

# 5

## DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

<b>5.1</b>	<b>Variables aléatoires</b>	<b>291</b>
<b>5.2</b>	<b>Développer des distributions de probabilité discrètes</b>	<b>294</b>
<b>5.3</b>	<b>Espérance mathématique et variance</b>	<b>301</b>
<b>5.4</b>	<b>La loi binomiale</b>	<b>308</b>
<b>5.5</b>	<b>La loi de Poisson</b>	<b>321</b>
<b>5.6</b>	<b>La loi hypergéométrique</b>	<b>326</b>

## STATISTIQUES APPLIQUÉES

### CITIBANK\*

#### *Long Island City, État de New York*

Citibank, la banque de détail, filiale du groupe Citigroup, offre un large éventail de services financiers dont la gestion de comptes-courants et de comptes-épargne, des prêts et emprunts-logement, des services d'assurance et de placement. Citibank offre ses services via un système unique, Citibanking.

Citibank fut l'une des premières banques aux États-Unis à mettre en place des distributeurs automatiques. Les distributeurs automatiques de Citibanking, situés dans un Centre Bancaire Citicard (CBC), permettent aux particuliers d'effectuer leurs opérations bancaires 24 heures sur 24 et 7 jours sur 7. Plus de 150 fonctions bancaires, du dépôt à la gestion d'actifs, sont facilement réalisables. Les clients de Citibank utilisent les automates pour effectuer 80 % de leurs transactions.

Chaque CBC fonctionne comme une file d'attente, les clients arrivant aléatoirement pour se servir d'un distributeur automatique. Si tous les distributeurs sont occupés, les clients attendent les uns derrière les autres. Des études périodiques sur les capacités d'accueil des CBC sont menées, afin d'analyser les temps d'attente des clients et déterminer si l'installation de distributeurs automatiques supplémentaires est nécessaire.

Les données collectées par Citibank montrent que l'arrivée aléatoire de clients suit une loi de probabilité dite loi de Poisson. En utilisant cette loi de probabilité, Citibank peut calculer la probabilité qu'un certain nombre de clients arrivent à un CBC au cours d'une période de temps donnée et déterminer ainsi combien de distributeurs automatiques sont nécessaires pour répondre à la demande. Par exemple, soit  $X$  le nombre de clients arrivant au cours d'une minute. Supposons qu'un CBC particulier ait un taux d'arrivée moyen de deux clients par minute. Les chiffres ci-dessous correspondent aux probabilités que  $x$  clients arrivent au cours d'une minute.

$x$	Probabilité
0	0,1353
1	0,2707
2	0,2707
3	0,1804
4	0,0902
5 ou plus	0,0527

Les distributions (ou lois) de probabilité discrètes, comme celle utilisée par Citibank, sont l'objet de ce chapitre. En plus de la loi de Poisson, nous étudierons les lois binomiale et hypergéométrique et verrons de quelle manière elles peuvent fournir une information probabiliste utile.

\* Les auteurs remercient Madame Stacey Karter, de Citibank, de leur avoir fourni ces statistiques appliquées.

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'étude des probabilités en introduisant les concepts de variable aléatoire et de distribution ou loi de probabilité. Les variables aléatoires et les distributions de probabilité sont des modèles pour des populations de données. Nous nous concentrons dans ce chapitre sur les distributions de probabilité discrètes.

Nous introduirons deux types de distribution de probabilité discrète. Le premier type est un tableau avec une colonne pour les valeurs de la variable aléatoire et une seconde

colonne pour les probabilités associées. Nous verrons que les règles pour attribuer des probabilités aux résultats d'expérience introduites au chapitre 4, sont utilisées pour attribuer des probabilités à une telle distribution. Le second type de distribution de probabilité discrète utilise une fonction mathématique spéciale pour calculer les probabilités pour chaque valeur que peut prendre la variable aléatoire. Nous présenterons trois distributions de probabilité discrètes de ce type (qualifiées de lois de probabilité discrètes) qui sont fréquemment utilisées en pratique : la loi binomiale, la loi de Poisson et la loi hypergéométrique.

