times 0 + 0 \\
 \mu &= \frac{1}{1 + 0.6} \\
 \mu &= 0.625
 \end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

6.  $y_t = -1 + 0.1y_{t-1} + 0.08y_{t-2} - 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;1). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$y_t = -1 + 0.1Ly_t + 0.08L^2y_t - 0.3L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.1Ly_t - 0.08L^2y_t = -1 - 0.3L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.1L - 0.08L^2) = -1 + \varepsilon_t(1 - 0.3L)$$

$$\alpha(L)y_t = -1 + \beta(L)\varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.1L - 0.08L^2$  et  $\beta(L) = 1 - 0.3L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 0.1z - 0.08z^2 = 0$$

ou encore :

$$8z^2 + 10z - 100 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -4.2154$  et  $z_2 \approx 2.9654$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(-1 + 0.1y_{t-1} + 0.08y_{t-2} - 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -1 + 0.1E(y_{t-1}) + 0.08E(y_{t-2}) - 0.3E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -1 + 0.1E(y_t) + 0.08E(y_t) - 0.3E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = -1 + 0.1\mu + 0.08\mu - 0.3 \times 0 + 0$$

$$\mu = \frac{-1}{1 - 0.1 - 0.08}$$

$$\mu = -1.2195$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

7.  $y_t = 0.25y_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(1;1) sans terme constant. Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme

suit :

$$\begin{aligned}
 y_t &= 0.25Ly_t + 0.8L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\
 y_t - 0.25Ly_t &= 0.8L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\
 y_t(1 - 0.25L) &= \varepsilon_t(1 + 0.8L) \\
 \alpha(L)y_t &= \beta(L)\varepsilon_t
 \end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.25L$  et  $\beta(L) = 1 + 0.8L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 0.25z = 0$$

Cette équation admet une seule racine réelle ( $z = 4$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(0.25y_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 0.25E(y_{t-1}) + 0.8E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 0.25E(y_t) + 0.8E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t) \\
 \mu &= 0.25\mu + 0.8 \times 0 + 0 \\
 \mu &= \frac{0}{1 - 0.25} \\
 \mu &= 0
 \end{aligned}$$

Ce processus est donc centré du fait de l'absence du terme constant.

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

8.  $y_t = 3 - 0.1y_{t-1} + 0.3y_{t-2} - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;2). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$\begin{aligned}
 y_t &= 3 - 0.1Ly_t + 0.3L^2y_t - 0.4L\varepsilon_t + 0.4L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\
 y_t + 0.1Ly_t - 0.3L^2y_t &= 3 - 0.4L\varepsilon_t + 0.4L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t \\
 y_t(1 + 0.1L - 0.3L^2) &= 3 + \varepsilon_t(1 - 0.4L + 0.4L^2) \\
 \alpha(L)y_t &= 3 + \beta(L)\varepsilon_t
 \end{aligned}$$

avec  $\alpha(L) = 1 + 0.1L - 0.3L^2$  et  $\beta(L) = 1 - 0.4L + 0.4L^2$ . L'équation caractéristique associée

au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 + 0.1z - 0.3z^2 = 0$$

ou encore :

$$3z^2 - z - 10 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 = -2$  et  $z_2 = 5$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(3 - 0.1y_{t-1} + 0.3y_{t-2} - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 3 - 0.1E(y_{t-1}) + 0.3E(y_{t-2}) - 0.4E(\varepsilon_{t-1}) + 0.4E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 3 - 0.1E(y_t) + 0.3E(y_t) - 0.4E(\varepsilon_t) + 0.4E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 3 - 0.1\mu + 0.3\mu - 0.4 \times 0 + 0.4 \times 0 + 0$$

$$\mu = \frac{3}{1 + 0.1 - 0.3}$$

$$\mu = 3.75$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

9.  $y_t = 1 + 0.8y_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(1;1). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$y_t = 1 + 0.8Ly_t + 0.1L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.8Ly_t = 1 + 0.1L\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.8L) = 1 + \varepsilon_t(1 + 0.1L)$$

$$\alpha(L)y_t = 1 + \beta(L)\varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.8L$  et  $\beta(L) = 1 + 0.1L$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 0.8z = 0$$

Cette équation admet une seule racine réelle ( $z = 1.25$ ) supérieure à un en valeur absolue. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(1 + 0.8y_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 1 + 0.8E(y_{t-1}) + 0.1E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 1 + 0.8E(y_t) + 0.1E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 1 + 0.8\mu + 0.1 \times 0 + 0$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 0.8}$$

$$\mu = 5$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

10.  $y_t = -2 + 0.65y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un ARMA(2;2). Ecrivons-le à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$y_t = -2 + 0.65Ly_t + 0.2L^2y_t + 0.2L\varepsilon_t - 0.4L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - 0.65Ly_t - 0.2L^2y_t = -2 + 0.2L\varepsilon_t - 0.4L^2\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.65L - 0.2L^2) = -2 + \varepsilon_t(1 + 0.2L - 0.4L^2)$$

$$\alpha(L)y_t = -2 + \beta(L)\varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.65L - 0.2L^2$  et  $\beta(L) = 1 + 0.2L - 0.4L^2$ . L'équation caractéristique associée au polynôme retard  $\alpha(L)$  s'écrit :

$$1 - 0.65z - 0.2z^2 = 0$$

ou encore :

$$4z^2 + 13z - 20 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles ( $z_1 \approx -4.3892$  et  $z_2 \approx 1.1392$ ) supérieures à un en valeurs absolues. On conclut que ce processus est stationnaire.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(-2 + 0.65y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -2 + 0.65E(y_{t-1}) + 0.2E(y_{t-2}) + 0.2E(\varepsilon_{t-1}) - 0.4E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -2 + 0.65E(y_t) + 0.2E(y_t) + 0.2E(\varepsilon_t) - 0.4E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = -2 + 0.65\mu + 0.2\mu + 0.2 \times 0 - 0.4 \times 0 + 0$$

$$\mu = \frac{-2}{1 - 0.65 - 0.2}$$

$$\mu = 13.3333$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

- Autocovariance d'ordre 0 ou variance :
- Autocovariance d'ordre 1 :
- Autocovariance d'ordre 2 :
- Autocovariance d'ordre 3 :

**Ex. 4 — Propriétés statistiques des processus MA**

Calculer les espérances mathématiques  $E(y_t)$  des processus moyennes mobiles suivants et leurs fonctions d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0; 1; 2; 3$  (on suppose que  $\varepsilon_t \sim WN(0; 2)$ ) :

1.  $y_t = 1 + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
2.  $y_t = 2 - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
3.  $y_t = 2 - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
4.  $y_t = -0.7\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$
5.  $y_t = 0.5 - 0.3\varepsilon_{t-1} - 0.02\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
6.  $y_t = 3 + 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$
7.  $y_t = 0.8 + 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
8.  $y_t = 0.25\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$
9.  $y_t = -1 + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.03\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
10.  $y_t = -0.5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

**Solution (Ex. 4) —**

Dans cet exercice, et plus particulièrement lors du calcul de la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  du processus  $y_t$ , il sera fréquemment fait appel à l'autocovariance du terme d'erreur  $\varepsilon_t$  qui est supposé remplir les propriétés d'un bruit blanc et parmi lesquelles celle de l'indépendance de deux chocs différés dans le temps, c'est à dire  $cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k}) = 0$  avec  $k \neq 0$ . Dans le cas de deux chocs simultanés (*i.e.*  $k = 0$ ), l'autocovariance est simplement la variance du choc ( $cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ ).

1.  $y_t = 1 + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(2).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(1 + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 1 + 0.5E(\varepsilon_{t-1}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t) \\
 \mu &= 1 + 0.5 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0 \\
 \mu &= 1
 \end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
 &= E[(y_t - 1)(y_{t-k} - 1)] \\
 &= E[(0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)(0.5\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k})] \\
 &= E(0.25\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + 0.1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} + 0.5\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + 0.10\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} \\
 &\quad + 0.04\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} + 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} + 0.5\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
 &= 0.25E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.1E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.5E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) + 0.10E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1}) \\
 &\quad + 0.04E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k}) + 0.5E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + 0.2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
 &= 0.25cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.1cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.5cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) + 0.10cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-1}) \\
 &\quad + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k}) + 0.5cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-2}) \\
 &\quad + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})
 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 0.25cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.1cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.5cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) + 0.10cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) \\
 &\quad + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_t) + 0.5cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
 &= 0.25\sigma_\varepsilon^2 + 0.04\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (0.25 + 0.04 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 1.29\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 1.29 \times 2 \\
 &= 2.58
 \end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 0.25\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.5\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.10\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\ &\quad + 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.2\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) + 0.5\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + 0.2\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\ &= 0.5\sigma_\varepsilon^2 + 0.10\sigma_\varepsilon^2 \\ &= (0.5 + 0.10)\sigma_\varepsilon^2 \\ &= 0.6\sigma_\varepsilon^2 \\ &= 0.6 \times 2 \\ &= 1.2\end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= 0.25\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.5\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.10\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) \\ &\quad + 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.2\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.5\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + 0.2\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\ &= 0.2\sigma_\varepsilon^2 \\ &= 0.2 \times 2 \\ &= 0.4\end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= 0.25\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) + 0.5\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.10\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) \\ &\quad + 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) + 0.2\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.5\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + 0.2\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\ &= 0\end{aligned}$$

2.  $y_t = 2 - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(1).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(2 - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 2 - 0.6E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 2 - 0.6 \times 0 + 0$$

$$\mu = 2$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
&= E[(y_t - 2)(y_{t-k} - 2)] \\
&= E[(-0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(-0.6\varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k})] \\
&= E(0.36\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} - 0.6\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} - 0.6\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.36E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) - 0.6E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) - 0.6E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) - 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) - 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) - 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) - 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
&= 0.36\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.36 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.36\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.36 \times 2 \\
&= 2.72
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) - 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\
&= -0.6\sigma_\varepsilon^2 \\
&= -0.6 \times 2 \\
&= -1.2
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$3.- y_t = 2 - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

Il s'agit d'un MA(2).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(2 - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 2 - 0.4E(\varepsilon_{t-1}) + 0.1E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t) \\
 \mu &= 2 - 0.4 \times 0 + 0.1 \times 0 + 0 \\
 \mu &= 2
 \end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
 &= E[(y_t - 2)(y_{t-k} - 2)] \\
 &= E[(-0.4\varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)(-0.4\varepsilon_{t-k-1} + 0.1\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k})] \\
 &= E(0.16\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} - 0.04\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} - 0.4\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} - 0.04\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} \\
 &\quad + 0.01\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} + 0.1\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} - 0.4\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + 0.1\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
 &= 0.16E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) - 0.04E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}) - 0.4E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) - 0.04E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1}) \\
 &\quad + 0.01E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.1E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k}) - 0.4E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + 0.1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
 &= 0.16cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) - 0.04cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.4cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) - 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-1}) \\
 &\quad + 0.01cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.1cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k}) - 0.4cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.1cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-2}) \\
 &\quad + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})
 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 0.16cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) - 0.04cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.4cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) - 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) \\
 &\quad + 0.01cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.1cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_t) - 0.4cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + 0.1cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
 &= 0.16\sigma_\varepsilon^2 + 0.01\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (0.16 + 0.01 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 1.17\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 1.17 \times 2 \\
 &= 2.34
 \end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 0.16\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.4\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) - 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\ &\quad + 0.01\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) - 0.4\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\ &= -0.4\sigma_\varepsilon^2 - 0.04\sigma_\varepsilon^2 \\ &= (-0.4 - 0.04)\sigma_\varepsilon^2 \\ &= -0.44\sigma_\varepsilon^2 \\ &= -0.44 \times 2 \\ &= -0.88\end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= 0.16\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.4\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) \\ &\quad + 0.01\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) - 0.4\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\ &= 0.1\sigma_\varepsilon^2 \\ &= 0.1 \times 2 \\ &= 0.2\end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= 0.16\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) - 0.4\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.04\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) \\ &\quad + 0.01\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) - 0.4\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + 0.1\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\ &= 0\end{aligned}$$

4.  $y_t = -0.7\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(3) sans terme constant.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}E(y_t) &= E(-0.7\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t) \\ E(y_t) &= -0.7E(\varepsilon_{t-1}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}) + 0.2E(\varepsilon_{t-3}) + E(\varepsilon_t) \\ \mu &= -0.7 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0 \\ \mu &= 0\end{aligned}$$

Ce processus est centré du fait de l'absence du terme constant.

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
&= E[(y_t - 0)(y_{t-k} - 0)] \\
&= E[(-0.7\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t)(-0.7\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_{t-k-2} + 0.2\varepsilon_{t-k-3} + \varepsilon_{t-k})] \\
&= E(0.49\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} - 0.14\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} - 0.14\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-3} - 0.7\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} - 0.14\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} \\
&\quad + 0.04\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} + 0.04\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-3} + 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} - 0.14\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-1} + 0.04\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-2} \\
&\quad + 0.04\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-3} + 0.2\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k} - 0.7\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2} + 0.2\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-3} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.49E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) - 0.14E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}) - 0.14E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-3}) - 0.7E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.14E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.04E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.04E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-3}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.14E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.04E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.04E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-3}) + 0.2E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.7E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + 0.2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}) + 0.2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-3}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.49cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-3}) - 0.7cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.7cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.49cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.7cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_t) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_t) \\
&\quad - 0.7cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
&= 0.49\sigma_\varepsilon^2 + 0.04\sigma_\varepsilon^2 + 0.04\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.49 + 0.04 + 0.04 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.57\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.57 \times 2 \\
&= 3.14
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.49cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.7cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad - 0.7cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\
&= -0.7\sigma_\varepsilon^2 - 0.14\sigma_\varepsilon^2 + 0.04\sigma_\varepsilon^2 \\
&= (-0.7 - 0.14 + 0.04)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= -0.8\sigma_\varepsilon^2 \\
&= -0.8 \times 2 \\
&= -1.6
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 0.49cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) - 0.7cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-5}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad - 0.7cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\
&= 0.2\sigma_\varepsilon^2 - 0.14\sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.2 - 0.14)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.06\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.06 \times 2 \\
&= 0.12
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= 0.49cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) - 0.14cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-6}) - 0.7cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-6}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad - 0.14cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-5}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-6}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad - 0.7cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-6}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
&= 0.2cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) \\
&= 0.2\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.2 \times 2 \\
&= 0.4
\end{aligned}$$

$$5- y_t = 0.5 - 0.3\varepsilon_{t-1} - 0.02\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

Il s'agit d'un MA(2).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$E(y_t) = E(0.5 - 0.3\varepsilon_{t-1} - 0.02\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 0.5 - 0.3E(\varepsilon_{t-1}) - 0.02E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = 0.5 - 0.3 \times 0 - 0.02 \times 0 + 0$$

$$\mu = 0.5$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

$$= E[(y_t - 0.5)(y_{t-k} - 0.5)]$$

$$= E[(-0.3\varepsilon_{t-1} - 0.02\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)(-0.3\varepsilon_{t-k-1} - 0.02\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k})]$$

$$= E(0.09\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + 0.006\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} - 0.3\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + 0.006\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} + 0.0004\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} - 0.02\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} - 0.3\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} - 0.02\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k})$$

$$= 0.09E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.006E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}) - 0.3E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) + 0.006E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1})$$

$$+ 0.0004E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}) - 0.02E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k}) - 0.3E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) - 0.02E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k})$$

$$= 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.006cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.3cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) + 0.006cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-1})$$

$$+ 0.0004cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k}) - 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) - 0.02cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-2})$$

$$+ cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\gamma_0 = 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.006cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.3cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) + 0.006cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1})$$

$$+ 0.0004cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_t) - 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) - 0.02cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t)$$

$$= 0.09\sigma_\varepsilon^2 + 0.0004\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= (0.09 + 0.0004 + 1)\sigma_\varepsilon^2$$

$$= 1.0904\sigma_\varepsilon^2$$

$$= 1.0904 \times 2$$

$$= 2.1808$$

– Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 0.09\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.006\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.3\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.006\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\
 &\quad + 0.0004\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) - 0.02\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) - 0.3\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) - 0.02\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
 &\quad + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\
 &= -0.3\sigma_\varepsilon^2 + 0.006\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (-0.3 + 0.006)\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= -0.294\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= -0.294 \times 2 \\
 &= -0.588
 \end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= 0.09\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.006\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.3\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.006\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) \\
 &\quad + 0.0004\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) - 0.02\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) - 0.3\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) - 0.02\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) \\
 &\quad + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\
 &= -0.02\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\
 &= -0.02\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= -0.02 \times 2 \\
 &= -0.04
 \end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 &= 0.09\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.006\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) - 0.3\text{cov}(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.006\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) \\
 &\quad + 0.0004\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) - 0.02\text{cov}(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) - 0.3\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) - 0.02\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) \\
 &\quad + \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

6.  $y_t = 3 + 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(3).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(3 + 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 3 + 0.6E(\varepsilon_{t-1}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}) - 0.1E(\varepsilon_{t-3}) + E(\varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 3 + 0.6 \times 0 + 0.2 \times 0 - 0.1 \times 0 + 0 \\
 \mu &= 3
 \end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
&= E[(y_t - 3)(y_{t-k} - 3)] \\
&= E[(0.6\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t)(0.6\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_{t-k-2} - 0.1\varepsilon_{t-k-3} + \varepsilon_{t-k})] \\
&= E(0.36\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + 0.12\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} - 0.06\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-3} + 0.6\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + 0.12\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} \\
&\quad + 0.04\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} - 0.02\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-3} + 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} - 0.06\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-1} - 0.02\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-2} \\
&\quad + 0.01\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-3} - 0.1\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k} + 0.6\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2} - 0.1\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-3} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.36E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.12E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}) - 0.06E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-3}) + 0.6E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.12E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.04E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}) - 0.02E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-3}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.06E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-1}) - 0.02E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.01E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-3}) - 0.1E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.6E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + 0.2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}) - 0.1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-3}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.12cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.06cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-3}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.12cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k}) \\
&\quad - 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-1}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.01cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-3}) - 0.1cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.1cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.12cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.06cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) \\
&\quad + 0.12cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_t) \\
&\quad - 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-1}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) + 0.01cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) - 0.1cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_t) \\
&\quad + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) - 0.1cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
&= 0.36\sigma_\varepsilon^2 + 0.04\sigma_\varepsilon^2 + 0.01\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.36 + 0.04 + 0.01 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.41\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.41 \times 2 \\
&= 2.82
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.12cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.06cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.12cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad - 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) + 0.01cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) - 0.1cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) - 0.1cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\
&= 0.6\sigma_\varepsilon^2 + 0.12\sigma_\varepsilon^2 - 0.02\sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.6 + 0.12 - 0.02)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.7\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.7 \times 2 \\
&= 1.4
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.12cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.06cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.12cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad - 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) + 0.01cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-5}) - 0.1cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) - 0.1cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\
&= 0.2\sigma_\varepsilon^2 - 0.06\sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.2 - 0.06)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.14\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.14 \times 2 \\
&= 0.28
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.12cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) - 0.06cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-6}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.12cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-6}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad - 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) - 0.02cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-5}) + 0.01cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-6}) - 0.1cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) - 0.1cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-6}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
&= -0.1\sigma_\varepsilon^2 \\
&= -0.1 \times 2 \\
&= -0.2
\end{aligned}$$

7.-  $y_t = 0.8 + 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(1).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(0.8 + 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\
 E(y_t) &= 0.8 + 0.6E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\
 \mu &= 0.8 + 0.6 \times 0 + 0 \\
 \mu &= 0.8
 \end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
 &= E[(y_t - 0.8)(y_{t-k} - 0.8)] \\
 &= E[(0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(0.6\varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k})] \\
 &= E(0.36\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + 0.6\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + 0.6\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
 &= 0.36E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.6E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) + 0.6E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})
 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
 &= 0.36\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (0.36 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 1.36 \times 2 \\
 &= 2.72
 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\
 &= 0.6\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 0.6 \times 2 \\
 &= 1.2
 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= 0.36cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.6cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.6cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$8- y_t = 0.25\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$$

Il s'agit d'un MA(3) sans terme constant.

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}E(y_t) &= E(0.25\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t) \\ E(y_t) &= 0.25E(\varepsilon_{t-1}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}) + 0.3E(\varepsilon_{t-3}) + E(\varepsilon_t) \\ \mu &= 0.25 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.3 \times 0 + 0 \\ \mu &= 0\end{aligned}$$

Ce processus est centré du fait de l'absence du terme constant.

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\ &= E[(y_t - 0)(y_{t-k} - 0)] \\ &= E[(0.25\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t)(0.25\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_{t-k-2} + 0.3\varepsilon_{t-k-3} + \varepsilon_{t-k})] \\ &= E(0.0625\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + 0.05\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} + 0.075\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-3} + 0.25\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + 0.05\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} \\ &\quad + 0.04\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} + 0.06\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-3} + 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} + 0.075\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-1} + 0.06\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-2} \\ &\quad + 0.09\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-3} + 0.3\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k} + 0.25\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + 0.2\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2} + 0.3\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-3} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\ &= 0.0625E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.05E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.075E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-3}) + 0.25E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.05E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.04E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.06E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-3}) + 0.2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.075E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.06E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.09E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k-3}) + 0.3E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.25E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + 0.2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}) + 0.3E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-3}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\ &= 0.0625cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.05cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.075cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-3}) + 0.25cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.05cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.075cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.09cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k-3}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.25cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.0625cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.05cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.075cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.25cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) \\
&\quad + 0.05cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_t) \\
&\quad + 0.075cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-1}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) + 0.09cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_t) \\
&\quad + 0.25cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
&= 0.0625\sigma_\varepsilon^2 + 0.04\sigma_\varepsilon^2 + 0.09\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.0625 + 0.04 + 0.09 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.1925\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 1.1925 \times 2 \\
&= 2.385
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.0625cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.05cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.075cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.25cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.05cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.075cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) + 0.09cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.25cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\
&= 0.25\sigma_\varepsilon^2 + 0.05\sigma_\varepsilon^2 + 0.06\sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.25 + 0.05 + 0.06)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.36\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.36 \times 2 \\
&= 0.72
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 0.0625cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.05cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.075cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) + 0.25cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.05cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.075cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) + 0.09cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-5}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.25cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\
&= 0.2\sigma_\varepsilon^2 + 0.075\sigma_\varepsilon^2 \\
&= (0.2 + 0.075)\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.275\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.275 \times 2 \\
&= 0.55
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= 0.0625cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.05cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) + 0.075cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-6}) + 0.25cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.05cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) + 0.04cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-6}) + 0.2cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.075cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-4}) + 0.06cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-5}) + 0.09cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-6}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-3}; \varepsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.25cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + 0.2cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-6}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
&= 0.3\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 0.3 \times 2 \\
&= 0.6
\end{aligned}$$

9-  $y_t = -1 + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.03\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(2).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
E(y_t) &= E(-1 + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.03\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t) \\
E(y_t) &= -1 + 0.4E(\varepsilon_{t-1}) - 0.03E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t) \\
\mu &= -1 + 0.4 \times 0 - 0.03 \times 0 + 0 \\
\mu &= -1
\end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
&= E[(y_t + 1)(y_{t-k} + 1)] \\
&= E[(0.4\varepsilon_{t-1} - 0.03\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)(0.4\varepsilon_{t-k-1} - 0.03\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k})] \\
&= E(0.16\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} - 0.012\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} + 0.4\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} - 0.012\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} \\
&\quad + 0.0009\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} - 0.03\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} + 0.4\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} - 0.03\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.16E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) - 0.012E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}) + 0.4E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) - 0.012E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1}) \\
&\quad + 0.0009E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}) - 0.03E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k}) + 0.4E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) - 0.03E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\
&= 0.16cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-2}) + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-1}) \\
&\quad + 0.0009cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k-2}) - 0.03cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-k}) + 0.4cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) - 0.03cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-2}) \\
&\quad + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k})
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 0.16cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) - 0.012cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) \\
 &\quad + 0.0009cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) - 0.03cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_t) + 0.4cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) - 0.03cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\
 &= 0.16\sigma_\varepsilon^2 + 0.0009\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (0.16 + 0.0009 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 1.1609\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 1.1609 \times 2 \\
 &= 2.3218
 \end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 0.16cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) \\
 &\quad + 0.0009cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) - 0.03cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-1}) + 0.4cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) - 0.03cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
 &\quad + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\
 &= 0.4\sigma_\varepsilon^2 - 0.012\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (0.4 - 0.012)\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 0.388\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= 0.388 \times 2 \\
 &= 0.776
 \end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= 0.16cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) \\
 &\quad + 0.0009cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) - 0.03cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-2}) + 0.4cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) - 0.03cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) \\
 &\quad + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\
 &= -0.03\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= -0.03 \times 2 \\
 &= -0.06
 \end{aligned}$$

– Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 &= 0.16cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-5}) + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) - 0.012cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-4}) \\
 &\quad + 0.0009cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-5}) - 0.03cov(\varepsilon_{t-2}; \varepsilon_{t-3}) + 0.4cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) - 0.03cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-5}) \\
 &\quad + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

10.  $y_t = -0.5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Il s'agit d'un MA(1).

• **Espérance mathématique de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(-0.5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ E(y_t) &= -0.5 + 0.3E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\ \mu &= -0.5 + 0.3 \times 0 + 0 \\ \mu &= -0.5 \end{aligned}$$

• **Fonction d'autocovariance de  $y_t$  :**

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\ &= E[(y_t + 0.5)(y_{t-k} + 0.5)] \\ &= E[(0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(0.3\varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k})] \\ &= E(0.09\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + 0.3\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + 0.3\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\ &= 0.09E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) + 0.3E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}) + 0.3E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) \\ &= 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k}) \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 0 ou variance :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_t) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\ &= 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_t) \\ &= 0.09\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= (0.09 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \\ &= 1.09\sigma_\varepsilon^2 \\ &= 1.09 \times 2 \\ &= 2.18 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-1}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-1}) \\ &= 0.3\sigma_\varepsilon^2 \\ &= 0.3 \times 2 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-2}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= 0.09cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-4}) + 0.3cov(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-3}) + 0.3cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-4}) + cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-3}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Deuxième partie  
Examens corrigés

ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES  
EXAMEN FINAL  
Durée: 2 heures

**NB:** La justification de la réponse compte pour la moitié de la note.

**Ex. 1 — (4 points)**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Un processus bruit blanc est toujours stationnaire.
2. Tout processus stationnaire est un bruit blanc.
3. Un processus autorégressif est toujours stationnaire.
4. L'autocovariance d'ordre  $k$  est toujours égale à l'autocovariance d'ordre  $-k$  (i.e.  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ ).

**Ex. 2 — (6 points)**

Faire correspondre chacun des processus suivants à une trajectoire de la figure ci-dessous:

1.  $y_t = 0.3\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$
2.  $y_t = 0.2 + y_{t-1} + \epsilon_t$
3.  $y_t = 10 + 0.2y_{t-1} + \epsilon_t$
4.  $y_t = 4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \epsilon_t$

**Ex. 3 — (6 points)**

On considère le processus autorégressif  $y_t$  suivant:

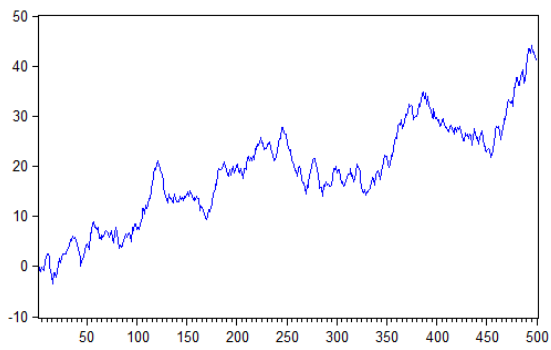
$$y_t = 4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 1)$$

1. Montrer que le processus  $y_t$  est stationnaire.
2. Calculer son espérance mathématique  $E(y_t)$ .
3. Calculer sa fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ . Qu'est ce que vous constatez?

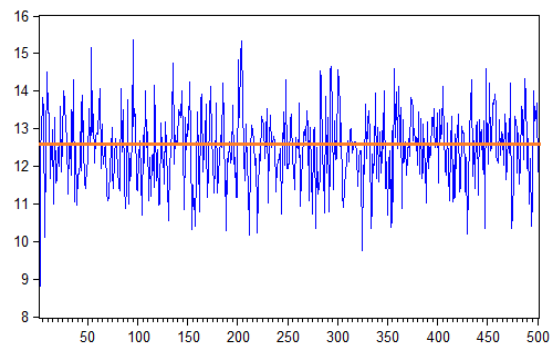
**Ex. 4 — (4 points)**

Montrer que la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  du processus  $y_t$  suivant s'annule à partir de  $k = 3$ :

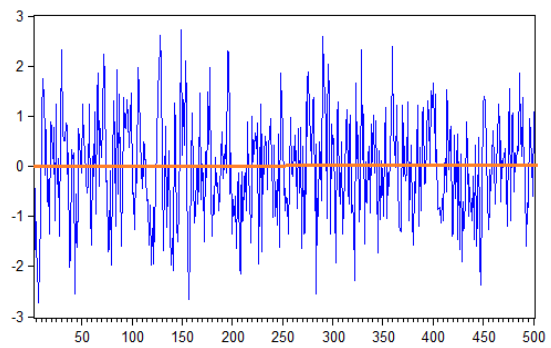
$$y_t = 0.3\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 1)$$



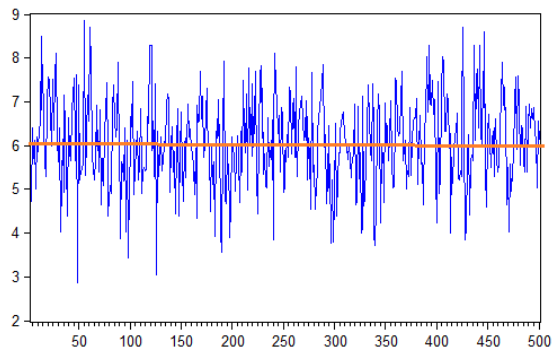
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 1: Trajectoires de quelques processus stochastiques

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES CORRECTION DE L'EXAMEN FINAL

### Ex. 1 —

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Un processus bruit blanc est toujours stationnaire: **Vrai**

Un bruit blanc  $\{\epsilon_t\}_{t=1}^T$  vérifie les conditions suivantes:

1.  $E(\epsilon_t) = 0$ ,  $\forall t = 1, 2, \dots, T$ .
2.  $V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 < \infty$ ,  $\forall t = 1, 2, \dots, T$ .
3.  $cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k}) = 0$ ,  $\forall t = 1, 2, \dots, T$  et  $k \neq 0$ .

Comme les moments  $E(\epsilon_t)$ ,  $V(\epsilon_t)$  et  $cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k})$  sont finis et indépendants de l'indice temporel  $t$  alors un processus bruit blanc est toujours stationnaire.

2. Tout processus stationnaire est un bruit blanc: **Faux**

Le processus autorégressif d'ordre 1 suivant est un contre-exemple:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, \sigma_\epsilon^2)$$

avec  $\alpha_0 \neq 0$  et  $0 < |\alpha_1| < 1$ . Même s'il est stationnaire du fait que  $|\alpha_1| < 1$ , ce processus viole la première condition d'un bruit blanc car:

$$E(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \neq 0$$

Donc tout processus stationnaire n'est pas nécessairement un bruit blanc.

3. Un processus autorégressif est toujours stationnaire: **Faux**

Un processus autorégressif n'est stationnaire que si toutes les racines de l'équation caractéristique associée à son polynôme retard sont supérieures à 1 en module.

4. L'autocovariance d'ordre  $k$  est toujours égale à l'autocovariance d'ordre  $-k$  ( $\gamma_k = \gamma_{-k}$ ): **Faux**

Ceci n'est vrai que sous l'hypothèse de stationnarité du processus en question.

### Ex. 2 —

Faire correspondre chacun des processus suivants à une trajectoire de la figure ci-dessous:

1.  $y_t = 0.3\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$

Il s'agit d'un processus moyenne mobile d'ordre 2 ne contenant pas de terme constant, ce processus est donc centré. Par conséquent, son espérance mathématique est nulle. De plus, un processus moyenne mobile étant toujours stationnaire, sa trajectoire fluctue autour de sa valeur moyenne qui est nulle dans le cas présent. C'est donc la trajectoire de la figure ?? qui correspond à ce processus.

2.  $y_t = 0.2 + y_{t-1} + \epsilon_t$

Il s'agit d'un processus autorégressif d'ordre 1 non stationnaire puisque le coefficient du retard  $y_{t-1}$  est égal à 1. La seule trajectoire mettant clairement en évidence une non stationnarité est celle de la figure ??.

3.  $y_t = 10 + 0.2y_{t-1} + \epsilon_t$

Il s'agit d'un processus autorégressif d'ordre 1 stationnaire puisque le coefficient du retard  $y_{t-1}$  est

inférieur à 1 en valeur absolue. Sa trajectoire fluctue autour de son espérance mathématique qui est donnée par:

$$E(y_t) = \frac{10}{1 - 0.2} = 12.5$$

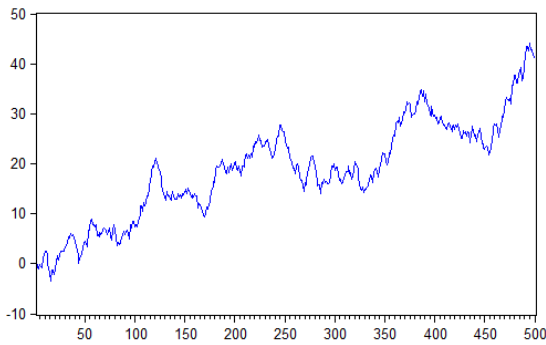
C'est donc la trajectoire de la figure ?? qui correspond à ce processus.

4.  $y_t = 4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \epsilon_t$

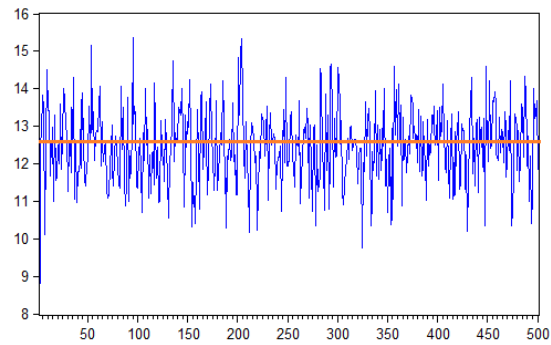
Il s'agit d'un processus autorégressif d'ordre 2 stationnaire puisque les racines de l'équation caractéristique associée sont supérieures à 1 en module (cf. exercice 3). Sa trajectoire fluctue autour de son espérance mathématique qui est donnée par:

$$E(y_t) = \frac{4.2}{1 - 0.2 - 0.1} = 6$$

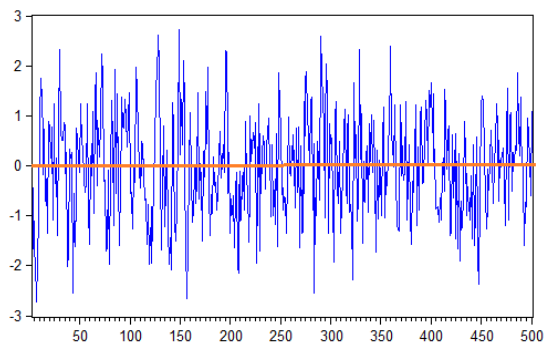
C'est donc la trajectoire de la figure ?? qui correspond à ce processus.



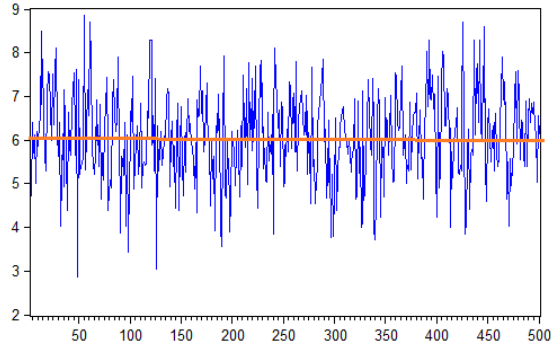
(a)



(b)



(c)



(d)

**Ex. 3** —

On considère le processus autorégressif  $y_t$  suivant:

$$y_t = 4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 1) \tag{1}$$

1. Pour montrer que le processus  $y_t$  - qui est un AR(2) - est stationnaire, il faut d'abord l'exprimer à l'aide d'un polynôme retard et vérifier que les racines de l'équation caractéristique associée sont supérieures à 1 en module. Le processus (??) s'écrit:

$$y_t = 4.2 + 0.2Ly_t + 0.1L^2y_t + \epsilon_t$$

ou encore:

$$y_t (1 - 0.2L - 0.1L^2) = 4.2 + \epsilon_t$$

L'équation caractéristique correspondante est la suivante:

$$1 - 0.2z - 0.1z^2 = 0$$

Son discriminant est donné par:

$$\Delta = (-0.2)^2 - 4(-0.1) = 0.44 > 0$$

On obtient les deux racines réelles suivantes:

$$z_1 = \frac{0.2 - \sqrt{0.44}}{2 \times (-0.1)} = 2.32 \qquad z_2 = \frac{0.2 + \sqrt{0.44}}{2 \times (-0.1)} = -4.32$$

Les deux racines  $z_1$  et  $z_2$  étant supérieures à un 1 en valeur absolue, on conclut que le processus  $y_t$  est stationnaire.

2. Espérance mathématique de  $y_t$ :

Comme le processus  $y_t$  est stationnaire, son espérance mathématique est la même quel que soit l'indice temporel  $t$ , on la note  $\mu$ :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 4.2 + 0.2E(y_{t-1}) + 0.1E(y_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\ \mu &= 4.2 + 0.2\mu + 0.1\mu + 0 \end{aligned}$$

d'où:

$$\mu = \frac{4.2}{1 - 0.2 - 0.1} = 6$$

3. La fonction d'autocovariance  $cov(y_t; y_{t-k})$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ :

Comme le processus  $y_t$  est stationnaire, sa fonction d'autocovariance ne dépend que du décalage temporel  $k$  entre les variables aléatoires  $y_t$  et  $y_{t-k}$  et ceci indépendamment de l'indice temporel  $t$ , elle est notée  $\gamma_k$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_k &\equiv \text{cov}(y_t; y_{t-k}) \\
&= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
&= E\{[0.2(y_{t-1} - \mu) + 0.1(y_{t-2} - \mu) + \epsilon_t][y_{t-k} - \mu]\} \\
&= E[0.2(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu) + 0.1(y_{t-2} - \mu)(y_{t-k} - \mu) + \epsilon_t(y_{t-k} - \mu)] \\
&= 0.2E[(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + 0.1E[(y_{t-2} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + E[\epsilon_t(y_{t-k} - \mu)] \\
&= 0.2\text{cov}(y_{t-1}; y_{t-k}) + 0.1\text{cov}(y_{t-2}; y_{t-k}) + E[\epsilon_t(y_{t-k} - \mu)]
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
E[\epsilon_t(y_{t-k} - \mu)] &= E\{\epsilon_t[0.2(y_{t-k-1} - \mu) + 0.1(y_{t-k-2} - \mu) + \epsilon_{t-k}]\} \\
&= 0.2E[\epsilon_t(y_{t-k-1} - \mu)] + 0.1E[\epsilon_t(y_{t-k-2} - \mu)] + E(\epsilon_t\epsilon_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 = 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$\gamma_k = 0.2\gamma_{k-1} + 0.1\gamma_{k-2} + \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Pour  $k = 0, 1, 2, 3$  et sachant que pour un processus stationnaire on a  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ , l'équation (??) devient:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.2\gamma_1 + 0.1\gamma_2 + 1 \\
\gamma_1 &= 0.2\gamma_0 + 0.1\gamma_1 \\
\gamma_2 &= 0.2\gamma_1 + 0.1\gamma_0 \\
\gamma_3 &= 0.2\gamma_2 + 0.1\gamma_1
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de chacune des équations ci-dessus par  $\gamma_0$ , on obtient les équations de Yule - Walker suivantes:

$$1 = 0.2\rho_1 + 0.1\rho_2 + \frac{1}{\gamma_0} \quad (3)$$

$$\rho_1 = 0.2 + 0.1\rho_1 \quad (4)$$

$$\rho_2 = 0.2\rho_1 + 0.1 \quad (5)$$

$$\rho_3 = 0.2\rho_2 + 0.1\rho_1 \quad (6)$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ .

La résolution de l'équation (??) nous donne  $\rho_1 = 0.22$  que l'on substitue dans l'équation (??) pour obtenir  $\rho_2 = 0.14$ . En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation (??) on obtient  $\rho_3 = 0.05$  et en les remplaçant dans l'équation (??) on obtient  $\gamma_0 = 1.062$ .

Enfin, pour obtenir les valeurs de  $\gamma_k$ , il suffit de multiplier  $\rho_k$  par  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 = 1.062$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 = 0.234$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 = 0.149$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 = 0.053$$

On constate que la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  décroît rapidement avec  $k$ .

**Ex. 4** —

Montrer que la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  du processus  $y_t$  suivant s'annule à partir de  $k = 3$ :

$$y_t = 0.3\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 1)$$

Il s'agit d'un processus moyenne mobile d'ordre 2 sans terme constant, il est donc centré et son espérance mathématique est nulle. Il en résulte que sa fonction d'autocovariance est simplement:

$$\text{cov}(y_t; y_{t-k}) = E(y_t y_{t-k})$$

Calculons d'abord le produit  $y_t y_{t-k}$  et appliquons ensuite l'opérateur espérance mathématique:

$$\begin{aligned} y_t y_{t-k} &= (0.3\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) (0.3\epsilon_{t-k-1} + 0.2\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_{t-k}) \\ &= 0.09\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-1} + 0.06\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-2} + 0.3\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k} \\ &\quad + 0.06\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-1} + 0.04\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-2} + 0.2\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k} \\ &\quad + 0.3\epsilon_t\epsilon_{t-k-1} + 0.2\epsilon_t\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_t\epsilon_{t-k} \\ E(y_t y_{t-k}) &= 0.09E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-1}) + 0.06E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-2}) + 0.3E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.06E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-1}) + 0.04E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-2}) + 0.2E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k}) \\ &\quad + 0.3E(\epsilon_t\epsilon_{t-k-1}) + 0.2E(\epsilon_t\epsilon_{t-k-2}) + E(\epsilon_t\epsilon_{t-k}) \end{aligned}$$

Étudions à présent les cas  $k = 0, 1, 2, 3$ :

- $k = 0$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0 \equiv E(y_t y_t) &= 0.09E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}) + 0.06E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}) + 0.3E(\epsilon_{t-1}\epsilon_t) \\ &\quad + 0.06E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-1}) + 0.04E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2}) + 0.2E(\epsilon_{t-2}\epsilon_t) \\ &\quad + 0.3E(\epsilon_t\epsilon_{t-1}) + 0.2E(\epsilon_t\epsilon_{t-2}) + E(\epsilon_t\epsilon_t) \\ &= 0.09E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}) + 0.04E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2}) + E(\epsilon_t\epsilon_t) \\ &= 0.09\sigma_\epsilon^2 + 0.04\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 \\ &= 1.13 \end{aligned}$$

- $k = 1$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\equiv E(y_t y_{t-1}) = 0.09E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}) + 0.06E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-3}) + 0.3E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.06E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2}) + 0.04E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-3}) + 0.2E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.3E(\epsilon_t\epsilon_{t-2}) + 0.2E(\epsilon_t\epsilon_{t-3}) + E(\epsilon_t\epsilon_{t-1}) \\
&\quad = 0.3E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}) + 0.06E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2}) \\
&\quad = 0.3\sigma_\epsilon^2 + 0.06\sigma_\epsilon^2 \\
&\quad = 0.36
\end{aligned}$$

- $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &\equiv E(y_t y_{t-2}) = 0.09E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-3}) + 0.06E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-4}) + 0.3E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.06E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-3}) + 0.04E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-4}) + 0.2E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.3E(\epsilon_t\epsilon_{t-3}) + 0.2E(\epsilon_t\epsilon_{t-4}) + E(\epsilon_t\epsilon_{t-2}) \\
&\quad = 0.2E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2}) \\
&\quad = 0.2\sigma_\epsilon^2 \\
&\quad = 0.2
\end{aligned}$$

- $k = 3$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &\equiv E(y_t y_{t-3}) = 0.09E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-4}) + 0.06E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-5}) + 0.3E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.06E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-4}) + 0.04E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-5}) + 0.2E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.3E(\epsilon_t\epsilon_{t-4}) + 0.2E(\epsilon_t\epsilon_{t-5}) + E(\epsilon_t\epsilon_{t-3}) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

A partir de  $k = 3$ , il n'est plus possible de rencontrer un produit de chocs contemporains pour que son espérance mathématique soit égale à la variance des chocs. Par conséquent, toutes les espérances, et *in fine* les autocovariances d'ordre  $k \geq 3$ , s'annulent.

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

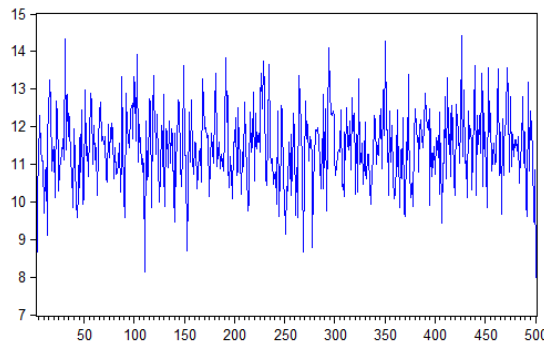
### EXAMEN DE RATRAPAGE - Durée: 2 heures

**NB:** La justification de la réponse compte pour la moitié de la note.

**Ex. 1** —

Répondre aux questions suivantes:

1. Quelle est l'origine de la stationnarité d'un processus moyenne mobile?
2. Quelles sont les différences entre un processus autorégressif et un processus moyenne mobile?
3. Quelle est la différence entre un processus autorégressif stationnaire et un processus bruit blanc?
4. Quelle est - approximativement - l'espérance du processus représenté par la trajectoire ci-dessous?
5. Quelles sont les valeurs des coefficients des équations de Yule - Walker?
6. Dans quels cas l'autocovariance entre deux variables aléatoires est égale à l'espérance de leur produit?



**Ex. 2** —

On considère le processus moyenne mobile  $y_t$  suivant:

$$y_t = 0.2\epsilon_{t-1} + 0.1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 2)$$

1. Ce processus peut-il être non-stationnaire?
2. Donner, sans faire de calculs, son espérance mathématique  $E(y_t)$ .
3. Calculer sa fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ .

**Ex. 3** —

On considère le processus autorégressif  $y_t$  suivant:

$$y_t = 0.3y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 2)$$

1. Montrer que le processus  $y_t$  est stationnaire.
2. Calculer son espérance mathématique  $E(y_t)$ .
3. Calculer sa fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ .

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

### CORRECTION DE L'EXAMEN DE RATRAPAGE

**Ex. 1 — (6 points)**

1. La stationnarité d'un processus moyenne mobile trouve son origine dans celle du bruit blanc. En effet, considérons le modèle moyenne mobile d'ordre  $q$  suivant:

$$y_t = \theta + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \beta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, \sigma_\epsilon^2)$$

Analysons ses conditions de stationnarité:

1. Espérance mathématique de  $y_t$ :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\theta + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \beta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t) \\ &= \theta + \beta_1 \underbrace{E(\epsilon_{t-1})}_0 + \beta_2 \underbrace{E(\epsilon_{t-2})}_0 + \dots + \beta_q \underbrace{E(\epsilon_{t-q})}_0 + \underbrace{E(\epsilon_t)}_0 \\ &= \theta \end{aligned}$$

La première condition de stationnarité d'un processus moyenne mobile est vérifiée grâce la constance (ici nullité) de l'espérance mathématique des chocs qui sont des bruits blancs.

2. Variance de  $y_t$ :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(\theta + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \beta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t) \\ &= \beta_1^2 \underbrace{V(\epsilon_{t-1})}_{\sigma_\epsilon^2} + \beta_2^2 \underbrace{V(\epsilon_{t-2})}_{\sigma_\epsilon^2} + \dots + \beta_q^2 \underbrace{V(\epsilon_{t-q})}_{\sigma_\epsilon^2} + \underbrace{V(\epsilon_t)}_{\sigma_\epsilon^2} + \sum_{i \neq j} \beta_i \beta_j \underbrace{\text{cov}(\epsilon_{t-i}; \epsilon_{t-j})}_0 \\ &= \theta \end{aligned}$$

La deuxième condition de stationnarité d'un processus moyenne mobile est vérifiée grâce la constance de la variance des chocs (chocs homosédastiques) et grâce à la nullité de leur fonction d'autocovariance.