## 5.1 VARIABLES ALÉATOIRES

Dans le chapitre 4, nous avons défini le concept d'expérience et de résultats de l'expérience. Une variable aléatoire fournit un moyen de décrire de façon numérique les résultats d'une expérience. Les variables aléatoires prennent obligatoirement des valeurs numériques.

► **Variable aléatoire**

Une **variable aléatoire** est une description numérique du résultat d'une expérience.

Les variables aléatoires prennent des valeurs numériques.

En fait, une variable aléatoire associe une valeur numérique à chaque résultat possible de l'expérience. La valeur numérique particulière d'une variable aléatoire dépend du résultat de l'expérience. Une variable aléatoire est soit **discrète** soit **continue**, selon les valeurs numériques qu'elle prend.

### 5.1.1 Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire qui peut prendre soit un nombre fini de valeurs, soit un ensemble infini de valeurs dénombrables, telles que 0, 1, 2, ... est dite **variable aléatoire discrète**. Considérons par exemple un comptable qui passe l'examen d'expert-comptable agréé. L'examen comporte quatre parties. Nous pouvons définir la variable aléatoire discrète  $X$  comme le nombre de parties de l'examen réussies. Cette variable aléatoire discrète peut prendre les valeurs finies 0, 1, 2, 3 ou 4<sup>1</sup>.

Un autre exemple de variable aléatoire discrète est le nombre de voitures arrivant à un poste de péage. La variable aléatoire en question  $X$  correspond au nombre de voitures arrivant au poste de péage au cours d'une journée. Les valeurs possibles de  $X$  appartiennent à l'ensemble des nombres entiers positifs 0, 1, 2, etc.  $X$  est donc une variable aléatoire discrète dont les valeurs appartiennent à cet ensemble infini.

Bien que de nombreuses expériences aient des résultats naturellement décrits par des valeurs numériques, ce n'est pas toujours le cas. Prenons l'exemple d'une enquête où l'on demande à un individu de se souvenir d'une publicité télévisée. Cette expérience a

<sup>1</sup> NDT : La lettre majuscule  $X$  désigne une variable aléatoire, alors que la lettre minuscule  $x$  désigne les valeurs que peut prendre cette variable aléatoire.

**Tableau 5.1** Exemples de variables aléatoires discrètes

Expérience	Variable aléatoire ( $X$ )	Valeurs que peut prendre la variable aléatoire
Contacter cinq clients	Nombre de clients qui passent commande	0, 1, 2, 3, 4, 5
Inspecter une cargaison de 50 radios	Nombre de radios défectueuses	0, 1, 2, ..., 49, 50
Gérer un restaurant pendant une journée	Nombre de clients	0, 1, 2, 3, ...
Vendre une automobile	Sexe des clients	0 si le client est un homme ; 1 si le client est une femme

deux résultats possibles : soit l'individu ne se souvient pas de cette publicité, soit il s'en souvient. Il est possible de décrire ces deux résultats numériquement en définissant la variable aléatoire discrète  $X$  de la façon suivante :  $x = 0$  si l'individu ne se souvient pas de la publicité et  $x = 1$  si l'individu s'en souvient. Les valeurs numériques de cette variable aléatoire sont arbitraires (on aurait très bien pu choisir 5 et 10) mais acceptables du point de vue de la définition d'une variable aléatoire ;  $X$  est une variable aléatoire parce qu'elle fournit une description numérique du résultat de l'expérience.

Le tableau 5.1 fournit d'autres exemples de variables aléatoires discrètes. On peut remarquer que dans chaque exemple, la variable aléatoire discrète peut prendre un nombre fini de valeurs ou un ensemble infini mais dénombrable de valeurs telles que 0, 1, 2, etc. Les variables aléatoires discrètes comme celles-ci sont traitées en détail dans ce chapitre.