3. Fonction d'autocovariance  $\text{cov}(y_t; y_{t-k})$ :

Supposons, pour simplifier les calculs, que le terme constant  $\theta$  est nul. Dans ce cas, le processus  $y_t$  est centré et la fonction d'autocovariance se réduit à l'espérance mathématique du produit des variables aléatoires concernées ( $\text{cov}(y_t; y_{t-k}) = E(y_t y_{t-k})$ ):

$$\begin{aligned} y_t y_{t-k} &= (\beta_1 \epsilon_{t-1} + \beta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t)(\beta_1 \epsilon_{t-k-1} + \beta_2 \epsilon_{t-k-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-k-q} + \epsilon_{t-k}) \\ &= \beta_1 \epsilon_{t-1} (\beta_1 \epsilon_{t-k-1} + \beta_2 \epsilon_{t-k-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-k-q} + \epsilon_{t-k}) \\ &\quad + \beta_2 \epsilon_{t-2} (\beta_1 \epsilon_{t-k-1} + \beta_2 \epsilon_{t-k-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-k-q} + \epsilon_{t-k}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \beta_q \epsilon_{t-q} (\beta_1 \epsilon_{t-k-1} + \beta_2 \epsilon_{t-k-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-k-q} + \epsilon_{t-k}) \\ &\quad + \epsilon_t (\beta_1 \epsilon_{t-k-1} + \beta_2 \epsilon_{t-k-2} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-k-q} + \epsilon_{t-k}) \end{aligned}$$

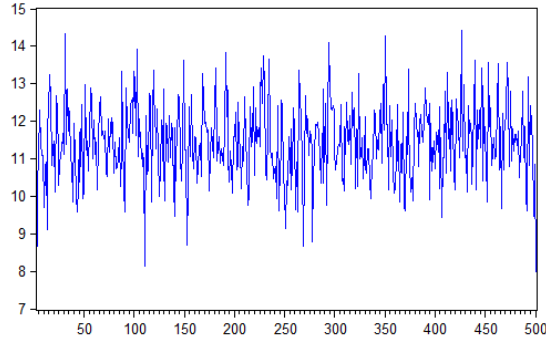
$$\begin{aligned}
&= \beta_1^2 \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k-1} + \beta_1 \beta_2 \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k-2} + \cdots + \beta_1 \beta_q \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k-q} + \beta_1 \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k} \\
&+ \beta_2 \beta_1 \epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k-1} + \beta_2^2 \epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k-2} + \cdots + \beta_2 \beta_q \epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k-q} + \beta_2 \epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k} \\
&+ \cdots \\
&+ \beta_q \beta_1 \epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k-1} + \beta_q \beta_2 \epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k-2} + \cdots + \beta_q^2 \epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k-q} + \beta_q \epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k} \\
&+ \beta_1 \epsilon_t \epsilon_{t-k-1} + \beta_2 \epsilon_t \epsilon_{t-k-2} + \cdots + \beta_q \epsilon_t \epsilon_{t-k-q} + \epsilon_t \epsilon_{t-k} \\
E(y_t y_{t-k}) &= \beta_1^2 E(\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k-1}) + \beta_1 \beta_2 E(\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k-2}) + \cdots + \beta_1 \beta_q E(\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k-q}) + \beta_1 E(\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-k}) \\
&+ \beta_2 \beta_1 E(\epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k-1}) + \beta_2^2 E(\epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k-2}) + \cdots + \beta_2 \beta_q E(\epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k-q}) + \beta_2 E(\epsilon_{t-2} \epsilon_{t-k}) \\
&+ \cdots \\
&+ \beta_q \beta_1 E(\epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k-1}) + \beta_q \beta_2 E(\epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k-2}) + \cdots + \beta_q^2 E(\epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k-q}) + \beta_q E(\epsilon_{t-q} \epsilon_{t-k}) \\
&+ \beta_1 E(\epsilon_t \epsilon_{t-k-1}) + \beta_2 E(\epsilon_t \epsilon_{t-k-2}) + \cdots + \beta_q E(\epsilon_t \epsilon_{t-k-q}) + E(\epsilon_t \epsilon_{t-k}) \tag{1}
\end{aligned}$$

Les espérances mathématiques du côté droit de l'égalité (1) sont ou bien nulles ou bien égales à  $\sigma_\epsilon^2$ . Dans tous les cas, la fonction d'autocovariance est indépendante de l'indice temporelle  $t$ .

On remarque donc aisément que la stationnarité d'un processus moyenne mobile est directement liée à celle des bruits blancs qui rentrent dans sa composition.

2. On peut noter au moins trois différences majeures entre un processus autorégressif et un processus moyenne mobile, à savoir:
  - Un processus autorégressif n'est stationnaire que lorsque toutes les racines de l'équation caractéristique associée à son polynôme retard sont supérieures à 1 en module tandis qu'un processus moyenne mobile est toujours stationnaire.
  - Les variables explicatives d'un processus autorégressif sont les valeurs retardées de la variable expliquée tandis que dans un processus moyenne mobile, les variables explicatives sont les chocs passés.
  - La fonction d'autocovariance d'un processus autorégressif diminue rapidement en valeur absolue mais sans nécessairement s'annuler. Par contre, celle d'un processus moyenne mobile diminue en valeur absolue et s'annule dès que son ordre devient supérieur ou égal à l'ordre du processus lui-même.
3. L'espérance et la fonction d'autocovariance d'un bruit blanc sont toujours nulles ce qui n'est pas nécessairement le cas pour un processus autorégressif.
4. La trajectoire ci-dessous fluctue autour d'une valeur moyenne comprise entre 11 et 12. On peut donc dire que l'espérance mathématique du processus représenté par cette trajectoire est approximativement égale à 11.5.
5. Les coefficients des équations de Yule - Walker sont simplement les coefficients des variables explicatives du processus autorégressif correspondant.
6. L'autocovariance entre deux variables aléatoires est égale à l'espérance de leur produit si au-moins l'une d'entre-elles est centrée, c'est à dire d'espérance nulle:

$$cov(y_t; y_{t-k}) = E(y_t y_{t-k}) - E(y_t) E(y_{t-k}) = E(y_t y_{t-k})$$



**Ex. 2 — (6 points)**

On considère le processus moyenne mobile  $y_t$  suivant:

$$y_t = 0.2\epsilon_{t-1} + 0.1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 2) \quad (2)$$

1. Un processus moyenne mobile est, par construction, toujours stationnaire pourvu que la somme des carrés de ses coefficients soit convergente.
2. Le processus (2) est centré puisqu'il est sans terme constant. Son espérance mathématique est donc nulle:

$$E(y_t) = 0$$

3. Comme le processus (2) est centré, sa fonction d'autocovariance se calcule comme suit:

$$\begin{aligned}
cov(y_t; y_{t-k}) &= E(y_t y_{t-k}) \\
&= E[(0.2\epsilon_{t-1} + 0.1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t)(0.2\epsilon_{t-k-1} + 0.1\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_{t-k})] \\
&= E[0.2\epsilon_{t-1}(0.2\epsilon_{t-k-1} + 0.1\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.1\epsilon_{t-2}(0.2\epsilon_{t-k-1} + 0.1\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_{t-k}) \\
&\quad + \epsilon_t(0.2\epsilon_{t-k-1} + 0.1\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_{t-k})] \\
&= E(0.04\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-1} + 0.02\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-2} + 0.2\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k} \\
&\quad + 0.02\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-1} + 0.01\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-2} + 0.1\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k} \\
&\quad + 0.2\epsilon_t\epsilon_{t-k-1} + 0.1\epsilon_t\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_t\epsilon_{t-k}) \\
&= 0.04E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-1}) + 0.02E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-2}) + 0.2E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.02E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-1}) + 0.01E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-2}) + 0.1E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.2E(\epsilon_t\epsilon_{t-k-1}) + 0.1E(\epsilon_t\epsilon_{t-k-2}) + E(\epsilon_t\epsilon_{t-k}) \\
&= 0.04cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-k-1}) + 0.02cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-k-2}) + 0.2cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.02cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-k-1}) + 0.01cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-k-2}) + 0.1cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-k}) \\
&\quad + 0.2cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k-1}) + 0.1cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k-2}) + cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k})
\end{aligned}$$

Notons  $\gamma_k \equiv \text{cov}(y_t; y_{t-k})$  et étudions à présent les cas  $k = 0, 1, 2, 3$ :

- $k = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 0.04\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-1}) + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-2}) + 0.2\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_t) \\
 &\quad + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-1}) + 0.01\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_t) \\
 &\quad + 0.2\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-1}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-2}) + \text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_t) \\
 &= 0.04\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-1}) + 0.01\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) + \text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_t) \\
 &= 0.04\sigma_\epsilon^2 + 0.01\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 \\
 &= 2.1
 \end{aligned}$$

- $k = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 0.04\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-2}) + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-3}) + 0.2\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-1}) \\
 &\quad + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) + 0.01\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-3}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-1}) \\
 &\quad + 0.2\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-2}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-3}) + \text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-1}) \\
 &= 0.2\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-1}) + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) \\
 &= 0.2\sigma_\epsilon^2 + 0.02\sigma_\epsilon^2 \\
 &= 0.44
 \end{aligned}$$

- $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= 0.04\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-3}) + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-4}) + 0.2\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-2}) \\
 &\quad + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-3}) + 0.01\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-4}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) \\
 &\quad + 0.2\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-3}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-4}) + \text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-2}) \\
 &= 0.1\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) \\
 &= 0.1\sigma_\epsilon^2 \\
 &= 0.2
 \end{aligned}$$

- $k = 3$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 &= 0.04\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-4}) + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-5}) + 0.2\text{cov}(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-3}) \\
 &\quad + 0.02\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-4}) + 0.01\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-5}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-3}) \\
 &\quad + 0.2\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-4}) + 0.1\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-5}) + \text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-3}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

**Ex. 3** — (8 points)

On considère le processus autorégressif  $y_t$  suivant:

$$y_t = 0.3y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim BB(0, 2) \quad (3)$$

1. Pour montrer que le processus  $y_t$  - qui est un AR(2) - est stationnaire, il faut d'abord l'exprimer à l'aide d'un polynôme retard et vérifier que les racines de l'équation caractéristique associée sont supérieures à 1 en module. Le processus (3) s'écrit:

$$y_t = 0.3Ly_t + 0.2L^2y_t + \epsilon_t$$

ou encore:

$$y_t (1 - 0.3L - 0.2L^2) = \epsilon_t$$

L'équation caractéristique correspondante est la suivante:

$$1 - 0.3z - 0.2z^2 = 0$$

Son discriminant est donné par:

$$\Delta = (-0.3)^2 - 4(-0.2) = 0.89 > 0$$

On obtient les deux racines réelles suivantes:

$$z_1 = \frac{0.3 - \sqrt{0.89}}{2 \times (-0.2)} = 1.61 \qquad z_2 = \frac{0.3 + \sqrt{0.89}}{2 \times (-0.2)} = -3.11$$

Les deux racines  $z_1$  et  $z_2$  étant supérieures à un 1 en valeur absolue, on conclut que le processus  $y_t$  est stationnaire.

2. Espérance mathématique de  $y_t$ :

Comme le processus  $y_t$  est stationnaire, son espérance mathématique est la même quel que soit l'indice temporel  $t$ , on la note  $\mu$ :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(0.3y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 0.3E(y_{t-1}) + 0.2E(y_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\ \mu &= 0.3\mu + 0.2\mu + 0 \end{aligned}$$

d'où:

$$\mu = 0$$

C'est un résultat qui était attendu puisque le processus est sans terme constant.

3. La fonction d'autocovariance  $cov(y_t; y_{t-k})$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ :

Comme le processus  $y_t$  est stationnaire, sa fonction d'autocovariance ne dépend que du décalage temporel  $k$  entre les variables aléatoires  $y_t$  et  $y_{t-k}$  et ceci indépendamment de l'indice temporel  $t$ , elle est notée  $\gamma_k$ . De plus, le processus étant centré, la fonction d'autocovariance est égale à l'espérance

du produit des variables aléatoires concernées:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &\equiv \text{cov}(y_t; y_{t-k}) \\
&= E(y_t y_{t-k}) \\
&= E[(0.3y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \epsilon_t)y_{t-k}] \\
&= E(0.3y_{t-1}y_{t-k} + 0.2y_{t-2}y_{t-k} + \epsilon_t y_{t-k}) \\
&= 0.3E(y_{t-1}y_{t-k}) + 0.2E(y_{t-2}y_{t-k}) + E(\epsilon_t y_{t-k}) \\
&= 0.3\text{cov}(y_{t-1}; y_{t-k}) + 0.2\text{cov}(y_{t-2}; y_{t-k}) + E(\epsilon_t y_{t-k})
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
E(\epsilon_t y_{t-k}) &= E[\epsilon_t(0.3y_{t-k-1} + 0.2y_{t-k-2} + \epsilon_{t-k})] \\
&= 0.3E(\epsilon_t y_{t-k-1}) + 0.2E(\epsilon_t y_{t-k-2}) + E(\epsilon_t \epsilon_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 = 2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$\gamma_k = 0.3\gamma_{k-1} + 0.2\gamma_{k-2} + \begin{cases} 2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Pour  $k = 0, 1, 2, 3$  et sachant que pour un processus stationnaire on a  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ , l'équation (4) devient:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.3\gamma_1 + 0.2\gamma_2 + 2 \\
\gamma_1 &= 0.3\gamma_0 + 0.2\gamma_1 \\
\gamma_2 &= 0.3\gamma_1 + 0.2\gamma_0 \\
\gamma_3 &= 0.3\gamma_2 + 0.2\gamma_1
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de chacune des équations ci-dessus par  $\gamma_0$ , on obtient les équations de Yule - Walker suivantes:

$$1 = 0.3\rho_1 + 0.2\rho_2 + \frac{2}{\gamma_0} \quad (5)$$

$$\rho_1 = 0.3 + 0.2\rho_1 \quad (6)$$

$$\rho_2 = 0.3\rho_1 + 0.2 \quad (7)$$

$$\rho_3 = 0.3\rho_2 + 0.2\rho_1 \quad (8)$$

avec  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ .

La résolution de l'équation (6) nous donne  $\rho_1 = 0.375$  que l'on substitue dans l'équation (7) pour obtenir  $\rho_2 = 0.3125$ . En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation (8) on obtient  $\rho_3 = 0.1688$  et en les remplaçant dans l'équation (5) on obtient  $\gamma_0 = 2.406$ .

Enfin, pour obtenir les valeurs de  $\gamma_k$ , il suffit de multiplier  $\rho_k$  par  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 = 2.406$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 = 0.90$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 = 0.75$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \gamma_0 = 0.41$$

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

### EXAMEN FINAL

Durée : 2 heures

**NB** : La justification de la réponse compte pour la moitié de la note.

**Ex. 1** — (4 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Une fonction d'autocovariance  $cov(y_t; y_{t-k})$  qui varie avec le décalage temporel  $k$  séparant  $y_t$  de  $y_{t-k}$  est le signe d'une non-stationnarité du processus  $y_t$ .
2. L'espérance mathématique d'un modèle autorégressif stationnaire non centré est égale à son terme constant.
3. La modification de la constante d'un modèle peut altérer toutes ses propriétés statistiques.
4. Tout processus autorégressif admet une représentation moyenne mobile.

**Solution (Ex. 1)** —

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. **Faux** : Etant une fonction du décalage temporel  $k$  séparant  $y_t$  de  $y_{t-k}$ , il est tout a fait naturel que l'autocovariance varie avec  $k$ . Mais ceci n'est pas le signe d'une non-stationnarité du processus  $y_t$  puisque nous ne savons pas si cette fonction varie également en fonction de l'indice temporel  $t$  auquel cas il n'y aurait plus de doute sur la non-stationnarité du processus en question.
2. **Faux** : L'espérance mathématique d'un modèle autorégressif stationnaire non centré est différente de son terme constant. Il suffit pour s'en persuader de prendre l'exemple du modèle AR(1) général suivant :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0; \sigma_\varepsilon^2)$$

avec  $|\alpha_1| < 1$  pour garantir la stationnarité de  $y_t$ . Sous cette condition, l'espérance mathématique du processus  $y_t$  est une constante  $\mu$  :

$$E(y_t) = E(\theta + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = \theta + \alpha_1 E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = \theta + \alpha_1 \mu + 0$$

$$\mu = \frac{\theta}{1 - \alpha_1}$$

Un terme constant nul ( $\theta = 0$ ) implique que l'espérance mathématique du processus l'est également ( $\mu = 0$ ). Cette égalité entre le terme constant et l'espérance mathématique du processus ( $\mu = \theta = 0$ ) n'est vérifiée que dans l'unique cas d'un processus centré. Dans le cas d'un processus non centré ( $\mu \neq 0$ ), on aura  $\frac{\theta}{1-\alpha_1} \neq 0$  et donc nécessairement  $\theta \neq 0$ . Il en résulte que l'espérance mathématique du processus  $y_t$  n'est pas égale au terme constant  $\theta$  mais plutôt égale à  $\frac{\theta}{1-\alpha_1}$ .

3. **Faux** : La modification de la constante d'un modèle ne peut altérer que son espérance mathématique sans affecter sa variance ni sa fonction d'autocovariance. Vérifions ceci sur le modèle ARMA(p;q)

général<sup>1</sup> suivant :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0; \sigma_\varepsilon^2)$$

que l'on peut écrire de manière plus abrégée comme suit :

$$y_t = \theta + f_t(\bullet)$$

avec  $f_t(\bullet) \equiv \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$ .

Les propriétés statistiques de ce modèle sont les suivantes :

– Espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E[\theta + f_t(\bullet)] \\ &= \theta + E[f_t(\bullet)] \end{aligned} \tag{1}$$

– Variance :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V[\theta + f_t(\bullet)] \\ &= V[f_t(\bullet)] \end{aligned} \tag{2}$$

– Fonction d'autocovariance :

$$cov(y_t; y_{t-k}) = E(y_t^c y_{t-k}^c)$$

où  $y_t^c \equiv y_t - E(y_t)$  et  $y_{t-k}^c \equiv y_{t-k} - E(y_{t-k})$  désignent respectivement les versions centrées des processus  $y_t$  et  $y_{t-k}$ . Or, un processus centré s'obtient en annulant simplement le terme constant  $\theta$ , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} y_t^c &= f_t(\bullet) \\ y_{t-k}^c &= f_{t-k}(\bullet) \end{aligned}$$

d'où :

$$cov(y_t; y_{t-k}) = E[f_t(\bullet) f_{t-k}(\bullet)] \tag{3}$$

D'après les expressions (1), (2) et (3), il ressort que seule l'espérance mathématique dépend explicitement du terme constant  $\theta$  et qu'elle est donc la seule susceptible d'être altérée en cas de modification de cette constante.

4. **Faux** : En vertu du théorème de Wold, tout processus stationnaire peut s'écrire sous forme d'une somme pondérée des chocs présent et passés, c'est à dire admettre une représentation moyenne mobile. En particulier, un processus autorégressif a une représentation moyenne mobile à condition d'être stationnaire.

---

1. On retrouve aisément les mêmes conclusions pour les cas particuliers des modèles AR(p) et MA(q).

**Ex. 2 — (6 points)**

Faire correspondre chacun des modèles MA(2) suivants à une trajectoire de la figure ci-dessous :

1.  $y_t = 2 + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 1)$
2.  $y_t = 0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 1)$
3.  $y_t = 2 + 0.7\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 4)$
4.  $y_t = 0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 4)$

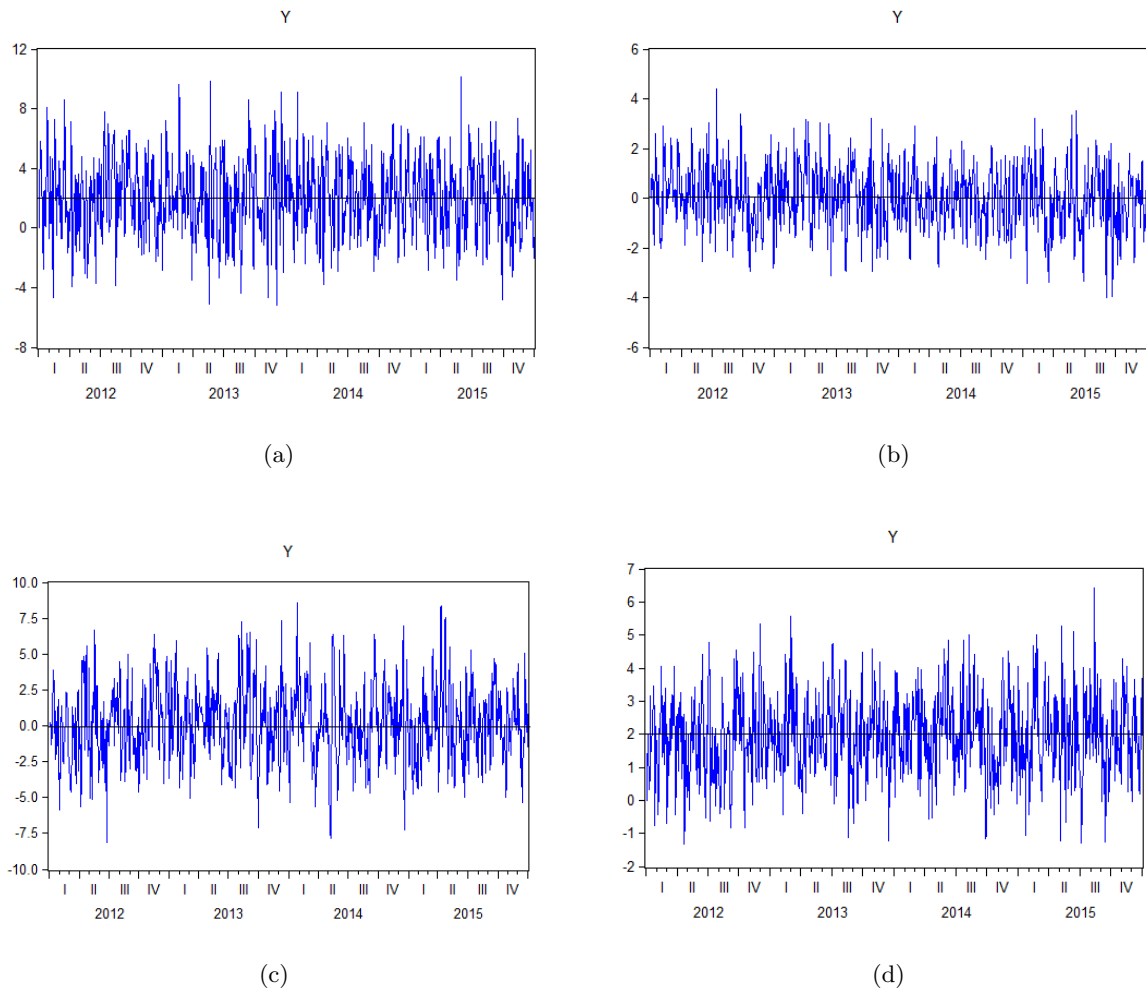


FIGURE 1 – Trajectoires de quelques processus Moyenne Mobile d'ordre 2

**Solution (Ex. 2) —**

Examinons d'abord l'allure de chacune des trajectoires de la figure 1. D'une part, il apparaît clairement que les trajectoires (a) et (d) fluctuent autour d'une valeur moyenne voisine de 2 avec une volatilité plus forte pour la première que pour la deuxième. D'autre part, les trajectoires (b) et (d) fluctuent au voisinage de 0 avec une volatilité plus forte pour la dernière que pour la première. Il faut donc calculer l'espérance mathématique et la variance de chacun des modèles pour trouver les trajectoires correspondantes.

1.  $y_t = 2 + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 1)$

– Espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(2 + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 2 + 0.5E(\epsilon_{t-1}) + 0.1E(\epsilon_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\ &= 2 + 0.5 \times 0 + 0.1 \times 0 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

– Variance :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(2 + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= (0.5)^2V(\epsilon_{t-1}) + (0.1)^2V(\epsilon_{t-2}) + V(\epsilon_t) \\ &= 0.25 \times 1 + 0.01 \times 1 + 1 \\ &= 1.26 \end{aligned}$$

2.  $y_t = 0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 1)$

– Espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 0.8E(\epsilon_{t-1}) + 0.3E(\epsilon_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\ &= 0.8 \times 0 + 0.3 \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

– Variance :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= (0.8)^2V(\epsilon_{t-1}) + (0.3)^2V(\epsilon_{t-2}) + V(\epsilon_t) \\ &= 0.64 \times 1 + 0.09 \times 1 + 1 \\ &= 1.73 \end{aligned}$$

3.  $y_t = 2 + 0.7\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 4)$

– Espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(2 + 0.7\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 2 + 0.7E(\epsilon_{t-1}) + 0.2E(\epsilon_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\ &= 2 + 0.7 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

– Variance :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(2 + 0.7\epsilon_{t-1} + 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= (0.7)^2 V(\epsilon_{t-1}) + (0.2)^2 V(\epsilon_{t-2}) + V(\epsilon_t) \\ &= 0.49 \times 4 + 0.04 \times 4 + 4 \\ &= 6.12 \end{aligned}$$

4.  $y_t = 0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 4)$

– Espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 0.8E(\epsilon_{t-1}) + 0.3E(\epsilon_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\ &= 0.8 \times 0 + 0.3 \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

– Variance :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(0.8\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= (0.8)^2 V(\epsilon_{t-1}) + (0.3)^2 V(\epsilon_{t-2}) + V(\epsilon_t) \\ &= 0.64 \times 4 + 0.09 \times 4 + 4 \\ &= 6.92 \end{aligned}$$

A l'issue de ces calculs, on constate que les espérances mathématiques du premier et du troisième modèles sont toutes les deux égales à 2 et que leurs variances sont égales à 1.26 et à 6.12 respectivement. Par conséquent, le premier modèle correspond à la trajectoire (d) et le troisième modèle à la trajectoire (a). En revanche, les espérances mathématiques du deuxième et du quatrième modèles sont nulles et leurs variances respectives sont de 1.73 et de 6.92. On conclut que le deuxième modèle est associé à la trajectoire (b) et le quatrième modèle à la trajectoire (c).

**Ex. 3 — (6 points)**

On considère le modèle autorégressif  $y_t$  suivant :

$$y_t = 3 + 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0; 2)$$

1. Vérifier la stationnarité de  $y_t$ .
2. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$ .
3. Ecrire les équations de Yule-Walker relatives à ce modèle.
4. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$  et conclure.

**Solution (Ex. 3) —**

Soit le modèle autorégressif  $y_t$  suivant :

$$y_t = 3 + 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0; 2)$$

Il s'agit d'un modèle autorégressif d'ordre 2.

1. Stationnarité de  $y_t$  :

La stationnarité de  $y_t$  dépend des valeurs absolues des racines de l'équation caractéristique associée à ce modèle. Ecrivons-le d'abord sous forme polynomiale à l'aide de l'opérateur retard  $L$  :

$$y_t = 3 + 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$y_t = 3 + 0.7Ly_t - 0.1L^2y_t + \epsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.7L + 0.1L^2) = 3 + \epsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = 3 + \epsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.7L + 0.1L^2$  le polynôme retard associé au modèle. L'équation caractéristique associée à ce modèle est donc :

$$0.1z^2 - 0.7z + 1 = 0$$

ou encore

$$z^2 - 7z + 10 = 0$$

son discriminant est  $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9 > 0$ , l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{7 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2 \qquad z_2 = \frac{7 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 5$$

Les deux racines de l'équation caractéristique étant supérieures à l'unité en valeurs absolues, on conclut que le modèle est stationnaire.

2. Espérance mathématique de  $y_t$  :

L'une des implications de la stationnarité de  $y_t$  est la constance de son espérance mathématique  $E(y_t)$  (que l'on notera  $\mu$  par la suite). Calculons sa valeur :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(3 + 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 3 + 0.7E(y_{t-1}) - 0.1E(y_{t-2}) + E(\epsilon_t) \end{aligned}$$

$$\mu = 3 + 0.7\mu - 0.1\mu + 0$$

$$\mu = \frac{3}{1 - 0.7 + 0.1}$$

$$\mu = 7.5$$

3. Equations de Yule-Walker relatives à ce modèle :

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

or

$$y_t - \mu = 0.7(y_{t-1} - \mu) - 0.1(y_{t-2} - \mu) + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(0.7(y_{t-1} - \mu) - 0.1(y_{t-2} - \mu) + \epsilon_t)(y_{t-k} - \mu)] \\ &= E[0.7(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu) - 0.1(y_{t-2} - \mu)(y_{t-k} - \mu) + \epsilon_t(y_{t-k} - \mu)] \\ &= 0.7E[(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] - 0.1E[(y_{t-2} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + E[\epsilon_t(y_{t-k} - \mu)] \\ &= 0.7\gamma_{k-1} - 0.1\gamma_{k-2} + E[\epsilon_t(y_{t-k} - \mu)]\end{aligned}$$

or

$$y_{t-k} - \mu = 0.7(y_{t-k-1} - \mu) - 0.1(y_{t-k-2} - \mu) + \epsilon_{t-k}$$

$$\begin{aligned}E[\epsilon_t(y_{t-k} - \mu)] &= E[\epsilon_t(0.7(y_{t-k-1} - \mu) - 0.1(y_{t-k-2} - \mu) + \epsilon_{t-k})] \\ &= E[0.7\epsilon_t(y_{t-k-1} - \mu) - 0.1\epsilon_t(y_{t-k-2} - \mu) + \epsilon_t\epsilon_{t-k}] \\ &= 0.7E[\epsilon_t(y_{t-k-1} - \mu)] - 0.1E[\epsilon_t(y_{t-k-2} - \mu)] + E[\epsilon_t\epsilon_{t-k}] \\ &= 0.7\underbrace{\text{cov}(\epsilon_t; y_{t-k-1})}_0 - 0.1\underbrace{\text{cov}(\epsilon_t; y_{t-k-2})}_0 + \text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-k}) \\ &= \text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-k})\end{aligned}$$

avec  $\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-k}) = \sigma_\epsilon^2$  si  $k = 0$  et  $\text{cov}(\epsilon_t; \epsilon_{t-k}) = 0$  si  $k > 0$ .

$$\gamma_k = \begin{cases} 0.7\gamma_{k-1} - 0.1\gamma_{k-2} + \sigma_\epsilon^2 & \text{si } k = 0 \\ 0.7\gamma_{k-1} - 0.1\gamma_{k-2} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 0.7\rho_{k-1} - 0.1\rho_{k-2} + \frac{\sigma_\epsilon^2}{\gamma_0} & \text{si } k = 0 \\ 0.7\rho_{k-1} - 0.1\rho_{k-2} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

4. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$  et conclure.

$$1 = 0.7\rho_1 - 0.1\rho_2 + \frac{\sigma_\epsilon^2}{\gamma_0} \quad (4)$$

$$\rho_1 = 0.7 - 0.1\rho_1 \quad (5)$$

$$\rho_2 = 0.7\rho_1 - 0.1 \quad (6)$$

$$\rho_3 = 0.7\rho_2 - 0.1\rho_1 \quad (7)$$

$$\rho_1 = 0.7 - 0.1\rho_1 \approx 0.6364 \quad (8)$$

$$\rho_2 = 0.7\rho_1 - 0.1 \approx 0.3455 \quad (9)$$

$$\rho_3 = 0.7\rho_2 - 0.1\rho_1 \approx 0.1782 \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_\epsilon^2}{\gamma_0} = 1 - 0.7\rho_1 + 0.1\rho_2 \approx 0.5891 \quad (11)$$

$$\gamma_0 \approx 1.6975 \quad (12)$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \times \gamma_0 \approx \quad (13)$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \times \gamma_0 \approx \quad (14)$$

$$\gamma_3 = \rho_3 \times \gamma_0 \approx \quad (15)$$

**Ex. 4 — (4 points)**

Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  du processus  $y_t$  suivant :

$$y_t = 4 + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0; 2)$$

**Solution (Ex. 4) —**

Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  du processus  $y_t$  suivant :

$$y_t = 4 + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0; 2)$$

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

avec  $\mu \equiv E(y_t)$ .

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(4 + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t) \\ &= 4 + 0.5E(\epsilon_{t-1}) + 0.3E(\epsilon_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\ &= 4 + 0.5 \times 0 + 0.3 \times 0 + 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$y_t - \mu = 0.5\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$$

$$y_{t-k} - \mu = 0.5\epsilon_{t-k-1} + 0.3\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_{t-k}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E[(0.5\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2} + \epsilon_t)(0.5\epsilon_{t-k-1} + 0.3\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_{t-k})] \\
&= E(0.25\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-1} + 0.15\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-2} + 0.5\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k} + 0.15\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-1} \\
&\quad + 0.09\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-2} + 0.3\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k} + 0.5\epsilon_t\epsilon_{t-k-1} + 0.3\epsilon_t\epsilon_{t-k-2} + \epsilon_t\epsilon_{t-k}) \\
&= 0.25E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-1}) + 0.15E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k-2}) + 0.5E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-k}) + 0.15E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-1}) \\
&\quad + 0.09E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k-2}) + 0.3E(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-k}) + 0.5E(\epsilon_t\epsilon_{t-k-1}) + 0.3E(\epsilon_t\epsilon_{t-k-2}) + E(\epsilon_t\epsilon_{t-k}) \\
&= 0.25cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-k-1}) + 0.15cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-k-2}) + 0.5cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-k}) + 0.15cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-k-1}) \\
&\quad + 0.09cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-k-2}) + 0.3cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-k}) + 0.5cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k-1}) + 0.3cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k-2}) + cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.25cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-1}) + 0.15cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-2}) + 0.5cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_t) + 0.15cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-1}) \\
&\quad + 0.09cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) + 0.3cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_t) + 0.5cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-1}) + 0.3cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-2}) + cov(\epsilon_t; \epsilon_t) \\
&= 0.25\sigma_\epsilon^2 + 0.09\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 \\
&= 0.25 \times 2 + 0.09 \times 2 + 2 \\
&= 2.68
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.25cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-2}) + 0.15cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-3}) + 0.5cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-1}) + 0.15cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) \\
&\quad + 0.09cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-3}) + 0.3cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-1}) + 0.5cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-2}) + 0.3cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-3}) + cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-1}) \\
&= 0.5\sigma_\epsilon^2 + 0.15\sigma_\epsilon^2 \\
&= 0.5 \times 2 + 0.15 \times 2 \\
&= 1.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 0.25cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-3}) + 0.15cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-4}) + 0.5cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-2}) + 0.15cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-3}) \\
&\quad + 0.09cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-4}) + 0.3cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-2}) + 0.5cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-3}) + 0.3cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-4}) + cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-2}) \\
&= 0.3\sigma_\epsilon^2 \\
&= 0.3 \times 2 \\
&= 0.6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= 0.25cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-4}) + 0.15cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-5}) + 0.5cov(\epsilon_{t-1}; \epsilon_{t-3}) + 0.15cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-4}) \\
&\quad + 0.09cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-5}) + 0.3cov(\epsilon_{t-2}; \epsilon_{t-3}) + 0.5cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-4}) + 0.3cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-5}) + cov(\epsilon_t; \epsilon_{t-3}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES  
EXAMEN DE RATRAPAGE  
Durée: 1 heure

**Ex. 1** —

On considère le modèle autorégressif  $y_t$  suivant:

$$y_t = -0.6y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0;1)$$

1. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$ .
2. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ .

**Ex. 2** —

Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  du processus  $y_t$  suivant pour  $k = 0, 1, 2, 3$ :

$$y_t = -0.4 + 0.8\epsilon_{t-1} - 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0;1)$$

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

### EXAMEN FINAL

Durée : 2 heures

**NB** : La justification de la réponse compte pour la moitié de la note.

#### Ex. 1 — (4 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction d'autocovariance entre deux processus stochastiques à deux instants différents  $s$  et  $t$  est toujours nulle (indication :  $cov(y_s; y_t)$  et  $cov(\varepsilon_s; y_t)$ ).
2. La fonction d'autocovariance entre deux processus stochastiques n'est pas influencée par l'unité de mesure.
3. Tout processus stochastique stationnaire est constant et tout processus constant est stationnaire.
4. Une fonction d'autocorrélation est comprise entre 0 et 1.

#### Solution (Ex. 1) —

1. **Faux** : La fonction d'autocovariance entre deux processus stochastiques à deux instants différents  $s$  et  $t$  n'est pas toujours nulle.

Exemples :

- Supposons que  $y_s$  et  $y_t$  soient les réalisations d'un processus autorégressif à deux instants  $s$  et  $t$ . Pour des instants  $s$  et  $t$  assez proches, la covariance  $cov(y_s; y_t)$  n'est pas nulle, elle peut même être très importante. Par contre, pour des instants  $s$  et  $t$  suffisamment éloignés, cette covariance peut s'affaiblir mais sans s'annuler.
- Supposons que  $\varepsilon_s$  et  $y_t$  soient les réalisations respectives d'un choc à l'instant  $s$  et d'un processus stochastique à l'instant  $t$ . Selon que le choc  $\varepsilon_s$  est intervenu avant, après ou en même temps que le processus  $y_t$ , la covariance  $cov(y_s; y_t)$  peut être nulle comme elle peut ne pas l'être.

**Conclusion** : La fonction d'autocovariance entre deux processus stochastiques à deux instants différents  $s$  et  $t$  n'est pas toujours nulle

2. **Faux** : La fonction d'autocovariance entre deux processus stochastiques est influencée par l'unité de mesure.

Exemple : Supposons que l'on cherche à étudier la relation entre le prix d'un produit facturé en dirhams (noté  $x_t$ ) et sa quantité en kilogrammes écoulee sur le marché (notée  $y_t$ ) pendant une période donnée. Cette relation est mesurée par la covariance entre les deux processus  $x_t$  et  $y_t$  et elle est exprimée en Dh  $\times$  Kg. Toute modification de l'une des deux unités utilisées affecte cette covariance. Si par exemple au lieu d'exprimer les poids en kilogrammes, on les exprime en grammes, la valeur de la covariance sera multipliée par mille. En revanche, en divisant cette covariance par le produit des écarts-types des deux processus on obtient un coefficient de corrélation linéaire, les unités seront simplifiées et on se trouvera avec un nombre sans dimension. Ainsi, contrairement à la covariance qui est affectée par l'unité de mesure, le coefficient de corrélation linéaire ne l'est pas.

**Conclusion** : La fonction d'autocovariance entre deux processus stochastiques est influencée par l'unité de mesure.

3. **Faux** : Tout processus stochastique stationnaire n'est pas nécessairement constant et tout processus constant est stationnaire.

Exemples :

- Soit  $y_t$  un processus constant prenant la même valeur  $\theta$  à chaque instant  $t$  :  $y_t = \theta$ .

Vérifions ses trois conditions de stationnarité :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\theta) = \theta \\ V(y_t) &= V(\theta) = 0 \\ cov(y_t, y_{t-k}) &= E[(\theta - \theta)(\theta - \theta)] = 0 \end{aligned}$$

Les trois propriétés statistiques sont indépendantes du temps. Par conséquent, le processus  $y_t$  est stationnaire.

- Soit  $y_t$  un processus autorégressif d'ordre 1 stationnaire :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec la condition suivante  $|\alpha_1| < 1$  pour garantir sa stationnarité et  $\alpha_1 \neq 0$ . Supposons qu'à l'instant  $t = 0$  le processus prenne la valeur  $y_0 = \theta$  et que tous les chocs  $\varepsilon_t$  soient nuls à chaque instant  $t > 0$ .

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta + \alpha_1 y_0 + \varepsilon_1 = \theta \\ y_2 &= \theta + \alpha_1 y_1 + \varepsilon_2 = (1 + \alpha_1)\theta \\ y_3 &= \theta + \alpha_1 y_2 + \varepsilon_3 = (1 + \alpha_1 + \alpha_1^2)\theta \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hormis le cas particulier où  $\theta = 0$ , il n'y a aucune raison pour que le processus  $y_t$  prenne la même valeur, c'est à dire  $y_1 = y_2 = y_3 = \dots$ . Il en résulte que bien que le processus  $y_t$  soit stationnaire, il n'est pas nécessairement constant.

**Conclusion** : Tout processus stochastique stationnaire n'est pas nécessairement constant. En revanche, tout processus stochastique constant est stationnaire.

4. **Faux** : Une fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  n'est pas comprise entre 0 et 1 mais plutôt entre -1 et 1.

Preuve :

En statistique descriptive et en probabilités, le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables  $X$  et  $Y$  est donné par la formule suivante :

$$\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \quad (1)$$

Ce coefficient mesure le sens et l'intensité du possible lien linéaire qui peut exister entre les deux variables et qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Y = \alpha + \beta X \quad (2)$$

Dans ce cas, la covariance devient :

$$\begin{aligned}
 cov(X, Y) &= cov(X, \alpha + \beta X) \\
 &= E[X(\alpha + \beta X)] - E(X)E(\alpha + \beta X) \\
 &= E(\alpha X + \beta X^2) - E(X)[\alpha + \beta E(X)] \\
 &= \alpha E(X) + \beta E(X^2) - \alpha E(X) - \beta E^2(X) \\
 &= \beta[E(X^2) - E^2(X)] \\
 &= \beta V(X)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Par ailleurs, la variance de  $Y$  devient :

$$V(Y) = V(\alpha + \beta X) = \beta^2 V(X)$$

Le coefficient de corrélation linéaire se simplifie en :

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{\beta V(X)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{\beta^2 V(X)}} \\
 &= \frac{\beta V(X)}{|\beta| V(X)} \\
 &= \frac{\beta}{|\beta|}
 \end{aligned}$$

Trois cas extrêmes se présentent :

– Il existe une corrélation linéaire croissante entre  $X$  et  $Y$  :

$$Y = \alpha + \beta X, \beta > 0$$

Dans ce cas,  $|\beta| = \beta$  et  $\rho = 1$ .

– Il existe une corrélation linéaire décroissante entre  $X$  et  $Y$  :

$$Y = \alpha + \beta X, \beta < 0$$

Dans ce cas,  $|\beta| = -\beta$  et  $\rho = -1$ .

– Il n'existe aucune corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ , auquel cas le coefficient  $\beta$  dans (??) s'annule. Par conséquent, selon (??) la covariance  $cov(X, Y)$  s'annule entraînant par la même occasion l'annulation du coefficient de corrélation linéaire (??).

En conclusion, le coefficient de corrélation linéaire  $\rho$  vaut 1 en valeur absolue en présence d'une corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$  de la forme  $Y = \alpha + \beta X$ . Il est positif si cette corrélation est croissante et négatif dans le cas contraire. En l'absence de corrélation linéaire, ce coefficient s'annule. En présence d'une faible corrélation linéaire, le coefficient  $\rho$  est en valeur absolue compris entre 0 et 1. Autrement dit, il est compris entre -1 et 1.

En séries temporelles, on parle plutôt de fonction d'autocorrélation d'ordre  $k$ . Par extension, celle-ci s'écrit :

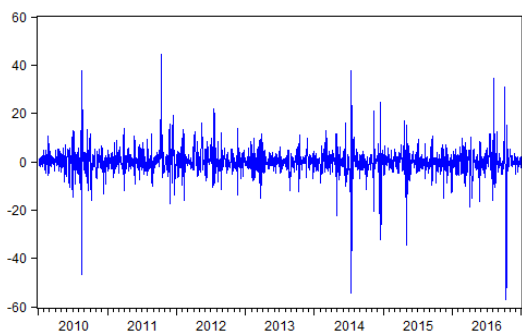
$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{V(y_t)}\sqrt{V(y_{t-k})}}$$

Cette fonction prend également - et pour les mêmes raisons que précédemment - des valeurs comprises entre -1 et 1 suivant l'existence ou non de corrélation linéaire plus ou moins forte entre les processus stochastiques  $y_t$  et  $y_{t-k}$ .

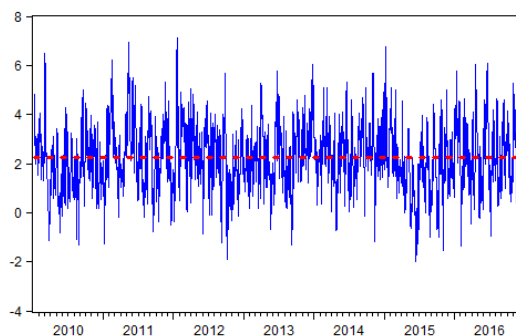
**Ex. 2 — (6 points)**

Faire correspondre chacun des modèles suivants à un graphique de la figure ci-dessous :

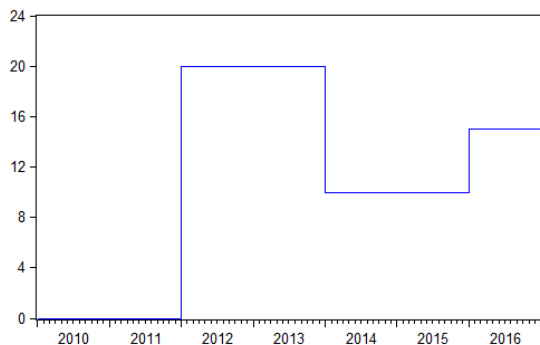
1.  $y_t = 1 - 0.5y_{t-1} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 1)$
2.  $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$
3.  $y_t = 0.7 + 0.5y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + 0.1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 1)$
4. Autre modèle



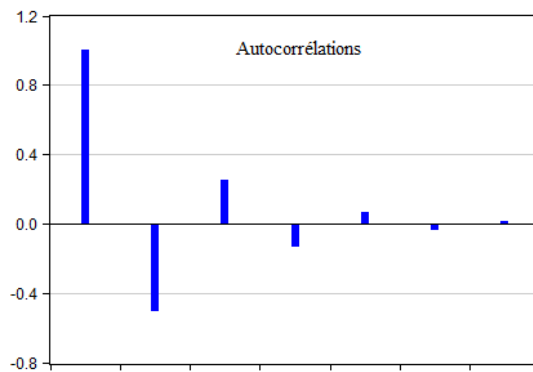
(a)



(b)



(c)



(d)

**Solution (Ex. 2) —**

Avant de faire la correspondance entre les modèles et les graphiques, analysons d'abord ces derniers et émettons des hypothèses.

- Le graphique (a) représente la trajectoire d'un processus stochastique qui fluctue autour d'une moyenne constante égale à 0 mais dont la variance change avec le temps. Bien que les chocs n'ont qu'un impact transitoire sur le processus se traduisant par un retour vers un niveau d'équilibre égal à zéro, ce processus est non stationnaire du fait de la dépendance temporelle de sa variance, un phénomène dit d'hétéroscédasticité.
- Le graphique (b) est la trajectoire d'un processus stochastique qui fluctue autour d'une moyenne légèrement

supérieure à 2 et dont la variance est quasiment stable sur toute la période. Il s'agit donc a priori d'un processus stochastique stationnaire.

- Le graphique (c) est une trajectoire qui change de niveau à la suite de chocs, ces derniers ont donc un impact permanent sur le processus. Ce processus n'est en conséquence pas stationnaire.
- Le graphique (d) représente une fonction d'autocorrélation qui change de signe et qui tend vers 0 en valeur absolue à mesure que le décalage temporel s'agrandit. Ce processus a une mémoire qui s'affaiblit et il tend donc à effacer l'impact des chocs. Il s'agit d'un processus stationnaire.

**Conclusion** : Parmi les quatre graphiques précédents, deux (b et d) correspondent à des processus stationnaires et deux (a et c) à des processus non stationnaires.

La prochaine étape consiste à étudier la stationnarité de chacun des processus pour pouvoir faire la correspondance avec les graphiques précédents.

- Le premier modèle est un modèle autorégressif d'ordre 1 stationnaire car son unique paramètre autorégressif est inférieur à 1 en valeur absolue. En conséquence, il doit correspondre à l'un des graphiques (b) ou (d). Son espérance mathématique est égale à  $1/(1 + 0.5) \approx 0.66$  et ne correspond, de ce fait, pas au graphique (b). Calculons sa fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  pour la comparer avec celle du graphique (d), cette fonction est donnée par :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (4)$$

où  $\gamma_k$  désigne la fonction d'autocovariance d'ordre  $k$ , c'est à dire  $cov(y_t, y_{t-k})$ . Trouvons d'abord l'expression de cette fonction d'autocovariance pour  $k > 0$  (on pose :  $x_t \equiv y_t - E(y_t)$ ) :

$$\begin{aligned} \gamma_k &\equiv cov(y_t, y_{t-k}) \\ &= E(x_t x_{t-k}) \\ &= E(-0.5x_{t-1}x_{t-k} + \varepsilon_t x_{t-k}) \\ &= -0.5E(x_{t-1}x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k}) \\ &= -0.5\gamma_{k-1} \\ &= (-0.5)^2 \gamma_{k-2} \\ &= (-0.5)^3 \gamma_{k-3} \\ &\vdots \\ &= (-0.5)^k \gamma_0 \end{aligned}$$

D'après la formule (??), on obtient :

$$\rho_k = (-0.5)^k$$

En remplaçant  $k$  par 0, 1, 2... on obtient les autocorrélations suivantes :

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -0.5$$

$$\rho_2 = 0.25$$

$$\rho_3 = -0.125$$

$$\rho_4 = 0.0625$$

$$\rho_5 = -0.03125$$

$$\rho_6 = 0.015625$$

On remarque bien que ces valeurs décroissent en valeur absolue tout en changeant de signe. C'est exactement le phénomène observé sur la figure (d).