### 5.1.2 Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire qui peut prendre ses valeurs numériques dans un intervalle ou une suite d'intervalles est appelée **variable aléatoire continue**. Les résultats d'expériences basés sur des échelles de mesure telles que le temps, le poids, la distance et la température peuvent être décrits par des variables aléatoires continues. Considérons l'exemple d'un contrôle des appels reçus au bureau des réclamations d'une grande compagnie d'assurance. Supposons que la variable aléatoire à laquelle on s'intéresse soit le temps écoulé (en minutes) entre deux appels consécutifs. Cette variable aléatoire peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ . En fait, un nombre infini de valeurs est possible, incluant des valeurs telles que 1,26 minute, 2,751 minutes, 4,333 minutes, etc. Prenons un autre exemple : considérons une portion de 90 kilomètres de l'autoroute inter-états I-75 au nord d'Atlanta en Géorgie. Pour un service ambulancier d'urgence, situé à Atlanta, on pourrait définir la variable  $X$  comme le lieu du prochain accident de circulation sur cette portion d'autoroute. Dans ce cas,  $X$  serait une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans l'intervalle  $[0 ; 90]$ . D'autres exemples de variables aléatoires continues sont présentés dans le tableau 5.2. On peut remarquer que chaque exemple décrit une variable aléatoire qui peut prendre effectivement n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. Les variables aléatoires continues et leurs distributions de probabilité seront traitées dans le chapitre 6.

**Tableau 5.2 Exemples de variables aléatoires continues**

Expérience	Variable aléatoire ( $X$ )	Valeurs que peut prendre la variable aléatoire
Gérer l'affluence dans une banque	Temps écoulé entre les arrivées des clients en minutes	$x \geq 0$
Remplir une canette de soda (max = 33 cl)	Nombre de centilitres	$0 \leq x \leq 33$
Construire une nouvelle bibliothèque	Pourcentage du projet réalisé après six mois	$0 \leq x \leq 100$
Tester un nouveau processus chimique	Température à laquelle la réaction désirée se produit (min 150°F ; max 212°F)	$150 \leq x \leq 212$

### REMARQUES

Une façon de savoir si une variable aléatoire est discrète ou continue consiste à représenter les valeurs qu'elle peut prendre par des points sur une droite. Choisissez deux points représentant des valeurs de la variable aléatoire. Si n'importe quel point du segment entre ces deux points correspond également à une valeur possible de la variable aléatoire, alors cette variable aléatoire est continue.

### EXERCICES

#### Méthode

- Considérer l'expérience consistant à lancer une pièce de monnaie deux fois de suite.
  - Énumérer les résultats possibles de l'expérience.
  - Définir une variable aléatoire qui représente le nombre de « face » apparaissant au cours des deux lancers.
  - Définir les valeurs que peut prendre la variable aléatoire pour chaque résultat de l'expérience.
  - Cette variable aléatoire est-elle discrète ou continue ?
- Considérer l'expérience d'un travailleur assemblant un produit.
  - Définir une variable aléatoire qui représente le temps en minutes nécessaire pour assembler le produit.
  - Quelles valeurs la variable aléatoire peut-elle prendre ?
  - La variable aléatoire est-elle discrète ou continue ?



#### Applications

- Trois étudiants doivent passer un entretien pour un job d'été à l'Institut Brookwood. Dans chaque cas, l'entretien débouche soit sur l'offre d'un poste soit sur le rejet de la



candidature. Les résultats de l'expérience correspondent à l'issue des trois entretiens.

- a) Énumérer les résultats possibles de l'expérience.
  - b) Définir une variable aléatoire représentant le nombre d'offres de travail proposées. Est-ce une variable aléatoire discrète ou continue ?
  - c) Donner la valeur de la variable aléatoire pour chaque résultat de l'expérience.
4. En janvier, le taux de chômage aux États-Unis est tombé à 8,3 % (site Internet du département américain du travail, 10 février 2012). Neuf États sont recensés dans la région Nord-Est. Supposez que la variable aléatoire à laquelle on s'intéresse est le nombre d'États dans la région Nord-Est dont le taux de chômage en janvier était inférieur à 8,3 %. Quelles valeurs cette variable aléatoire peut-elle prendre ?
5. Pour effectuer un certain type d'analyse de sang, les laborantins doivent effectuer deux expériences. La première comprend 1 ou 2 étapes séparées et la seconde comprend 1, 2 ou 3 étapes.
- a) Énumérer les résultats de l'expérience associée à cette analyse de sang.
  - b) Si la variable aléatoire est définie comme étant le nombre total d'étapes nécessaires à l'analyse, donner les valeurs qu'elle peut prendre pour chaque résultat de l'expérience.
6. Le tableau suivant énumère une série d'expériences et la variable aléatoire qui leur est associée. Dans chacun des cas, identifier les valeurs que peut prendre la variable aléatoire et dire si la variable aléatoire est discrète ou continue.