**Conclusion :** Le premier modèle qui est stationnaire correspond à la figure (d).

- Le deuxième modèle est un modèle autorégressif d'ordre 1 sans terme constant. Il est non stationnaire puisque son paramètre autorégressif est égal à 1. Par conséquent, son équation caractéristique admet une racine unitaire. En fait, il s'agit d'une marche aléatoire sans dérive. Dans ce genre de modèle, l'impact des chocs est permanent de sorte que la trajectoire du processus change de niveau à la suite d'un choc. C'est justement ce phénomène que l'on observe sur le graphique (c). En effet, durant les années 2010 et 2011, ce processus valait zéro. Au début de l'année 2012, le processus a subi un choc égal à 20 ayant déplacé la trajectoire au niveau 20 sur lequel elle s'est stabilisée jusqu'au début de l'année 2014 lorsque le processus a de nouveau subi un choc égal à -10 suite auquel la trajectoire s'est déplacée et stabilisée au niveau 10. Un dernier choc égal à 5 est intervenu au début de l'année 2016 et a encore une fois déplacé la trajectoire au niveau 15.

**Conclusion :** Le deuxième modèle qui est non stationnaire correspond au graphique (c).

- Le troisième modèle est un modèle ARMA(2,1). Pour qu'il soit stationnaire, il faut que toutes les racines de l'équation caractéristique associée à sa partie autorégressive soient supérieures à 1 en module. Cette équation s'écrit  $-0.2z^2 - 0.5z + 1 = 0$  et admet les racines réelles -3.81 et 1.31 qui sont supérieures à 1 en valeur absolue. Il en résulte que ce modèle est stationnaire. Son espérance mathématique est égale à  $E(y_t = 0.7/(1 - 0.5 - 0.2) \approx 2.33$ . Ce comportement ressemble à celui de la figure (b).

**Conclusion :** Le troisième modèle qui est stationnaire correspond à la figure (b).

- La figure (a) est la trajectoire d'un processus qui vérifie la première condition de stationnarité au sens faible, à savoir, une espérance mathématique constante et indépendante du temps mais qui ne vérifie pas la deuxième puisque l'on remarque bien que la variance n'est pas constante dans le temps, un phénomène dit d'hétéroscédasticité. Par élimination, cette trajectoire correspond à un autre modèle.

**Ex. 3 — (6 points)**

On considère le modèle autorégressif  $y_t$  suivant :  $y_t = 0.4y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim WN(0; 4)$

1. Vérifier la stationnarité de  $y_t$ .
2. Donner l'espérance mathématique  $E(y_t)$ .
3. Écrire les équations de Yule-Walker relatives à ce modèle.
4. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  et conclure.

**Ex. 4 — (4 points)**

Soit le modèle moyenne mobile  $y_t$  suivant :

$$y_t = \theta + 0.4\epsilon_{t-1} - 0.2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0; \sigma_\epsilon^2)$$

tel que :  $E(y_t) = 2$  et  $V(y_t) = 6$ .

1. Trouver les valeurs respectives de  $\theta$  et  $\sigma_\epsilon^2$ .
2. Calculer les autocorrélations d'ordres 1 et 2.
3. Donner, sans faire de calculs, les autocorrélations d'ordre 3 et 4.

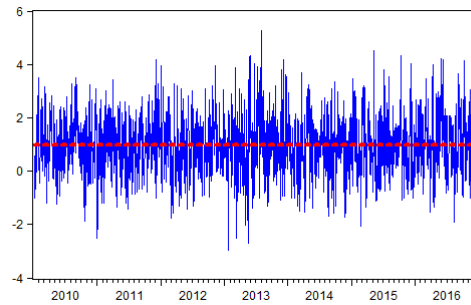
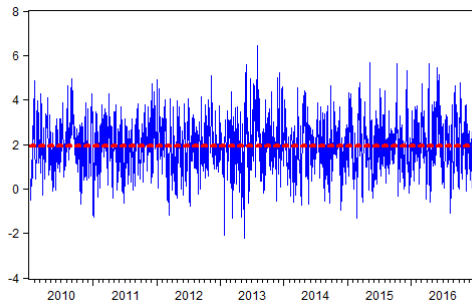
## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

### EXAMEN DE RATRAPAGE

Durée : 1 heure

**Ex. 1 — (4 points)**

Expliquer pourquoi on peut associer la première trajectoire au modèle  $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$  et la deuxième trajectoire au modèle  $y_t = 1 + 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$  (avec  $\varepsilon_t \sim WN(0, 1)$ ).



**Ex. 2 — (10 points)**

On considère le modèle autorégressif  $y_t$  suivant :

$$y_t = 1 - 0.6y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0; 4)$$

1. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$ .
2. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ . Conclure.

**Ex. 3 — (6 points)**

Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  du processus  $y_t$  suivant pour  $k = 0, 1, 2, 3$  :

$$y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0; 4)$$

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

### EXAMEN FINAL

Durée : 2 heures

**NB** : La justification de la réponse compte pour la moitié de la note.

**Ex. 1** — (5 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'impact d'un choc aléatoire  $\varepsilon_t$  sur un processus stochastique  $y_t$  s'affaiblit avec le temps ;
2. La fonction d'autocovariance d'un processus stochastique dépend de son espérance mathématique ;
3. La trajectoire d'un processus stochastique est suffisante pour la vérification de sa stationnarité ;
4. Le bruit blanc est un processus stochastique sans mémoire.

**Answer (Ex. 1)** —

1. **Faux** : Ceci n'est vrai que pour des processus stochastiques stationnaires. Dans le cas contraire, l'impact d'un choc peut rester constant au fil du temps, voire s'amplifier.
2. **Faux** : Quelle que soit son espérance mathématique, un processus est d'abord centré avant de calculer sa fonction d'autocovariance. Celle-ci ne fait donc intervenir que des processus centrés d'espérance nulle et ne dépend pas de l'espérance mathématique du processus stochastique d'origine.
3. **Faux** : La trajectoire d'un processus stochastique donne seulement une idée sur son espérance mathématique et sur sa variance mais elle ne donne aucune information sur sa fonction d'autocovariance qui fait partie des trois conditions de stationnarité à vérifier.
4. **Vrai** : La mémoire d'un processus stochastique est mesurée par sa fonction d'autocorrélation. Or, celle-ci est le rapport entre la fonction d'autocovariance (qui est nulle dans le cas d'un bruit blanc) et la variance du processus stochastique en question. Par conséquent, la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est nulle. Le bruit blanc est donc un processus stochastique sans mémoire.

**Ex. 2** — (5 points)

Faire correspondre chacun des modèles suivants à une fonction d'autocorrélation de la figure ci-dessous :

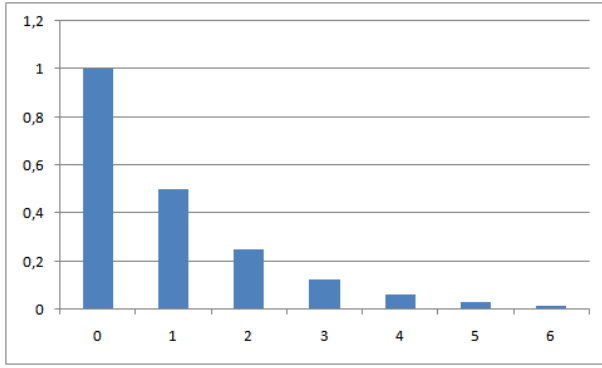
1.  $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t ; \varepsilon_t \sim WN(0, 1)$
2.  $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t ; \varepsilon_t \sim WN(0, 2)$
3.  $y_t = 0.9y_{t-1} + \varepsilon_t ; \varepsilon_t \sim WN(0, 1)$
4.  $y_t = 0.05y_{t-1} + \varepsilon_t ; \varepsilon_t \sim WN(0, 2)$

**Answer (Ex. 2)** —

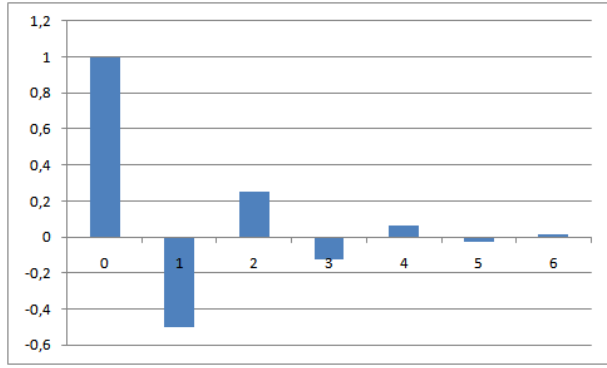
Il s'agit de quatre modèles autorégressifs d'ordre 1 stationnaires s'écrivant sous la forme suivante :

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t ; \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

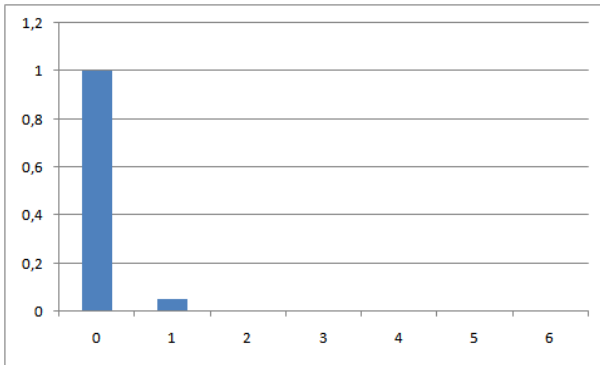
Ces modèles étant centrés, leur fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  correspond simplement à l'espérance mathé-



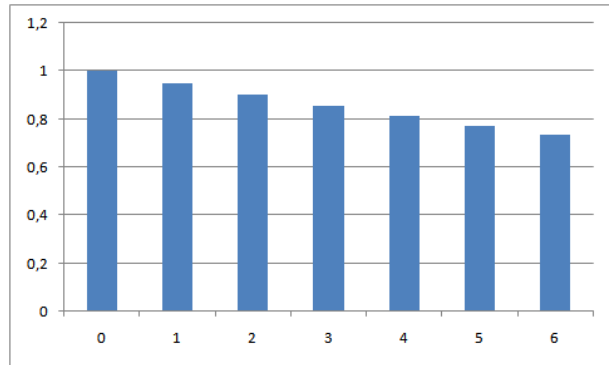
(a)



(b)



(c)



(d)

matique d'un produit de processus :

$$\gamma_k \equiv \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = E(y_t y_{t-k})$$

Elle se calcule selon les étapes suivantes :

$$\begin{aligned}
 y_t &= \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \\
 y_t y_{t-k} &= \alpha y_{t-1} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k} \\
 E(y_t y_{t-k}) &= \alpha E(y_{t-1} y_{t-k}) + E(\varepsilon_t y_{t-k}) \\
 \gamma_k &= \alpha \gamma_{k-1} + E(\varepsilon_t y_{t-k}) \tag{1}
 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction d'autocovariance d'ordre  $k$  est égale à la fonction d'autocovariance d'ordre  $k - 1$  multipliée par le coefficient autorégressif  $\alpha$ , plus un terme  $E(\varepsilon_t y_{t-k})$  qu'il reste à déterminer. Les processus  $\varepsilon_t$  et  $y_{t-k}$  étant centrés, le terme  $E(\varepsilon_t y_{t-k})$  est donc une covariance entre ces deux processus  $\text{cov}(\varepsilon_t, y_{t-k})$  et elle se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
 y_{t-k} &= \alpha y_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k} \\
 \varepsilon_t y_{t-k} &= \alpha \varepsilon_t y_{t-k-1} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k} \\
 E(\varepsilon_t y_{t-k}) &= \alpha E(\varepsilon_t y_{t-k-1}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) \\
 \text{cov}(\varepsilon_t, y_{t-k}) &= \alpha \text{cov}(\varepsilon_t, y_{t-k-1}) + \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $cov(\varepsilon_t, y_t) = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$  si  $k = 0$  et  $cov(\varepsilon_t, y_{t-k}) = 0$  si  $k > 0$ . La relation (1) peut être évaluée pour différentes valeurs de  $k$  et servir ensuite dans le calcul de la fonction d'autocorrélation  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$  :

$$\begin{array}{ll}
 \gamma_0 = \alpha\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 & \rho_0 = 1 \\
 \gamma_1 = \alpha\gamma_0 & \rho_1 = \alpha \\
 \gamma_2 = \alpha\gamma_1 = \alpha^2\gamma_0 & \rho_2 = \alpha^2 \\
 \gamma_3 = \alpha\gamma_2 = \alpha^3\gamma_0 & \rho_3 = \alpha^3 \\
 \gamma_4 = \alpha\gamma_3 = \alpha^4\gamma_0 & \rho_4 = \alpha^4 \\
 \gamma_5 = \alpha\gamma_4 = \alpha^5\gamma_0 & \rho_5 = \alpha^5 \\
 \gamma_6 = \alpha\gamma_5 = \alpha^6\gamma_0 & \rho_6 = \alpha^6
 \end{array} \Rightarrow$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  pour des valeurs du coefficient autorégressif  $\alpha \in \{-0.5, 0.5, 0.9, 0.05\}$  correspondant aux quatre modèles en question :

	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.05$
$\rho_0$	1	1	1	1
$\rho_1$	-0.5000	0.5000	0.9500	0.0500
$\rho_2$	0.2500	0.2500	0.9025	0.0025
$\rho_3$	-0.1250	0.1250	0.8574	0.0001
$\rho_4$	0.0625	0.0625	0.8145	0.00001
$\rho_5$	-0.0313	0.0313	0.7738	0.0000003
$\rho_6$	0.0156	0.0156	0.7351	0.00000002

- Modèle 1 ( $\alpha = -0.5$ ) : On note que la fonction d'autocorrélation décroît assez rapidement en valeur absolue et alterne son signe. Elle correspond au corrélogramme (b).
- Modèle 2 ( $\alpha = 0.5$ ) : La fonction d'autocorrélation décroît assez rapidement et sans changer de signe. Elle correspond au corrélogramme (a).
- Modèle 3 ( $\alpha = 0.9$ ) : La fonction d'autocorrélation décroît lentement et sans changer de signe. Elle correspond au corrélogramme (d).
- Modèle 4 ( $\alpha = 0.05$ ) : La fonction d'autocorrélation chute brusquement et sans changer de signe. Elle correspond au corrélogramme (c).

**Ex. 3 — (5 points)**

On considère le modèle autorégressif  $y_t$  suivant :

$$y_t = -0.3 + 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, 2) \quad (2)$$

1. Vérifier la stationnarité de  $y_t$ .

2. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$ .
3. Écrire les équations de Yule-Walker relatives à ce modèle.
4. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  et conclure.

**Answer (Ex. 3)** —

1. Stationnarité de  $y_t$  :

$y_t$  est un processus autorégressif d'ordre 2, il est stationnaire si et seulement si les racines de son équation caractéristique sont - en valeur absolue - strictement supérieures à l'unité. Écrivons d'abord le processus  $y_t$  à l'aide d'un polynôme retard :

$$y_t = -0.3 + 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t = -0.3 + 0.3Ly_t - 0.02L^2y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - 0.3L + 0.02L^2) = -0.3 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)y_t = -0.3 + \varepsilon_t$$

avec  $\alpha(L) = 1 - 0.3L + 0.02L^2$ . L'équation caractéristique associée à ce polynôme s'écrit :

$$1 - 0.3z + 0.02z^2 = 0$$

ou encore (en divisant par 0.02) :

$$z^2 - 15z + 50 = 0$$

Les racines de cette équation sont 5 et 10, elles sont strictement supérieures à l'unité en valeur absolue. Il en résulte que le processus stochastique  $y_t$  est stationnaire et qu'il a les propriétés statistiques suivantes à déterminer :

$$E(y_t) = \mu < \infty, \forall t$$

$$V(y_t) = \sigma^2 < \infty, \forall t$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k, \forall t$$

2. Espérance mathématique  $E(y_t)$  :

Appliquons l'opérateur espérance mathématique aux deux membres de (2) :

$$y_t = -0.3 + 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$E(y_t) = E(-0.3 + 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = -0.3 + 0.3E(y_{t-1}) - 0.02E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = -0.3 + 0.3\mu - 0.02\mu + 0$$

$$\mu(1 - 0.3 + 0.02) = -0.3$$

$$\mu = \frac{-0.3}{1 - 0.3 + 0.02} \approx -0.42$$

L'espérance mathématique du processus  $y_t$  est voisine de 0.42.

### 3. Équations de Yule-Walker :

La fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  du processus  $y_t$ , notée  $\gamma_k$ , est donnée par :

$$\gamma_k \equiv cov(y_t, y_{t-k}) = E(y_t^c y_{t-k}^c)$$

avec  $y_t^c = y_t - \mu$  et  $y_{t-k}^c = y_{t-k} - \mu$  les versions centrées respectives des processus  $y_t$  et  $y_{t-k}$ . En séries temporelles, un processus centré est simplement un processus sans terme constant. D'où :

$$\begin{aligned} y_t^c &= 0.3y_{t-1}^c - 0.02y_{t-2}^c + \varepsilon_t \\ y_t^c y_{t-k}^c &= 0.3y_{t-1}^c y_{t-k}^c - 0.02y_{t-2}^c y_{t-k}^c + \varepsilon_t y_{t-k}^c \\ E(y_t^c y_{t-k}^c) &= 0.3E(y_{t-1}^c y_{t-k}^c) - 0.02E(y_{t-2}^c y_{t-k}^c) + E(\varepsilon_t y_{t-k}^c) \\ \gamma_k &= 0.3\gamma_{k-1} - 0.02\gamma_{k-2} + cov(\varepsilon_t, y_{t-k}) \end{aligned} \quad (3)$$

La fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  dépend de  $\gamma_{k-1}$ , de  $\gamma_{k-2}$  et de la covariance  $cov(\varepsilon_t, y_{t-k})$  qu'il faut déterminer. Pour cela, il convient de centrer les processus qui ne le sont pas et d'appliquer l'espérance mathématique à leur produit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} y_{t-k}^c &= 0.3y_{t-k-1}^c - 0.02y_{t-k-2}^c + \varepsilon_{t-k} \\ \varepsilon_t y_{t-k}^c &= 0.3\varepsilon_t y_{t-k-1}^c - 0.02\varepsilon_t y_{t-k-2}^c + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k} \\ E(\varepsilon_t y_{t-k}^c) &= 0.3E(\varepsilon_t y_{t-k-1}^c) - 0.02E(\varepsilon_t y_{t-k-2}^c) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) \\ cov(\varepsilon_t, y_{t-k}) &= 0.3cov(\varepsilon_t, y_{t-k-1}) - 0.02cov(\varepsilon_t, y_{t-k-2}) + cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) \end{aligned}$$

En substituant ce résultat dans (3), on obtient :

$$\gamma_k = 0.3\gamma_{k-1} - 0.02\gamma_{k-2} + 0.3cov(\varepsilon_t, y_{t-k-1}) - 0.02cov(\varepsilon_t, y_{t-k-2}) + cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) \quad (4)$$

Finalement, pour des valeurs de  $k = 0, 1, 2$ , la relation (4) devient :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0.3\gamma_1 - 0.02\gamma_2 + 0.3cov(\varepsilon_t, y_{t-1}) - 0.02cov(\varepsilon_t, y_{t-2}) + cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) \\ \gamma_1 &= 0.3\gamma_0 - 0.02\gamma_1 + 0.3cov(\varepsilon_t, y_{t-2}) - 0.02cov(\varepsilon_t, y_{t-3}) + cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \\ \gamma_2 &= 0.3\gamma_1 - 0.02\gamma_0 + 0.3cov(\varepsilon_t, y_{t-3}) - 0.02cov(\varepsilon_t, y_{t-4}) + cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) \end{aligned}$$

Elle peut être simplifiée et donner le résultat suivant :

$$\gamma_0 = 0.3\gamma_1 - 0.02\gamma_2 + V(\varepsilon_t) \quad (5)$$

$$\gamma_1 = 0.3\gamma_0 - 0.02\gamma_1 \quad (6)$$

$$\gamma_2 = 0.3\gamma_1 - 0.02\gamma_0 \quad (7)$$

En divisant, de part et d'autre, les équations (5), (6) et (7) par  $\gamma_0$ , on aboutit aux équations de

Yule-Walker suivantes sachant que  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ ,  $\rho_0 = 1$  et  $V(\varepsilon_t) = 2$  :

$$1 = 0.3\rho_1 - 0.02\rho_2 + \frac{2}{\gamma_0} \quad (8)$$

$$\rho_1 = 0.3 - 0.02\rho_1 \quad (9)$$

$$\rho_2 = 0.3\rho_1 - 0.02 \quad (10)$$

4. Fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  :

La résolution des équations (8), (9) et (10) permet d'obtenir la valeurs suivantes de  $\gamma_0$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  :

$$\gamma_0 \approx 2.1882$$

$$\rho_1 \approx 0.29$$

$$\rho_2 \approx 0.067$$

On en déduit la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  :

$$\gamma_0 \approx 2.1882$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \times \gamma_0 \approx 0.6346$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \times \gamma_0 \approx 0.1466$$

Conclusion : la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  décroît rapidement en valeur absolue tout comme la fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  traduisant la stationnarité du processus stochastique  $y_t$ .

**Ex. 4 — (5 points)**

Soit le modèle autorégressif moyenne mobile  $y_t$  suivant :

$$y_t = \theta + 0.5y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (11)$$

tel que  $E(y_t) = 2$  et  $V(y_t) = 4$ .

1. Trouver les valeurs respectives de  $\theta$  et  $\sigma_\varepsilon^2$ .
2. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 1, 2$  et 3.
3. Calculer et représenter graphiquement la fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  et 3.
4. L'allure de la fonction d'autocorrélation est-elle compatible avec l'hypothèse de stationnarité du processus stochastique  $y_t$  ?

**Answer (Ex. 4) —**

Il s'agit d'un processus ARMA(1,1), il est stationnaire si et seulement si sa partie autorégressive AR(1) est stationnaire et ceci indépendamment de sa partie moyenne mobile MA(1).

La partie AR(1) du processus (11) s'écrit :

$$y_t = \theta + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Elle est stationnaire puisque son unique coefficient autorégressif est strictement inférieur à l'unité en valeur absolue. On conclut donc que le processus  $y_t$  est stationnaire et qu'il a les propriétés statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= 2, \quad \forall t \\ V(y_t) &= 4, \quad \forall t \\ cov(y_t, y_{t-k}) &= \gamma_k, \quad \forall t \end{aligned}$$

1. Valeurs de  $\theta$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  :

— Valeur de  $\theta$  :

Pour calculer la valeur de  $\theta$ , il convient d'abord de retrouver l'espérance mathématique du processus stochastique  $y_t$ . La valeur de  $\theta$  sera ensuite obtenue par la résolution d'une équation dont elle est l'unique inconnue :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\theta + 0.5y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ E(y_t) &= \theta + 0.5E(y_{t-1}) + 0.4E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\ 2 &= \theta + 0.5 \times 2 + 0.4 \times 0 + 0 \\ \theta &= 1 \end{aligned}$$

— Valeur de  $\sigma_\varepsilon^2$  :

Pour calculer la valeur de  $\sigma_\varepsilon^2$ , il convient d'abord de retrouver la variance du processus stochastique  $y_t$ . La valeur de  $\sigma_\varepsilon^2$  sera ensuite obtenue par la résolution d'une équation dont elle est l'unique inconnue :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(\theta + 0.5y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ V(y_t) &= 0.25V(y_{t-1}) + 0.16V(\varepsilon_{t-1}) + V(\varepsilon_t) + 0.20cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + 0.5cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) \\ 4 &= 0.25 \times 4 + 0.16\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 0.20cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + 0.5 \times 0 + 0.4 \times 0 \\ 1.16\sigma_\varepsilon^2 &= 3 - 0.20cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) \end{aligned} \tag{12}$$

Il reste à calculer le terme  $cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1})$ . Cette covariance s'écrit aussi :

$$cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = E(y_{t-1}^c \varepsilon_{t-1})$$

avec  $y_{t-1}^c$  la version centrée de  $y_{t-1}$ , c'est à dire  $y_{t-1}^c = y_{t-1} - E(y_{t-1})$ . Sachant qu'en séries

temporelles un processus centré est simplement un processus sans terme constant, on a :

$$\begin{aligned}
y_t^c &= 0.5y_{t-1}^c + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
y_{t-1}^c &= 0.5y_{t-2}^c + 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \\
y_{t-1}^c \varepsilon_{t-1} &= 0.5y_{t-2}^c \varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} \\
E(y_{t-1}^c \varepsilon_{t-1}) &= 0.5E(y_{t-2}^c \varepsilon_{t-1}) + 0.4E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_{t-1}^2) \\
cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) &= 0.5cov(y_{t-2}, \varepsilon_{t-1}) + 0.4cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1}) + V(\varepsilon_{t-1}) \\
cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) &= 0.5 \times 0 + 0.4 \times 0 + \sigma_\varepsilon^2 \\
cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) &= \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Finalement, la covariance entre le processus  $y_{t-1}$  et le processus  $\varepsilon_{t-1}$  correspond à la variance du terme d'erreur  $\sigma_\varepsilon^2$ . Ainsi, la relation (12) devient :

$$\begin{aligned}
1.16\sigma_\varepsilon^2 &= 3 - 0.20\sigma_\varepsilon^2 \\
1.36\sigma_\varepsilon^2 &= 3 \\
\sigma_\varepsilon^2 &= 3/1.36 = 2.206
\end{aligned}$$

En conclusion,  $\theta$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  valent respectivement 1 et 2.206.

2. Fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 1, 2$  et  $3$  :

Le processus stochastique  $y_t$  étant stationnaire, sa fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  peut être notée  $\gamma_k$ , elle correspond à l'espérance mathématique du produit des processus centrés  $y_t^c$  et  $y_{t-k}^c$  :

$$\gamma_k \equiv cov(y_t, y_{t-k}) = E(y_t^c y_{t-k}^c)$$

Son calcul passe par les étapes suivantes :

$$\begin{aligned}
y_t^c &= 0.5y_{t-1}^c + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
y_t^c y_{t-k}^c &= 0.5y_{t-1}^c y_{t-k}^c + 0.4\varepsilon_{t-1} y_{t-k}^c + \varepsilon_t y_{t-k}^c \\
E(y_t^c y_{t-k}^c) &= E(0.5y_{t-1}^c y_{t-k}^c + 0.4\varepsilon_{t-1} y_{t-k}^c + \varepsilon_t y_{t-k}^c) \\
E(y_t^c y_{t-k}^c) &= 0.5E(y_{t-1}^c y_{t-k}^c) + 0.4E(\varepsilon_{t-1} y_{t-k}^c) + E(\varepsilon_t y_{t-k}^c) \\
\gamma_k &= 0.5\gamma_{k-1} + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}, y_{t-k}) + cov(\varepsilon_t, y_{t-k}) \tag{13}
\end{aligned}$$

Le remplacement de  $k$  par les valeurs demandées permettra de simplifier le résultat (13) :

$$\gamma_1 = 0.5\gamma_0 + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) + cov(\varepsilon_t, y_{t-1}) = 0.5\gamma_0 + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) \tag{14}$$

$$\gamma_2 = 0.5\gamma_1 + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}, y_{t-2}) + cov(\varepsilon_t, y_{t-2}) = 0.5\gamma_1 \tag{15}$$

$$\gamma_3 = 0.5\gamma_2 + 0.4cov(\varepsilon_{t-1}, y_{t-3}) + cov(\varepsilon_t, y_{t-3}) = 0.5\gamma_2 \tag{16}$$

Il ne reste plus que le terme  $cov(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1})$  à calculer. Comme il s'agit d'une covariance, le plus simple est de centrer les processus qui ne le sont pas et calculer l'espérance mathématique du produit de

leurs versions centrées comme suit :

$$\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}^c)$$

Ainsi, le calcul de cette covariance se fera selon les étapes suivantes :

$$y_t^c = 0.5y_{t-1}^c + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_{t-1}^c = 0.5y_{t-2}^c + 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_{t-1} y_{t-1}^c = 0.5\varepsilon_{t-1} y_{t-2}^c + 0.4\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}$$

$$E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}^c) = 0.5E(\varepsilon_{t-1} y_{t-2}^c) + 0.4E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) = 0.5\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, y_{t-2}) + 0.4\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) + V(\varepsilon_{t-1})$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) = 0.5 \times 0 + 0.4 \times 0 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) = 2.206$$

En substituant ce résultat dans (14), (15) et (16), on obtient :

$$\gamma_1 = 0.5 \times 4 + 0.4 \times 2.206 = 2.8824$$

$$\gamma_2 = 0.5 \times 2.8824 = 1.4412$$

$$\gamma_3 = 0.5 \times 1.4412 = 0.7206$$

### 3. Fonction d'autocorrélation $\rho_k$ pour $k = 0, 1, 2$ et $3$ :

La fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  est le rapport entre la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  et la variance désignée par  $\gamma_0$ . Ainsi :

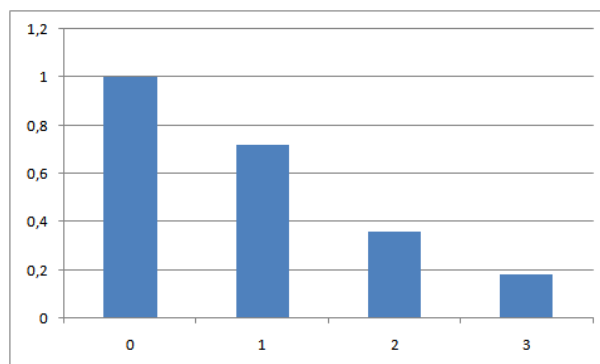
$$\rho_0 = \gamma_0/\gamma_0 = 4/4 = 1$$

$$\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0 = 2.8824/4 = 0.7206$$

$$\rho_2 = \gamma_2/\gamma_0 = 1.4412/4 = 0.3603$$

$$\rho_3 = \gamma_3/\gamma_0 = 0.7206/4 = 0.18015$$

Graphiquement, le corrélogramme de cette fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  et  $3$  est le suivant :



4. Le corrélogramme de la figure ci-dessus fait bien apparaître la rapide décroissance de la fonction d'autocorrélation traduisant ainsi la chute de la mémoire du processus stochastique  $y_t$  et *in fine* sa stationnarité. Ainsi, l'allure de la fonction d'autocorrélation est bien compatible avec l'hypothèse de stationnarité du processus stochastique  $y_t$ .

## ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES

### EXAMEN FINAL

Durée : 2 heures

#### Exercice 1:

On considère le modèle autorégressif  $y_t$  suivant :

$$y_t = 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, 1)$$

1. Vérifier la stationnarité de  $y_t$ .
2. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$ .
3. Écrire les équations de Yule-Walker relatives à ce modèle.
4. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  et conclure.

#### Exercice 2:

On considère le modèle moyenne mobile  $y_t$  suivant :

$$y_t = -0.3 + 0.3\varepsilon_{t-1} - 0.02\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, 2)$$

1. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$ .
2. Calculer la variance  $V(y_t)$ .
3. Calculer la fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  et conclure.

#### Exercice 3:

Soit  $Z$  une variable aléatoire centrée et réduite (i.e.  $E(Z) = 0$  et  $V(Z) = 1$ ) à partir de laquelle on construit la série temporelle  $y_t = (-1)^t Z$ .

1. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$  de la série temporelle  $y_t$  ;
2. Calculer sa variance  $V(y_t)$  ;
3. Calculer sa fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  ;
4. La série temporelle  $y_t$  est-elle stationnaire au sens faible ?

#### Solution 1:

1. Espérance mathématique  $E(y_t)$  :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E \left[ (-1)^t Z \right] \\ &= (-1)^t E(Z) \\ &= (-1)^t \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(y_t) = 0}$$

2. Variance  $V(y_t)$  :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V\left[(-1)^t Z\right] \\ &= \left[(-1)^t\right]^2 V(Z) \\ &= (-1)^{2t} V(Z) \\ &= \left[(-1)^2\right]^t V(Z) \\ &= [1]^t V(Z) \\ &= V(Z) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{V(y_t) = 1}$$

3. Fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  :

$$\begin{aligned} cov(y_t, y_{t-k}) &= E(y_t y_{t-k}) \\ &= E\left[(-1)^t Z \times (-1)^{t-k} Z\right] \\ &= E\left[(-1)^t (-1)^{t-k} Z^2\right] \\ &= E\left[(-1)^{t+t-k} Z^2\right] \\ &= E\left[(-1)^{2t-k} Z^2\right] \\ &= E\left[(-1)^{2t} (-1)^{-k} Z^2\right] \\ &= E\left[\left((-1)^2\right)^t (-1)^{-k} Z^2\right] \\ &= E\left[(-1)^{-k} Z^2\right] \\ &= (-1)^{-k} E\left[Z^2\right] \\ &= (-1)^{-k} V(Z) \\ &= (-1)^{-k} \end{aligned}$$

$$\boxed{cov(y_t, y_{t-k}) = (-1)^{-k}}$$

4. La série temporelle  $y_t$  est stationnaire au sens faible puisque son espérance mathématique  $E(y_t)$ , sa variance  $V(y_t)$  et sa fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  sont finies et indépendantes de l'indice temporel  $t$ .

#### Exercice 4:

Soit  $y_t = x_t + v_t$  une série temporelle où  $x_t$  est autre série temporelle définie par :  $x_t = \alpha x_{t-1} + u_t$  avec  $\alpha$  un réel tel que  $|\alpha| < 1$  et  $u_t$  et  $v_t$  deux bruits blancs indépendants de variances unitaires.

1. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$  de la série temporelle  $y_t$  ;
2. Calculer sa variance  $V(y_t)$  ;

3. Calculer sa fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$ ;
4. La série temporelle  $y_t$  est-elle stationnaire au sens faible?

**Solution 2:**

Avant de calculer les propriétés statistiques de la série temporelle  $y_t$ , calculons d'abord celles de la série temporelle  $x_t$ . Notons, au passage, que cette dernière est un AR(1) sans terme constant et stationnaire puisque  $|\alpha| < 1$ , on a :

- a. Espérance mathématique  $E(x_t)$  :

$$E(x_t) = 0$$

- b. Variance  $V(x_t)$  :

$$\begin{aligned} V(x_t) &= V(\alpha x_{t-1} + u_t) \\ &= \alpha^2 V(x_{t-1}) + V(u_t) \\ &= \alpha^2 V(x_t) + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{V(x_t) = \frac{1}{1-\alpha^2}}$$

- c. Fonction d'autocovariance  $cov(x_t, x_{t-k})$  pour  $k > 0$  :

$$\begin{aligned} cov(x_t, x_{t-k}) &= E(x_t x_{t-k}) \\ &= E[x_t(\alpha x_{t-k-1} + u_{t-k})] \\ &= E[\alpha x_t x_{t-k-1} + x_t u_{t-k}] \\ &= \alpha E(x_t x_{t-k-1}) + E(x_t u_{t-k}) \\ &= \alpha cov(x_t, x_{t-k}) + cov(x_t, u_{t-k}) \\ &= \alpha cov(x_t, x_{t-k}) \end{aligned}$$

$$\boxed{cov(x_t, x_{t-k}) = \alpha cov(x_t, x_{t-k}) = \alpha^k V(x_t) = \frac{\alpha^k}{1-\alpha^2}}$$

1. Espérance mathématique  $E(y_t)$  :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(x_t + v_t) \\ &= E(x_t) + E(v_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Variance  $V(y_t)$  :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(x_t + v_t) \\ &= V(\alpha x_{t-1} + u_t + v_t) \\ &= \alpha^2 V(x_{t-1}) + V(u_t) + V(v_t) + 2\alpha \text{cov}(x_{t-1}, u_t) + 2\alpha \text{cov}(x_{t-1}, v_t) + 2\text{cov}(u_t, v_t) \\ &= \alpha^2 V(x_{t-1}) + V(u_t) + V(v_t) \\ &= \alpha^2 V(x_t) + 1 + 1 \\ &= \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + 2 \\ &= \frac{2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

3. Fonction d'autocovariance  $\text{cov}(y_t, y_{t-k})$  :

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_t, y_{t-k}) &= E(y_t y_{t-k}) \\ &= E[(x_t + v_t)(x_{t-k} + v_{t-k})] \\ &= E(x_t x_{t-k} + x_t v_{t-k} + v_t x_{t-k} + v_t v_{t-k}) \\ &= E(x_t x_{t-k}) + E(x_t v_{t-k}) + E(v_t x_{t-k}) + E(v_t v_{t-k}) \\ &= \text{cov}(x_t, x_{t-k}) + \text{cov}(x_t, v_{t-k}) + \text{cov}(v_t, x_{t-k}) + \text{cov}(v_t, v_{t-k}) \\ &= \text{cov}(x_t, x_{t-k}) \\ &= \alpha^k V(x_t) \\ &= \frac{\alpha^k}{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

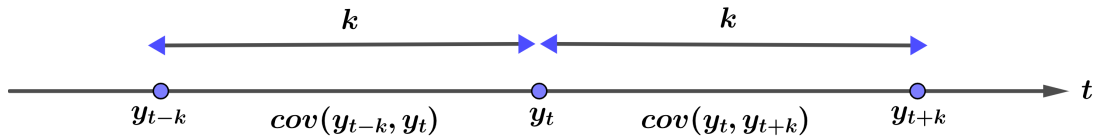
4. La série temporelle  $y_t$  est stationnaire au sens faible puisque son espérance mathématique  $E(y_t)$ , sa variance  $V(y_t)$  et sa fonction d'autocovariance  $\text{cov}(y_t, y_{t-k})$  sont finies et indépendantes de l'indice temporel  $t$ .

Traiter les exercices 1, 2 et 3 et un (au choix) des exercices 4 et 5 suivants :

**Exercice 1 (5 points) :**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse par une démonstration, exemple et/ou un schéma.

1. L'autocovariance d'un processus stochastique  $y_t$  vérifie la propriété  $cov(y_t, y_{t-k}) = cov(y_t, y_{t+k})$  :  
 La covariance entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  s'écrit  $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ . La commutativité du produit des nombres réels implique que la covariance est symétrique  $cov(y_t, y_{t-k}) = cov(y_{t-k}, y_t)$ . La propriété que l'on cherche à vérifier devient  $cov(y_{t-k}, y_t) = cov(y_t, y_{t+k})$  et on peut la schématiser comme suit :



Il y a le même décalage de  $k$  périodes entre  $y_{t-k}$  et  $y_t$  et entre  $y_t$  et  $y_{t+k}$  mais cela n'assure pas l'égalité entre les autocovariances  $cov(y_{t-k}, y_t)$  et  $cov(y_t, y_{t+k})$  car elles dépendent également de l'instant  $t$ . En revanche, si le processus  $y_t$  est stationnaire, cette dépendance vis-à-vis du temps disparaît et l'égalité entre les autocovariances  $cov(y_{t-k}, y_t)$  et  $cov(y_t, y_{t+k})$  est vérifiée.

**Conclusion :** L'affirmation 1. n'est vraie que sous la condition de stationnarité du processus  $y_t$ . Elle est donc **fausse**.

2. La suppression de la constante d'un modèle ARMA(p,q) affecte toutes ses propriétés statistiques :  
 Un modèle ARMA(p,q) avec terme constant s'écrit :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Calculons par exemple la variance de  $y_t$  :

$$V(y_t) = V(\theta + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t)$$

$$V(y_t) = V(\alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t)$$

Une constante additive  $\theta$  n'ayant aucun effet sur la variance de  $y_t$ , maintenir cette constante dans le modèle ou la supprimer n'affectera pas la variance de  $y_t$ .

**Conclusion :** L'exemple ci-dessus montre que parmi les propriétés statistiques d'un modèle ARMA(p,q), au moins la variance n'est pas affectée par la suppression de sa constante. L'affirmation 2. est en conséquence **fausse**.

3. La covariance entre deux processus stochastiques à deux instants différents  $x_s$  et  $y_t$  est nulle :  
 Considérons le schéma suivant :



Supposons que  $x_s$  est un choc  $\varepsilon_{t-1}$  qui affecte un processus stochastique  $y_t$  à l'instant  $t - 1$ . Dans ce cas, la covariance  $cov(\varepsilon_{t-1}, y_t)$  n'est pas nulle.

**Conclusion :** L'affirmation 3. est donc **fausse**.

4. L'impact d'un choc aléatoire  $\varepsilon_t$  sur un processus stochastique  $y_t$  s'affaiblit avec le temps :  
 L'impact d'un choc aléatoire  $\varepsilon_t$  sur un processus stochastique  $y_t$  ne s'affaiblit avec le temps que si le processus  $y_t$  est stationnaire, on parle alors de choc transitoire. Dans le cas d'un processus  $y_t$  non-stationnaire, l'effet du choc est permanent et ne s'affaiblit pas.

**Conclusion :** L'affirmation 4. est donc **fausse**.

5. La trajectoire d'un processus stochastique est suffisante pour la vérification de sa stationnarité : La trajectoire d'un processus stochastique met évidence sa moyenne "empirique" (i.e. une estimation de son espérance mathématique) et sa variance "empirique" (i.e. une estimation de sa variance théorique). Or pour vérifier la stationnarité d'un processus stochastique, il faut également disposer d'information sur sa fonction d'autocovariance (ou de manière équivalente sur sa fonction d'autocorrélation, celle-ci étant représentée par un auto-corrélogramme) qui n'est pas mise en évidence par la trajectoire du processus.

**Conclusion :** L'affirmation 5. est donc **fausse**.

### Exercice 2 (6 points) :

Faire correspondre chacun des processus stochastiques suivants à l'une des figures de la page 2 :

1.  $y_t = 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;1)$  :  
Il s'agit d'un modèle MA(2), il est par construction stationnaire. Son espérance mathématique est nulle du fait de l'absence d'un terme constant. Les trajectoires qui semblent être stationnaires et fluctuer autour de 0 sont celle de la figure (c) et celle de la figure (d). La variance de  $y_t$  est égale à 1.13.
2.  $y_t = 0.2 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;10)$   
Il s'agit d'un modèle AR(1), il est non-stationnaire puisque son coefficient autorégressif est égal à 1 (c'est une marche aléatoire avec constante). Toutes les représentations graphiques des figures ci-dessous sont celles de processus stationnaires à l'exception de celle de la figure (e) qui est clairement non-stationnaire. Le processus  $y_t$  correspond sans aucun doute à cette figure.
3.  $y_t = 8 + 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;1)$  :  
Il s'agit d'un modèle AR(1), il est stationnaire puisque son coefficient autorégressif est strictement inférieur à 1 en valeur absolue. Son espérance mathématique est égale à 10. La seule trajectoire qui semble être stationnaire et fluctuer autour de 10 est celle de la figure (b).
4.  $y_t = 2.8 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;1)$  :  
Il s'agit d'un modèle AR(2), il est stationnaire puisque les racines (2.3166 et -4.3166) de son équation caractéristique sont strictement supérieures à 1 en valeurs absolues. Son espérance mathématique est égale à 4. La seule trajectoire qui semble être stationnaire et fluctuer autour de 4 est celle de la figure (a).
5.  $y_t = 2 + 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + 0.4\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;10)$  :  
Il s'agit d'un modèle MA(3), il est par construction stationnaire. Son espérance mathématique est égale à 2. Cependant, aucune des trajectoires des figures ci-dessous ne fluctue autour de cette valeur. En revanche, la fonction d'autocorrélation représentée sur la figure (f) s'annule pour  $k > 3$ . Elle correspond donc bien à ce processus.
6.  $y_t = 0.2y_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;10)$  :  
Il s'agit d'un modèle ARMA(1,1), il est stationnaire puisque son coefficient autorégressif est strictement inférieur à 1 en valeur absolue. Son espérance mathématique est nulle du fait de l'absence d'un terme constant dans le modèle. Les trajectoires qui semblent être stationnaires et fluctuer autour de 0 sont celle de la figure (c) et celle de la figure (d). La variance de  $y_t$  est égale à 10.83.

### Récapitulatif :

1. Le processus  $y_t = 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;1)$  correspond à la figure (c) ou (d) ;
2. Le processus  $y_t = 0.2 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;10)$  correspond à la figure (e) ;
3. Le processus  $y_t = 8 + 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;1)$  correspond à la figure (b)
4. Le processus  $y_t = 2.8 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;1)$  correspond à la figure (a)
5. Le processus  $y_t = 2 + 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + 0.4\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;10)$  correspond à la figure (f)
6. Le processus  $y_t = 0.2y_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0;10)$  correspond à la figure (c) ou (d).

Il reste à décider quel processus (1. ou 6.) associer à la figure (c) et à la figure (d), cette décision ne peut être fondée que sur une mesure de dispersion (de volatilité). En effet, bien que les trajectoires des figures (c) et (d) semblent stationnaires et fluctuer autour de 0, la trajectoire de la figure (d) est plus volatile (valeurs comprises entre -10 et 10) que celle de la figure (c) dont les valeurs varient entre -2 et 2. Par conséquent, la figure (d) correspond au processus 6. (variance égale à 10.83) et la figure (c) correspond au processus 1. (variance égale à 1.13).

**Exercice 3 (5 points) :**

On considère le processus autorégressif  $y_t = 4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0;1)$ .

- Vérifier la stationnarité de  $y_t$  ;

$$\begin{aligned} y_t &= 4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \\ y_t - 0.2y_{t-1} - 0.1y_{t-2} &= 4.2 + \varepsilon_t \\ y_t - 0.2Ly_t - 0.1L^2y_t &= 4.2 + \varepsilon_t \\ y_t \underbrace{(1 - 0.2L - 0.1L^2)}_{\alpha(L)} &= 4.2 + \varepsilon_t \end{aligned}$$

L'équation caractéristique  $\alpha(z) = 0$  associée à ce modèle s'écrit :

$$1 - 0.2z - 0.1z^2 = 0$$

ou encore (en multipliant les deux membres par -10) :

$$z^2 + 2z - 10 = 0$$

Cette équation peut être factorisée comme suit :

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 1 - 11 &= 0 \\ (z + 1)^2 - (\sqrt{11})^2 &= 0 \\ (z + 1 - \sqrt{11})(z + 1 + \sqrt{11}) &= 0 \end{aligned}$$

On a alors  $z + 1 - \sqrt{11} = 0$  ou  $z + 1 + \sqrt{11} = 0$ , c'est à dire  $z = 2.3166$  ou  $z = -4.3166$ . Les deux racines sont strictement supérieures à 1 en valeurs absolues, le processus  $y_t$  est en conséquence stationnaire.

- Calculer son espérance mathématique  $E(y_t)$  ;

On vient de montrer que  $y_t$  est stationnaire. On pose  $E(y_t) = \mu$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{E(y_t)}_{\mu} &= E(4.2 + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t) \\ &= 4.2 + 0.2 \underbrace{E(y_{t-1})}_{\mu} + 0.1 \underbrace{E(y_{t-2})}_{\mu} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_0 \end{aligned}$$

$$\mu(1 - 0.2 - 0.1) = 4.2$$

$$\mu = \frac{4.2}{1 - 0.2 - 0.1} = 6$$

- Écrire ses équations de Yule-Walker ;

La version centrée du processus  $y_t$  est :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$$

En considérant la version centrée de  $y_t$ , la fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$ , que l'on peut noter  $\gamma_k$  puisque le processus  $y_t$  est stationnaire, s'écrit :

$$\gamma_k = E(y_t y_{t-k})$$

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t y_{t-k} = 0.2y_{t-1}y_{t-k} + 0.1y_{t-2}y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}$$

$$\begin{aligned} E(y_t y_{t-k}) &= E(0.2y_{t-1}y_{t-k} + 0.1y_{t-2}y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}) \\ \underbrace{E(y_t y_{t-k})}_{\gamma_k} &= 0.2 \underbrace{E(y_{t-1}y_{t-k})}_{\gamma_{k-1}} + 0.1 \underbrace{E(y_{t-2}y_{t-k})}_{\gamma_{k-2}} + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k})}_{?} \end{aligned}$$

$$y_{t-k} = 0.2y_{t-k-1} + 0.1y_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k}$$

$$\varepsilon_t y_{t-k} = 0.2\varepsilon_t y_{t-k-1} + 0.1\varepsilon_t y_{t-k-2} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}$$

$$E(\varepsilon_t y_{t-k}) = E(0.2\varepsilon_t y_{t-k-1} + 0.1\varepsilon_t y_{t-k-2} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k})$$

$$E(\varepsilon_t y_{t-k}) = 0.2E(\varepsilon_t y_{t-k-1}) + 0.1E(\varepsilon_t y_{t-k-2}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k})$$

Si  $k = 0$ , on a :

$$E(\varepsilon_t y_t) = 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_0 + 0.1 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-2})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_t)}_1$$

Si  $k > 0$ , on a :

$$E(\varepsilon_t y_{t-k}) = 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k-1})}_0 + 0.1 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k-2})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_{t-k} \varepsilon_t)}_0$$

Finalement, on a :

$$\gamma_0 = 0.2\gamma_{-1} + 0.1\gamma_{-2} + 1$$

$$\gamma_1 = 0.2\gamma_0 + 0.1\gamma_{-1}$$

$$\gamma_2 = 0.2\gamma_1 + 0.1\gamma_0$$

$$\gamma_3 = 0.2\gamma_2 + 0.1\gamma_1$$

ou encore :

$$\gamma_0 = 0.2\gamma_1 + 0.1\gamma_2 + 1$$

$$\gamma_1 = 0.2\gamma_0 + 0.1\gamma_1$$

$$\gamma_2 = 0.2\gamma_1 + 0.1\gamma_0$$

$$\gamma_3 = 0.2\gamma_2 + 0.1\gamma_1$$

⋮

En divisant par  $\gamma_0$ , on obtient les équations de Yule-Walker suivantes :

$$1 = 0.2\rho_1 + 0.1\rho_2 + 1/\gamma_0 \tag{1}$$

$$\rho_1 = 0.2 + 0.1\rho_1 \tag{2}$$

$$\rho_2 = 0.2\rho_1 + 0.1 \tag{3}$$

$$\rho_3 = 0.2\rho_2 + 0.1\rho_1 \tag{4}$$

⋮

$$\tag{5}$$

4. Calculer sa fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  ;

A partir de l'équation (2), on obtient la valeur de  $\rho_1$  :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 0.2 + 0.1\rho_1 \\ \rho_1(1 - 0.1) &= 0.2 \\ \rho_1 &= \frac{0.2}{0.9} = 0.222\end{aligned}$$

En substituant la valeur de  $\rho_1$  dans l'équation (3), on obtient la valeur de  $\rho_2$  :

$$\rho_2 = 0.2 \times 0.22 + 0.1 = 0.144$$

En substituant les valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans l'équation (4), on obtient la valeur de  $\rho_3$  :

$$\rho_3 = 0.2 \times 0.144 + 0.1 \times 0.222 = 0.051$$

Enfin, en substituant les valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans l'équation (1), on obtient la valeur de  $\gamma_0$  :

$$\begin{aligned}1 &= 0.2 \times 0.222 + 0.1 \times 0.144 + 1/\gamma_0 \\ 1 &= 0.0588 + \\ 1/\gamma_0 &= 0.9412 \\ \gamma_0 &= 1/0.9412 = 1.0625\end{aligned}$$

Comme  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ , on peut à partir des valeurs de  $\rho_k$  et de  $\gamma_0$  retrouver celles de  $\gamma_k$  en appliquant simplement la formule  $\gamma_k = \rho_k \times \gamma_0$ , ainsi :

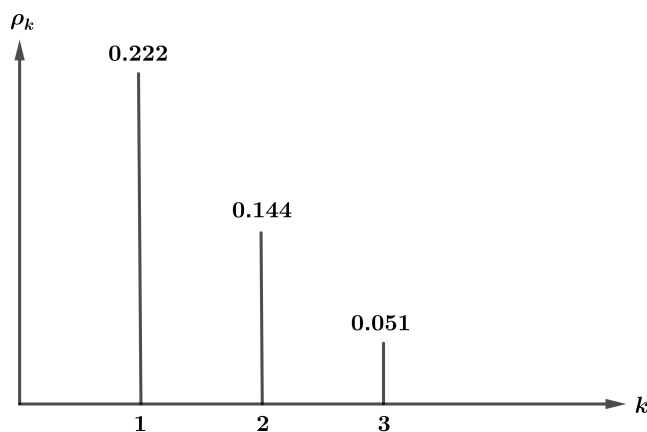
$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \rho_1 \times \gamma_0 = 0.222 \times 1.0625 = 0.2359 \\ \gamma_2 &= \rho_2 \times \gamma_0 = 0.144 \times 1.0625 = 0.1530 \\ \gamma_3 &= \rho_3 \times \gamma_0 = 0.051 \times 1.0625 = 0.0542\end{aligned}$$

5. Représenter graphiquement sa mémoire et conclure.

A partir des équations de Yule-Walker, nous avons obtenu les autocorrélations suivantes :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 0.222 \\ \rho_2 &= 0.144 \\ \rho_3 &= 0.051\end{aligned}$$

La mémoire d'un processus stochastique étant mesurée par sa fonction d'autocorrélation, celle-ci est représentée graphiquement par l'autocorrélogramme suivant :



On voit que la mémoire du processus  $y_t$  chute de manière très rapide, c'est une autre preuve en faveur de sa stationnarité.