Expérience	Variable aléatoire ( $X$ )
a. Passer un examen de 20 questions	Nombre de bonnes réponses
b. Observer les voitures arrivant à un péage	Nombre de voitures arrivant au péage en une heure
c. Faire un audit sur 50 déclarations d'impôt	Nombre de déclarations contenant des erreurs
d. Observer le travail d'un employé	Nombre d'heures non-productives dans une journée de travail de huit heures
e. Peser une cargaison de biens	Nombre de kilos

## 5.2 DÉVELOPPER DES DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

La **distribution de probabilité** d'une variable aléatoire décrit comment sont distribuées les probabilités en fonction des valeurs de la variable aléatoire. Pour une variable aléatoire discrète  $X$ , la distribution de probabilité est définie par une **fonction de probabilité** notée  $f(x)$ . Celle-ci donne la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur spécifique, pour l'ensemble des valeurs possibles. À ce titre, vous pouvez penser que les méthodes classique, subjective et de fréquence relative pour attribuer des probabilités, introduites au chapitre 4, seraient utiles pour développer des distributions de probabilité discrètes. Elles le sont et dans cette section nous montrons comment. L'application de cette méthode conduit à ce que nous appelons des distributions de probabilité discrètes sous forme de tableau, c'est-à-dire des distributions de probabilité qui sont présentées dans un tableau.

La méthode classique d'attribution de probabilités aux valeurs que peut prendre une variable aléatoire est applicable lorsque les résultats de l'expérience génèrent des

valeurs qui sont équiprobables. Par exemple, considérez l'expérience consistant à lancer un dé et à observer le nombre qui apparaît sur la face supérieure. Ce dernier peut être l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 et chacun de ces résultats est équiprobable. Ainsi, si nous définissons  $X$  = nombre obtenu lors du lancer d'un dé et  $f(x)$  = la probabilité que  $X$  prenne la valeur  $x$ , la distribution de probabilité de  $X$  est donnée dans le tableau 5.3.

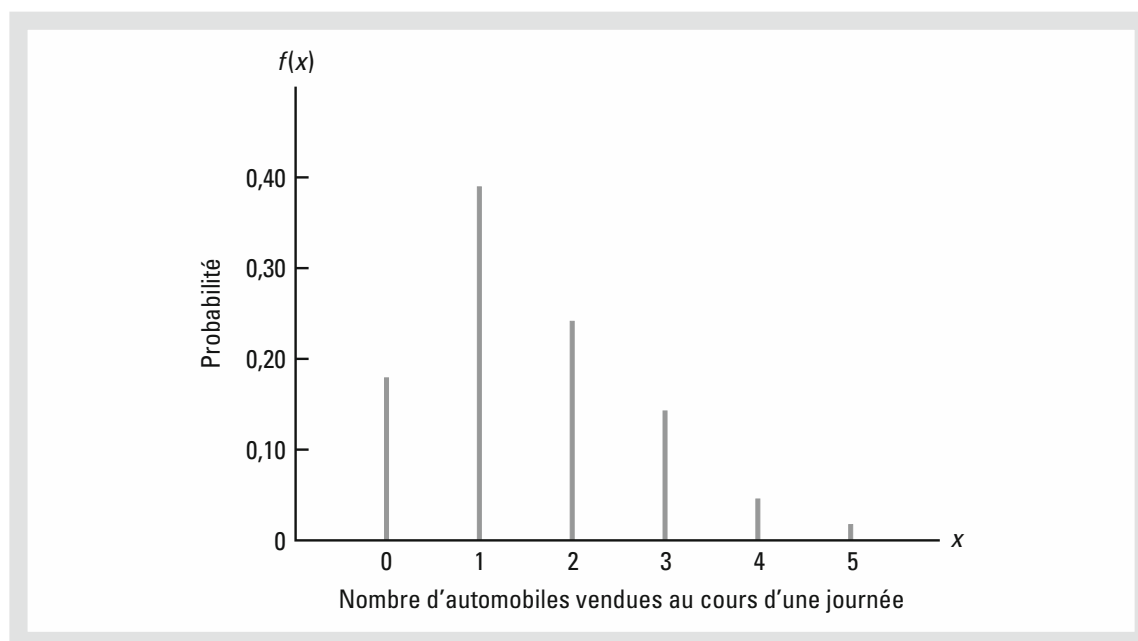
La méthode subjective d'attribution des probabilités peut également conduire à un tableau dans lequel figurent les valeurs que peut prendre la variable aléatoire et les probabilités associées. Avec la méthode subjective, la personne qui développe la distribution de probabilité utilise son meilleur jugement pour attribuer chaque probabilité. Aussi, contrairement aux distributions de probabilité développées en utilisant la méthode classique, on s'attend à obtenir des distributions de probabilité différentes en fonction des personnes.