**Exercice 4 (4 points) :**

Soit  $Z$  une variable aléatoire centrée et réduite (i.e.  $E(Z) = 0$  et  $V(Z) = 1$ ) à partir de laquelle on construit le processus stochastique  $y_t = (-1)^t Z$ .

1. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$  du processus  $y_t$  ;

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E[(-1)^t Z] \\ &= (-1)^t \underbrace{E(Z)}_0 \\ E(y_t) &= 0 \end{aligned}$$

2. Calculer sa variance  $V(y_t)$  ;

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V[(-1)^t Z] \\ &= [(-1)^t]^2 V(Z) \\ &= [(-1)^2]^t \times 1 \\ &= 1^t \times 1 \\ V(y_t) &= 1 \end{aligned}$$

3. Calculer sa fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  ;

$$\begin{aligned} cov(y_t, y_{t-k}) &= E(y_t y_{t-k}) - \underbrace{E(y_t)}_0 \underbrace{E(y_{t-k})}_0 \\ &= E(y_t y_{t-k}) \\ &= E[(-1)^t Z (-1)^{t-k} Z] \\ &= E[(-1)^{2t-k} Z^2] \\ &= (-1)^{2t-k} E(Z^2) \\ &= \frac{(-1)^{2t}}{(-1)^k} \underbrace{V(Z)}_1 \\ &= \frac{[(-1)^2]^t}{(-1)^k} \\ &= \frac{1}{(-1)^k} \\ cov(y_t, y_{t-k}) &= (-1)^k \end{aligned}$$

4. Calculer sa fonction d'autocorrélation  $\rho(y_t; y_{t-k})$  ;

L'espérance mathématique de  $y_t$  est nulle, sa variance est unitaire et sa fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  ne dépend que du décalage temporelle  $k$ . La série temporelle  $y_t$  est en conséquence stationnaire.

$$\begin{aligned} \rho(y_t; y_{t-k}) &= \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{V(y_t)} \\ &= \frac{(-1)^k}{1} \\ \rho(y_t; y_{t-k}) &= (-1)^k \end{aligned}$$

**Exercice 5 (4 points) :**

Soit  $y_t = x_t + \eta_t$  un processus stochastique où  $x_t$  est un autre processus stochastique défini par  $x_t = \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t$  avec  $\alpha$  un réel tel que  $|\alpha| < 1$  et  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  deux bruits blancs indépendants de variances unitaires.

1. Calculer l'espérance mathématique  $E(y_t)$  du processus  $y_t$  ;

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(x_t + \eta_t) \\ &= E(x_t) + \underbrace{E(\eta_t)}_0 \\ &= E(x_t) \end{aligned}$$

L'espérance mathématique  $E(x_t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} E(x_t) &= E(\alpha x_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \alpha E(x_{t-1}) + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_0 \\ E(x_t) &= \alpha E(x_{t-1}) \end{aligned}$$

Sachant que  $x_t$  est stationnaire, on pose  $E(x_t) = \mu$ . On obtient :

$$\mu = \alpha\mu \Leftrightarrow \mu = 0$$

Finalement, l'espérance mathématique de  $y_t$  est donnée par :

$$E(y_t) = E(x_t) = 0$$

2. Calculer sa variance  $V(y_t)$  ;

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(x_t + \eta_t) \\ &= V(\alpha x_{t-1} + \varepsilon_t + \eta_t) \\ &= \alpha^2 V(x_{t-1}) + \underbrace{V(\varepsilon_t)}_1 + \underbrace{V(\eta_t)}_1 + 2\alpha \underbrace{\text{cov}(x_{t-1}, \varepsilon_t)}_0 + 2\alpha \underbrace{\text{cov}(x_{t-1}, \eta_t)}_0 + \underbrace{\text{cov}(\varepsilon_t, \eta_t)}_0 \\ &= \alpha^2 V(x_{t-1}) + 2 \end{aligned}$$

La variance  $V(x_{t-1})$  est donnée par :

$$\begin{aligned} V(x_{t-1}) &= V(\alpha x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \alpha^2 V(x_{t-2}) + \underbrace{V(\varepsilon_{t-1})}_1 \end{aligned}$$

Comme  $x_t$  est stationnaire, on pose  $V(x_t) = \sigma_x^2$ . On obtient :

$$\sigma_x^2 = \alpha^2 \sigma_x^2 + 1$$

On en déduit :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2}$$

Finalement, la variance de  $y_t$  est donnée par :

$$V(y_t) = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + 2 = \frac{2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

3. Calculer sa fonction d'autocovariance  $\text{cov}(y_t; y_{t-k})$  ;

On suppose que  $k > 0$  car si  $k = 0$  on retrouve simplement la variance  $V(y_t)$  que l'on vient de

calculer.

$$\begin{aligned}
 cov(y_t; y_{t-k}) &= E(y_t y_{t-k}) - \underbrace{E(y_t)}_0 \underbrace{E(y_{t-k})}_0 \\
 &= E[(x_t + \eta_t)(x_{t-k} + \eta_{t-k})] \\
 &= E(x_t x_{t-k} + x_t \eta_{t-k} + \eta_t x_{t-k} + \eta_t \eta_{t-k}) \\
 &= E(x_t x_{t-k}) + E(x_t \eta_{t-k}) + E(\eta_t x_{t-k}) + E(\eta_t \eta_{t-k}) \\
 &= cov(x_t, x_{t-k}) + \underbrace{cov(x_t, \eta_{t-k})}_0 + \underbrace{cov(\eta_t, x_{t-k})}_0 + \underbrace{cov(\eta_t, \eta_{t-k})}_0 \\
 &= cov(x_t, x_{t-k})
 \end{aligned}$$

L'autocovariance  $cov(x_t, x_{t-k})$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 cov(x_t, x_{t-k}) &= E(x_t x_{t-k}) - \underbrace{E(x_t)}_0 \underbrace{E(x_{t-k})}_0 \\
 &= E[(\alpha x_{t-1} + \varepsilon_t) x_{t-k}] \\
 &= E(\alpha x_{t-1} x_{t-k} + \varepsilon_t x_{t-k}) \\
 &= \alpha E(x_{t-1} x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k}) \\
 cov(x_t, x_{t-k}) &= \alpha cov(x_{t-1}, x_{t-k}) + \underbrace{cov(\varepsilon_t, x_{t-k})}_0
 \end{aligned}$$

Comme  $x_t$  est stationnaire, on pose  $cov(x_t, x_{t-k}) = \gamma_k$ . On obtient :

$$\gamma_k = \alpha \gamma_{k-1}$$

Par substitution récurrente, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \alpha \gamma_0 \\
 \gamma_2 &= \alpha \gamma_1 = \alpha^2 \gamma_0 \\
 \gamma_3 &= \alpha \gamma_2 = \alpha^3 \gamma_0 \\
 &\vdots \\
 \gamma_k &= \alpha^k \gamma_0
 \end{aligned}$$

Or,

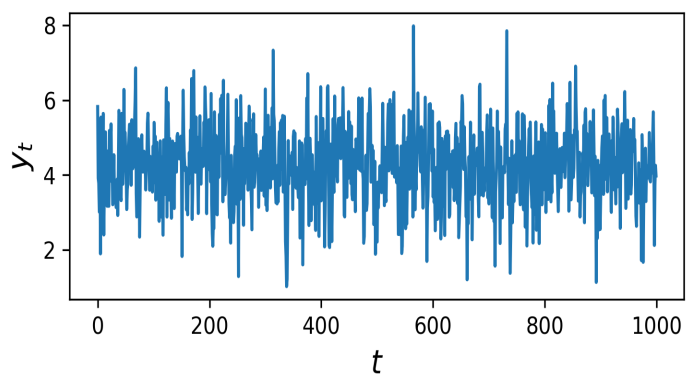
$$\gamma_0 = V(y_t) = \frac{2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

La fonction d'autocovariance  $cov(y_t; y_{t-k})$  devient :

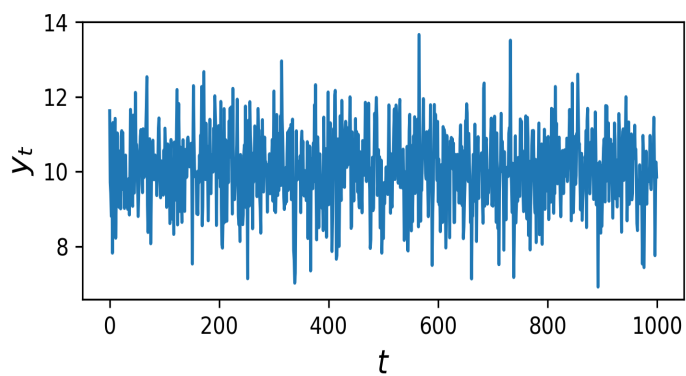
$$cov(y_t; y_{t-k}) = \frac{(2 - \alpha^2)}{1 - \alpha^2} \alpha^k$$

4. Calculer sa fonction d'autocorrélation  $\rho(y_t; y_{t-k})$  ;

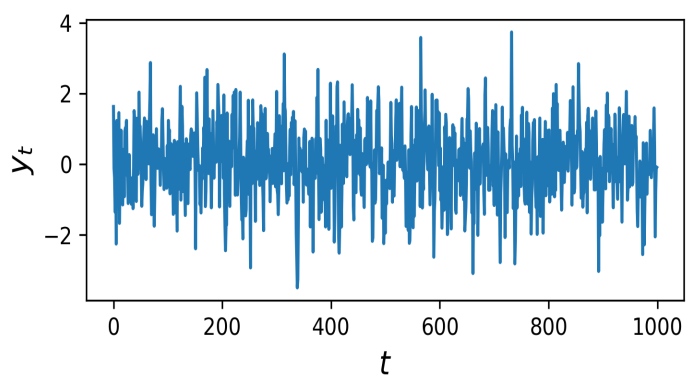
$$\begin{aligned}
 \rho(y_t; y_{t-k}) &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\
 &= \frac{\alpha^k \gamma_0}{\gamma_0} \\
 &= \alpha^k
 \end{aligned}$$



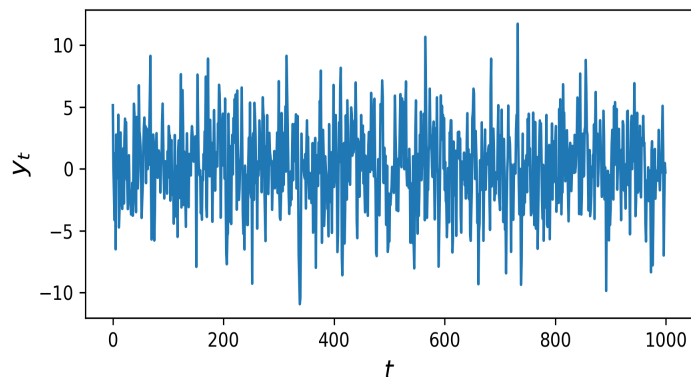
(a)



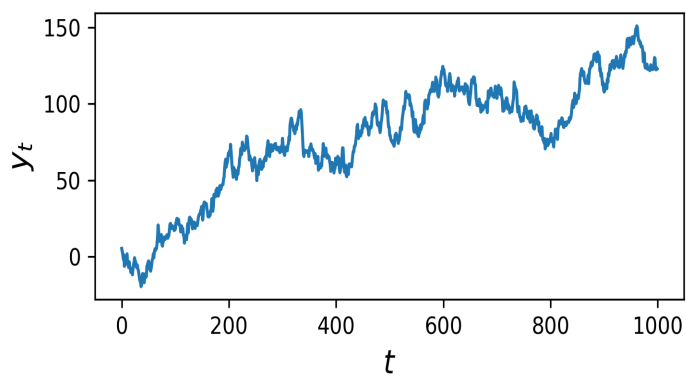
(b)



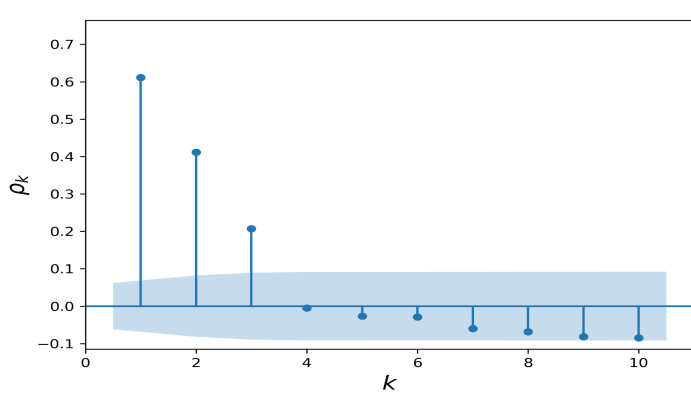
(c)



(d)



(e)



(f)

Traitez les 4 exercices suivants en justifiant vos réponses. (Barème uniforme)

**Exercice 1 :** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Un processus stochastique constant est toujours stationnaire ;  
Un processus stochastique constant s'écrit simplement  $y_t = \theta$ . Calculons ses propriétés statistiques :

— Espérance mathématique :

$$E(y_t) = E(\theta) = \theta$$

— Variance :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= E(y_t^2) - E^2(y_t) \\ &= E(\theta^2) - E^2(\theta) \\ &= \theta^2 - \theta^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

— Fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned} cov(y_t, y_{t-k}) &= E(y_t y_{t-k}) - E(y_t)E(y_{t-k}) \\ &= E(\theta\theta) - E(\theta)E(\theta) \\ &= E(\theta^2) - \theta^2 \\ &= \theta^2 - \theta^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Toutes les propriétés statistiques du processus  $y_t$  sont des constantes finies et indépendantes du temps  $t$ , le processus stochastique  $y_t$  est en conséquence stationnaire.

**Conclusion :** L'affirmation 1. est **vraie**.

2. Tout processus stochastique stationnaire est un bruit blanc ;  
Considérons, par exemple, le processus  $y_t = \theta + \beta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ . Il s'agit d'un MA(1) qui est par construction stationnaire et pourtant ce n'est pas un bruit blanc. Ce contre-exemple montre que tout processus stationnaire, comme c'est le cas du MA(1) ici, n'est pas nécessairement un bruit blanc.

**Conclusion :** L'affirmation 2. est **fausse**.

3. L'espérance mathématique d'un MA(3) est égale à son terme constant ;  
Un MA(3) s'écrit  $y_t = \theta + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \beta_3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . L'espérance mathématique de  $y_t$  est donnée par :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\theta + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \beta_3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t) \\ &= \theta + \beta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_0 + \beta_2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2})}_0 + \beta_3 \underbrace{E(\varepsilon_{t-3})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_0 \\ &= \theta \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de ce MA(3), et de manière générale de tout MA(q), est égale à son terme constant  $\theta$ .

**Conclusion :** L'affirmation 3. est **vraie**.

4. Le bruit blanc est un processus stochastique sans mémoire.  
La mémoire d'un processus stochastique  $y_t$  est mesurée par sa fonction d'auto-corrélation  $\rho(y_t, y_{t-k})$ . Celle-ci s'obtient en rapportant sa fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  au produit des écarts-types. Or, dans le cas particulier d'un bruit blanc, la fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$  est toujours nulle. Il en résulte que la fonction d'auto-corrélation

$\rho(y_t, y_{t-k})$  l'est également. Le bruit blanc est donc sans mémoire puisque sa mémoire est toujours nulle.

**Conclusion :** L'affirmation 4. est **vraie**.

**Exercice 2 :** Faire correspondre chacun des processus suivants à l'une des figures ci-dessous.

1.  $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0;1)$ ;
2.  $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0;1)$ ;
3.  $y_t = 0.9y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0;1)$ ;
4.  $y_t = 0.05y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0;1)$ .

Les 4 processus ci-dessus sont des AR(1) donnés par  $y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ . Ils sont tous stationnaires puisque leur coefficient autorégressif  $\alpha$  est en valeur absolue strictement inférieure à 1, et ils sont tous centrés ( $E(y_t) = 0$ ) du fait de l'absence d'un terme constant. Cela simplifiera le calcul de la fonction d'autocovariance. Calculons à présent la fonction d'autocovariance  $\text{cov}(y_t, y_{t-k}) \equiv \gamma_k$  (pour  $k > 0$ ) en se rappelant que les 4 processus sont centrés :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(y_t y_{t-k}) \\ &= E[(\alpha y_{t-1} + \varepsilon_t) y_{t-k}] \\ &= E(\alpha y_{t-1} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}) \\ &= \alpha \underbrace{E(y_{t-1} y_{t-k})}_{\gamma_{k-1}} + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k})}_0 \\ &= \alpha \gamma_{k-1} \end{aligned}$$

Par substitution récursive, on aboutit à la formule générale suivante de la fonction d'autocovariance :

$$\gamma_k = \alpha^k \gamma_0$$

où  $\gamma_0$  désigne la variance des processus  $y_t$ . Finalement, la fonction d'auto-corrélation  $\rho_k$  (pour  $k > 0$ ) est donnée par :

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \alpha^k$$

En remplaçant le coefficient autorégressif  $\alpha$  par -0.5, 0.5, 0.9 et 0.05 respectivement, on obtient les fonctions d'auto-corrélation de chacun des 4 processus ci-dessus. Celles-ci sont présentées dans le tableau suivant :

$\rho_k$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.05$
$k = 1$	-0.5000	0.5000	0.9000	0.0500
$k = 2$	0.2500	0.2500	0.8100	0.0025
$k = 3$	-0.1250	0.1250	0.7290	0.0001
$k = 4$	0.0625	0.0625	0.6561	0.0000
$k = 5$	-0.0313	0.0313	0.5905	0.0000
$k = 6$	0.0156	0.0156	0.5314	0.0000
$k = 7$	-0.0078	0.0078	0.4783	0.0000
$k = 8$	0.0039	0.0039	0.4305	0.0000
$k = 9$	-0.0020	0.0020	0.3874	0.0000
$k = 10$	0.0010	0.0010	0.3487	0.0000

1. Pour  $\alpha = -0.5$ , la fonction d'auto-corrélation  $\rho_k$  baisse rapidement en valeur absolue tout en alternant de signe. Cela correspond à la figure (d) ;
2. Pour  $\alpha = 0.5$ , la fonction d'auto-corrélation  $\rho_k$  baisse rapidement tout en restant positive. Cela correspond à la figure (b) ;

3. Pour  $\alpha = -0.9$ , la fonction d'auto-corrélation  $\rho_k$  baisse lentement tout en restant positive. Cela correspond à la figure (a) ;
4. Pour  $\alpha = 0.05$ , la fonction d'auto-corrélation  $\rho_k$  est pratiquement nulle. Cela correspond à la figure (c).

**Exercice 3 :** Soit  $y_t = 3 + 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0;2)$ .

1. Vérifier la stationnarité de  $y_t$  ;

$$\begin{aligned} y_t &= 3 + 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \\ y_t - 0.7y_{t-1} + 0.1y_{t-2} &= 3 + \varepsilon_t \\ y_t - 0.7Ly_t + 0.1L^2y_t &= 3 + \varepsilon_t \\ y_t \underbrace{(1 - 0.7L + 0.1L^2)}_{\alpha(L)} &= 3 + \varepsilon_t \end{aligned}$$

L'équation caractéristique  $\alpha(z) = 0$  associée à ce modèle s'écrit :

$$1 - 0.7z + 0.1z^2 = 0$$

ou encore (en multipliant les deux membres par 10) :

$$z^2 - 7z + 10 = 0$$

Les deux racines de cette équation caractéristique, à savoir 2 et 5, sont strictement supérieures à 1 en valeurs absolues, le processus  $y_t$  est en conséquence stationnaire.

2. Calculer son espérance mathématique  $E(y_t)$  ;

On vient de montrer que  $y_t$  est stationnaire. On pose  $E(y_t) = \mu$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{E(y_t)}_{\mu} &= E(3 + 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t) \\ &= 3 + 0.7 \underbrace{E(y_{t-1})}_{\mu} - 0.1 \underbrace{E(y_{t-2})}_{\mu} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_0 \\ \mu(1 - 0.7 + 0.1) &= 3 \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{3}{1 - 0.7 + 0.1} = 7.5$$

3. Écrire ses équations de Yule-Walker ;

En considérant la version centrée du processus  $y_t$  (i.e.  $y_t = 0.7y_{t-1} - 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$ ), la fonction d'autocovariance  $cov(y_t, y_{t-k})$ , que l'on peut noter  $\gamma_k$  puisque le processus  $y_t$  est stationnaire, s'écrit simplement  $\gamma_k = E(y_t y_{t-k})$ . On obtient :

$$\begin{aligned} y_t y_{t-k} &= 0.7y_{t-1}y_{t-k} - 0.1y_{t-2}y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k} \\ E(y_t y_{t-k}) &= E(0.7y_{t-1}y_{t-k} - 0.1y_{t-2}y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}) \\ \underbrace{E(y_t y_{t-k})}_{\gamma_k} &= 0.7 \underbrace{E(y_{t-1}y_{t-k})}_{\gamma_{k-1}} - 0.1 \underbrace{E(y_{t-2}y_{t-k})}_{\gamma_{k-2}} + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k})}_{?} \end{aligned}$$

Calculons d'abord  $E(\varepsilon_t y_{t-k})$  :

$$\begin{aligned} y_{t-k} &= 0.7y_{t-k-1} - 0.1y_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k} \\ \varepsilon_t y_{t-k} &= 0.7\varepsilon_t y_{t-k-1} - 0.1\varepsilon_t y_{t-k-2} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k} \\ E(\varepsilon_t y_{t-k}) &= E(0.7\varepsilon_t y_{t-k-1} - 0.1\varepsilon_t y_{t-k-2} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) \\ E(\varepsilon_t y_{t-k}) &= 0.7E(\varepsilon_t y_{t-k-1}) - 0.1E(\varepsilon_t y_{t-k-2}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) \end{aligned}$$

Si  $k = 0$ , on a :

$$E(\varepsilon_t y_t) = 0.7 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_0 - 0.1 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-2})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_t)}_{V(\varepsilon)=2}$$

Si  $k > 0$ , on a :

$$E(\varepsilon_t y_{t-k}) = 0.7 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k-1})}_0 - 0.1 \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k-2})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_{t-k} \varepsilon_t)}_0$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0.7\gamma_{-1} - 0.1\gamma_{-2} + 2 \\ \gamma_1 &= 0.7\gamma_0 - 0.1\gamma_{-1} \\ \gamma_2 &= 0.7\gamma_1 - 0.1\gamma_0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0.7\gamma_1 - 0.1\gamma_2 + 2 \\ \gamma_1 &= 0.7\gamma_0 - 0.1\gamma_1 \\ \gamma_2 &= 0.7\gamma_1 - 0.1\gamma_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En divisant par  $\gamma_0$ , on obtient les équations de Yule-Walker suivantes :

$$1 = 0.7\rho_1 - 0.1\rho_2 + 2/\gamma_0 \tag{1}$$

$$\rho_1 = 0.7 - 0.1\rho_1 \tag{2}$$

$$\rho_2 = 0.7\rho_1 - 0.1 \tag{3}$$

$$\vdots \tag{4}$$

4. Calculer sa fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  ;  
 A partir de l'équation (2), on obtient la valeur de  $\rho_1$  :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.7 - 0.1\rho_1 \\ \rho_1(1 + 0.1) &= 0.7 \\ \rho_1 &= \frac{0.7}{1.1} = 0.636 \end{aligned}$$

En substituant la valeur de  $\rho_1$  dans l'équation (3), on obtient la valeur de  $\rho_2$  :

$$\rho_2 = 0.7 \times 0.636 - 0.1 = 0.345$$

Enfin, en substituant les valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans l'équation (1), on obtient la valeur de  $\gamma_0$  :

$$\begin{aligned} 1 &= 0.7 \times 0.636 - 0.1 \times 0.345 + 2/\gamma_0 \\ 1 &= 0.411 + 2/\gamma_0 \\ 2/\gamma_0 &= 0.589 \\ \gamma_0 &= 2/0.589 = 3.396 \end{aligned}$$

Comme  $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ , on peut à partir des valeurs de  $\rho_k$  et de  $\gamma_0$  retrouver celles de  $\gamma_k$  en appliquant simplement la formule  $\gamma_k = \rho_k \times \gamma_0$ , ainsi :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \rho_1 \times \gamma_0 = 0.636 \times 3.396 = 2.160 \\ \gamma_2 &= \rho_2 \times \gamma_0 = 0.345 \times 3.396 = 1.172 \end{aligned}$$

**Exercice 4 :** Soit  $y_t = \theta + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0; \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $E(y_t) = 2$  et  $V(y_t) = 6$ .

1. Trouver la valeur de  $\theta$ ;

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\theta + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t) \\ &= \theta + 0.4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_0 - 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_0 \\ E(y_t) &= \theta \end{aligned}$$

Comme  $E(y_t) = 2$ , on conclut que  $\theta = 2$

2. Trouver la valeur de  $\sigma_\varepsilon^2$ ;

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(\theta + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t) \\ &= 0.4^2 \underbrace{V(\varepsilon_{t-1})}_{\sigma_\varepsilon^2} + 0.2^2 \underbrace{V(\varepsilon_{t-2})}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{V(\varepsilon_t)}_{\sigma_\varepsilon^2} + 2(0.4)(-0.2) \underbrace{\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})}_0 + \\ &\quad 2(0.4)1 \underbrace{\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)}_0 + 2(-0.2)1 \underbrace{\text{cov}(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t)}_0 \\ &= 0.16\sigma_\varepsilon^2 + 0.04\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ V(y_t) &= 1.20\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Comme  $V(y_t) = 6$ , on conclut que  $\sigma_\varepsilon^2 = 6/1.20 = 5$

3. Calculer les autocorrélations d'ordres 1 et 2;

Calculons d'abord la fonction d'autocovariance du processus stochastique  $y_t$ . En considérant la version centré de ce dernier, la fonction d'autocovariance  $\text{cov}(y_t, y_{t-k})$ , que l'on peut désigner par  $\gamma_k$  puisque  $y_t$  est stationnaire, est simplement  $E(y_t y_{t-k})$ . On obtient :

$$\begin{aligned} y_t &= 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \\ y_t y_{t-k} &= 0.4\varepsilon_{t-1} y_{t-k} - 0.2\varepsilon_{t-2} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k} \\ E(y_t y_{t-k}) &= E(0.4\varepsilon_{t-1} y_{t-k} - 0.2\varepsilon_{t-2} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}) \\ \gamma_k &= 0.4E(\varepsilon_{t-1} y_{t-k}) - 0.2E(\varepsilon_{t-2} y_{t-k}) + E(\varepsilon_t y_{t-k}) \end{aligned}$$

— Pour  $k = 1$  :

$$\gamma_1 = 0.4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1})}_? - 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2} y_{t-1})}_? + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_0$$

Calculons d'abord  $E(\varepsilon_{t-1}y_{t-1})$  :

$$\begin{aligned} y_{t-1} &= 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-1}y_{t-1} &= 0.4\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1} \\ E(\varepsilon_{t-1}y_{t-1}) &= E(0.4\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}) \\ &= 0.4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})}_0 - 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1})}_{V(\varepsilon_{t-1})=5} \\ E(\varepsilon_{t-1}y_{t-1}) &= 5 \end{aligned}$$

Calculons ensuite  $E(\varepsilon_{t-2}y_{t-1})$  :

$$\begin{aligned} y_{t-1} &= 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-2}y_{t-1} &= 0.4\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1} \\ E(\varepsilon_{t-2}y_{t-1}) &= E(0.4\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}) \\ &= 0.4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2})}_{V(\varepsilon_{t-2})=5} - 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1})}_0 \\ E(\varepsilon_{t-2}y_{t-1}) &= 0.4 \times 5 = 2 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0.4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}y_{t-1})}_5 - 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}y_{t-1})}_2 + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_0 \\ &= 0.4 \times 5 - 0.2 \times 2 = 1.6 \end{aligned}$$

— Pour  $k = 2$  :

$$\gamma_2 = 0.4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}y_{t-2})}_0 - 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}y_{t-2})}_? + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-2})}_0$$

Calculons  $E(\varepsilon_{t-2}y_{t-2})$  :

$$\begin{aligned} y_{t-2} &= 0.4\varepsilon_{t-3} - 0.2\varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-2} \\ \varepsilon_{t-2}y_{t-2} &= 0.4\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3} - 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2} \\ E(\varepsilon_{t-2}y_{t-2}) &= E(0.4\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3} - 0.2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2}) \\ &= 0.4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3})}_0 - 0.2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-4})}_0 + \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2})}_{V(\varepsilon_{t-2})=5} \end{aligned}$$

Finalement,

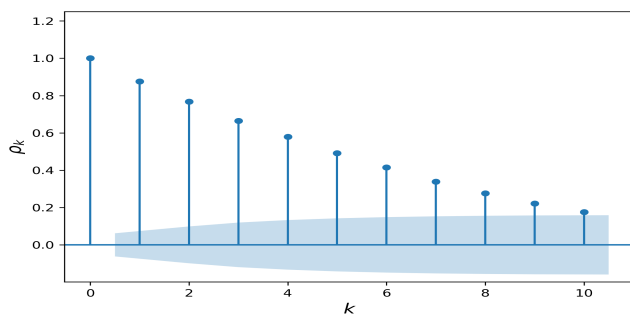
$$\gamma_2 = -0.2 \times 5 = -1$$

Les auto-corrélations  $\rho_k$  s'obtiennent en rapportant les autocovariances  $\gamma_k$  à la variance  $V(y_t) = \gamma_0 = 6$  :

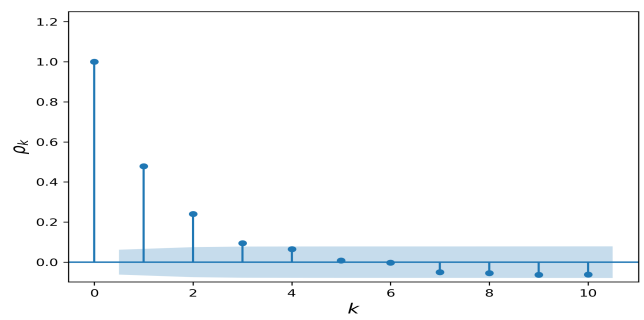
$$\begin{aligned} \rho_1 &= \gamma_1/\gamma_0 = 1.6/6 = 0.267 \\ \rho_2 &= \gamma_2/\gamma_0 = -1/6 = -0.167 \end{aligned}$$

4. Donner, sans faire de calculs, les autocorrélations d'ordres 3 et 4.

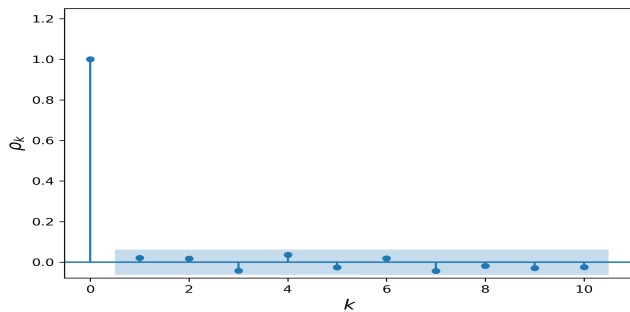
Comme il s'agit d'un MA(2), toutes les auto-corrélations d'ordres strictement supérieurs à 2 s'annulent. En particulier,  $\rho_3 = \rho_4 = 0$ .



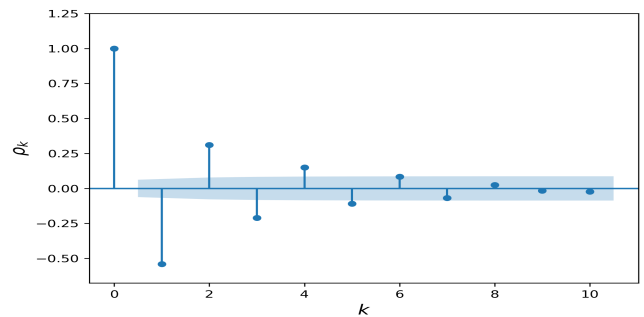
(a)



(b)



(c)



(d)

# Troisième partie

## Annexe

## Résolution des équations caractéristiques

La résolution d'une équation du premier degré à une inconnue est directe et ne demande aucun effort particulier. En revanche, la résolution d'une équation du second degré se complique légèrement puisqu'il faut d'abord calculer son discriminant et ensuite calculer ses racines qui peuvent être des nombres complexes si le discriminant est négatif, encore faut-il être familier avec ces nombres. Cependant, dès que le degré de l'équation dépasse 2, la résolution n'est généralement plus une tâche anodine et l'on a souvent recours à des algorithmes numériques<sup>1</sup>. Néanmoins, sa résolution devient relativement simple si l'on arrive à factoriser son membre gauche en passant, par exemple, par une identité remarquable et exploiter le fait que le produit de deux facteurs ou plus est nul si et seulement si au moins l'un d'entre eux l'est. Dans le cas particulier d'une équation du troisième degré, on commence par chercher une solution triviale de l'équation en question en essayant les diviseurs (positifs et négatifs) du terme constant puis diviser selon les puissances décroissantes le membre gauche de l'équation par le polynôme de degré 1 obtenu en soustrayant la solution triviale de l'inconnue.

### Ex. 1 — Stationnarité des processus

1.  $y_t = 1 + 1.5y_{t-1} - 2y_{t-2} + 0.5y_{t-3} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$z^3 - 4z^2 + 3z - 2 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue. Aucun diviseur du terme constant (-2) n'est une solution triviale de cette équation, ceci est le signe que certaines de ses racines n'appartiennent pas à l'ensemble des nombres réels. C'est typiquement le genre d'équations qui ne peuvent être résolues manuellement et nécessitent l'utilisation d'une calculatrice scientifique ou d'un logiciel. La résolution numérique de cette équation fournit l'ensemble des solutions suivant :

$$\mathbb{S} = \{ 3.2695 ; 0.3652 - 0.6916i ; 0.3652 + 0.6916i \}$$

2.  $y_t = 1 - 0.6y_{t-1} + 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$5z^2 - 6z - 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 5 \times (-10) = 236 > 0$$

---

1. Plus précisément, on parle plutôt de *méthodes symboliques* exécutées à l'aide logiciels dédiés à cet effet tels que MATHÉMATICA.

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{6 - \sqrt{236}}{2 \times 5} \approx -0.9362 \qquad z_2 = \frac{6 + \sqrt{236}}{2 \times 5} \approx 2.1362$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -0.9362 ; 2.1362 \}$$

3.  $y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

Ce modèle est une moyenne mobile, il ne dispose d'aucune partie autorégressive. Il n'y a donc pas d'équation caractéristique à résoudre.

4.  $y_t = 3 - 0.7y_{t-1} + 0.4y_{t-2} - 0.7\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$4z^2 - 7z - 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 4 \times (-10) = 209 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{7 - \sqrt{209}}{2 \times 4} \approx -0.9321 \qquad z_2 = \frac{7 + \sqrt{209}}{2 \times 4} \approx 2.6821$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -0.9321 ; 2.6821 \}$$

5.  $y_t = -0.8y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} - 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$3z^2 - 8z - 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-10) = 184 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{8 - \sqrt{184}}{2 \times 3} \approx -0.9274 \qquad z_2 = \frac{8 + \sqrt{184}}{2 \times 3} \approx 3.5941$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -0.9274 ; 3.5941 \}$$

6.  $y_t = -1 + 2y_{t-1} - 1.25y_{t-2} + 0.25y_{t-3} + 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue. Parmi les diviseurs du terme constant (-4), à savoir l'ensemble  $\{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ , 2 est une solution triviale de l'équation ci-dessus. La division selon les puissances décroissantes du polynôme  $z^3 - 5z^2 + 8z - 4$  par le polynôme  $z - 2$  donne  $z^2 - 3z + 2$  avec un reste nul. L'équation précédente peut en conséquence être factorisée comme suit :

$$(z - 2)(z^2 - 3z + 2) = 0$$

Il en résulte que  $z = 2$  ou  $z^2 - 3z + 2 = 0$ . Les racines de cette dernière équation sont 1 et 2. L'ensemble des solutions de l'équation initiale est :

$$\mathbb{S} = \{ 1 ; 2 \}$$

7.  $y_t = 0.4 + 1.2y_{t-1} - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$1 - 1.2z = 0$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à une seule inconnue, sa résolution est directe :

$$z = \frac{1}{1.2} \approx 0.8333$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 0.8333 \}$$

8.  $y_t = 1.15y_{t-1} - 0.425y_{t-2} + 0.05y_{t-3} - 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle

s'écrit :

$$2z^3 - 17z^2 + 46z - 40 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue. Parmi les diviseurs du terme constant (-40), 2 est une solution triviale de l'équation ci-dessus. La division selon les puissances décroissantes du polynôme  $2z^3 - 17z^2 + 46z - 40$  par le polynôme  $z - 2$  donne  $2z^2 - 13z + 20$  avec un reste nul. L'équation précédente peut en conséquence être factorisée comme suit :

$$(z - 2)(2z^2 - 13z + 20) = 0$$

Il en résulte que  $z = 2$  ou  $2z^2 - 13z + 20 = 0$ . Les racines de cette dernière équation sont 2.5 et 4. L'ensemble des solutions de l'équation initiale est :

$$\mathbb{S} = \{ 2 ; 2,5 ; 4 \}$$

9.  $y_t = 0.5 - 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Ce modèle est une moyenne mobile, il ne dispose d'aucune partie autorégressive. Il n'y a donc pas d'équation caractéristique à résoudre.

10.  $y_t = 2.25y_{t-1} - 0.75y_{t-2} + 0.0625y_{t-3} + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2} + 0.1\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$z^3 - 12z^2 + 36z - 16 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue. Parmi les diviseurs du terme constant (-16), 4 est une solution triviale de l'équation ci-dessus. La division selon les puissances décroissantes du polynôme  $z^3 - 12z^2 + 36z - 16$  par le polynôme  $z - 4$  donne  $z^2 - 8z + 4$  avec un reste nul. L'équation précédente peut en conséquence être factorisée comme suit :

$$(z - 4)(z^2 - 8z + 4) = 0$$

Il en résulte que  $z = 4$  ou  $z^2 - 8z + 4 = 0$ . Les racines de cette dernière équation sont 0.5359 et 7.4641. L'ensemble des solutions de l'équation initiale est :

$$\mathbb{S} = \{ 0.5359 ; 4 ; 7.4641 \}$$

## Ex. 2 — Stationnarité et propriétés statistiques des processus AR

1.  $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$1 - 0.5z = 0$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à une seule inconnue sa résolution est directe :

$$z = \frac{1}{0.5} = 2$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 2 \}$$

2.  $y_t = 2 - 0.6y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$3z^2 - 6z - 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-10) = 156 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{6 - \sqrt{156}}{2 \times 3} \approx -1.0817 \qquad z_2 = \frac{6 + \sqrt{156}}{2 \times 3} \approx 3.0817$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -1.0817 ; 3.0817 \}$$

3.  $y_t = 1 + 1.5y_{t-1} - 0.75y_{t-2} + 0.125y_{t-3} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue. Parmi les diviseurs du terme constant (-8), 2 est une solution triviale de l'équation ci-dessus. La division selon les puissances décroissantes du polynôme  $z^3 - 6z^2 + 12z - 8$  par le polynôme  $z - 2$  donne  $z^2 - 4z + 4$  avec un reste nul. L'équation précédente peut en conséquence être factorisée comme suit :

$$(z - 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$$

Il en résulte que  $z = 2$  ou  $z^2 - 4z + 4 = 0$ . La racine double de cette dernière équation est 2. L'ensemble des solutions de l'équation initiale est :

$$\mathbb{S} = \{ 2 \}$$

4.  $y_t = -0.7y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$2z^2 - 7z - 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 129 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{4 - \sqrt{129}}{2 \times 2} \approx -1.8395 \qquad z_2 = \frac{4 + \sqrt{129}}{2 \times 2} \approx 3.8395$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -1.8395 ; 3.8395 \}$$

5.  $y_t = 1.25y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + 0.0625y_{t-3} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$z^3 - 8z^2 + 20z - 16 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue. Parmi les diviseurs du terme constant (-16), 2 est une solution triviale de l'équation ci-dessus. La division selon les puissances décroissantes du polynôme  $z^3 - 8z^2 + 20z - 16$  par le polynôme  $z - 2$  donne  $z^2 - 6z + 8$  avec un reste nul. L'équation précédente peut en conséquence être factorisée comme suit :

$$(z - 2)(z^2 - 6z + 8) = 0$$

Il en résulte que  $z = 2$  ou  $z^2 - 6z + 8 = 0$ . Les racines de cette dernière équation sont 2 et 4. L'ensemble des solutions de l'équation initiale est :

$$\mathbb{S} = \{ 2 ; 4 \}$$

6.  $y_t = 3 + 0.6y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$z^2 + 3z - 5 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord

le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 29 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2 \times 1} \approx -4.1926 \qquad z_2 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2 \times 1} \approx 2.1926$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -4.1926 ; 2.1926 \}$$

7.  $y_t = 2 + 1.2y_{t-1} - 0.48y_{t-2} + 0.064y_{t-3} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$8z^3 - 60z^2 + 150z - 125 = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré à une seule inconnue, elle peut s'écrire comme suit :

$$(2z)^3 - 15(2z)^2 + 75(2z) - 125 = 0$$

En posant  $x = 2z$ , on obtient :

$$x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 0$$

Parmi les diviseurs du terme constant (-125), 5 est une solution triviale de l'équation ci-dessus. La division selon les puissances décroissantes du polynôme  $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$  par le polynôme  $x - 5$  donne  $x^2 - 10x + 25$  avec un reste nul. L'équation précédente peut en conséquence être factorisée comme suit :

$$(x - 5)(x^2 - 10x + 25) = 0$$

Il en résulte que  $x = 5$  ou  $x^2 - 10x + 25 = 0$ . La racine double de cette dernière équation est 5. Comme  $x = 2z = 5$ , on conclut que l'ensemble des solutions de l'équation initiale est :

$$\mathbb{S} = \{ 2, 5 \}$$

8.  $y_t = 0.25y_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$1 - 0.25z = 0$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à une seule inconnue, sa résolution est directe :

$$z = \frac{1}{0.25} = 4$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 4 \}$$

9.  $y_t = -1 + 0.4y_{t-1} - 0.03y_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$3z^2 - 40z + 100 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \times 3 \times 100 = 400 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{40 - \sqrt{400}}{2 \times 3} \approx 3.3333 \qquad z_2 = \frac{40 + \sqrt{400}}{2 \times 3} = 10$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 3.3333 ; 10 \}$$

10.  $y_t = 0.3y_{t-1} - 0.02y_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de ce modèle s'écrit :

$$z^2 - 15z + 50 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \times 1 \times 50 = 25 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{15 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = 5 \qquad z_2 = \frac{15 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 10$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 5 ; 10 \}$$

**Ex. 3 — Stationnarité et propriétés statistiques des processus ARMA**

1.  $y_t = 1 - 0.5y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$3z^2 - 5z - 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-10) = 145 > 0$$

Cette équation admet deux racines complexes distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{5 - \sqrt{145}}{2 \times 3} \approx -1.1736 \qquad z_2 = \frac{5 + \sqrt{145}}{2 \times 3} \approx 2.8403$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -1.1736 ; 2.8403 \}$$

2.  $y_t = -0.8y_{t-1} - 0.1y_{t-2} - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$z^2 + 8z + 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 10 = 24 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{-8 - \sqrt{24}}{2 \times 1} \approx -6.4495 \qquad z_2 = \frac{-8 + \sqrt{24}}{2 \times 1} \approx -1.5505$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -6.4495 ; -1.5505 \}$$

3.  $y_t = 2 + 0.2y_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$1 - 0.2z = 0$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à une seule inconnue, sa résolution est directe :

$$z = \frac{1}{0.2} = 5$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 5 \}$$

4.  $y_t = 3 - 0.2y_{t-1} + 0.01y_{t-2} - 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$z^2 - 20z - 100 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times (-100) = 800$$

Cette équation admet une racine réelle double  $z$  :

$$z_1 = \frac{20 - \sqrt{800}}{2 \times 1} \approx -4.1421 \qquad z_2 = \frac{20 + \sqrt{800}}{2 \times 1} \approx 24.1421$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -4.1421 ; 24.1421 \}$$

5.  $y_t = 1 - 0.6y_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$1 + 0.6z = 0$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à une seule inconnue, sa résolution est directe :

$$z = -\frac{1}{0.6} \approx -1.6667$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -1.6667 \}$$

6.  $y_t = -1 + 0.1y_{t-1} + 0.08y_{t-2} - 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$8z^2 + 10z - 100 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 8 \times (-100) = 3300 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{-10 - \sqrt{3300}}{2 \times 8} \approx -4.2154 \qquad z_2 = \frac{-10 + \sqrt{3300}}{2 \times 8} \approx 2.9654$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -4.2154 ; 2.9654 \}$$

7.  $y_t = 0.25y_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$1 - 0.25z = 0$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à une seule inconnue, sa résolution est directe :

$$z = \frac{1}{0.25} = 4$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 4 \}$$

8.  $y_t = 3 - 0.1y_{t-1} + 0.3y_{t-2} - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$3z^2 - z - 10 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-10) = 121 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{121}}{2 \times 3} = -2 \qquad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{121}}{2 \times 3} = 5$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -2 ; 5 \}$$

9.  $y_t = 1 + 0.8y_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$1 - 0.8z = 0$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à une seule inconnue, sa résolution est directe :

$$z = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ 1.25 \}$$

10.  $y_t = -2 + 0.65y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

L'équation caractéristique associée au polynôme retard de la partie autorégressive de ce modèle s'écrit :

$$4z^2 + 13z - 20 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une seule inconnue, sa résolution nécessite d'abord le calcul du discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 4 \times (-20) = 489 > 0$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{-13 - \sqrt{489}}{2 \times 4} \approx -4.3892 \qquad z_2 = \frac{-13 + \sqrt{489}}{2 \times 4} \approx 1.1392$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathbb{S} = \{ -4.3892 ; 1.1392 \}$$