La méthode d'attribution des probabilités basée sur la fréquence relative est applicable lorsque des quantités raisonnablement importantes de données sont disponibles. Nous traitons alors les données comme si elles correspondaient à la population et utilisons la méthode de la fréquence relative pour attribuer des probabilités aux résultats de l'expérience. L'utilisation de la méthode des fréquences relatives pour développer des distributions de probabilité discrètes conduit à ce qui est appelé une distribution discrète empirique. Avec les grandes quantités de données disponibles aujourd'hui (comme par exemple les données issues des scanners, les données sur les cartes de crédit, etc.), ce type de distribution de probabilité est de plus en plus utilisé en pratique. Illustrons cela en considérons les ventes d'un revendeur automobile.

Nous utiliserons la méthode des fréquences relatives pour développer une distribution de probabilité du nombre d'automobiles vendues par jour par DiCarlo Motors à Saratoga dans l'Etat de New York. Durant les 300 derniers jours, DiCarlo n'a vendu aucune automobile au cours de 54 jours ; une automobile au cours de 117 jours ; 2 automobiles au cours de 72 jours ; 3 automobiles au cours de 42 jours ; 4 automobiles au cours de 12 jours ; 5 automobiles au cours de 3 jours. Supposez que nous considérons l'expérience consistant à observer une journée parmi les 300 jours de l'opération. La variable aléatoire  $X$  est définie comme le nombre d'automobiles vendues au cours de cette journée. En

**Tableau 5.3** *Distribution de probabilité pour le nombre obtenu lors du lancer d'un dé*

<i>Nombre obtenu</i>	<i>Probabilité que X prenne la valeur x</i>
<b>x</b>	<b>f(x)</b>
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



**Figure 5.1** Représentation graphique de la distribution de probabilité des ventes d'automobiles par jour chez DiCarlo Motors

utilisant les fréquences relatives pour attribuer les probabilités aux valeurs de la variable aléatoire  $X$ , nous pouvons développer la distribution de probabilité pour les valeurs que peut prendre  $X$ .

Dans la terminologie des fonctions de probabilité,  $f(0)$  donne la probabilité qu'aucune automobile n'ait été vendue,  $f(1)$  donne la probabilité qu'une automobile ait été vendue, et ainsi de suite. Puisque les données historiques révèlent qu'au cours de 54 jours, sur les 300 que compte l'opération, aucune automobile n'a été vendue, on attribue à  $f(0)$  la valeur  $54/300 = 0,18$ , indiquant que la probabilité de ne vendre aucune automobile au cours d'une journée est égale à 0,18. De même, puisque pendant 117 jours une seule automobile a été vendue chaque jour, on attribue à  $f(1)$  la valeur  $117/300 = 0,39$ , indiquant que la probabilité de vendre exactement une automobile au cours d'une journée est de 0,39. Par le même raisonnement, on obtient les valeurs de  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  et  $f(5)$  présentées dans le tableau 5.4, correspondant à la distribution de probabilité du nombre d'automobiles vendues au cours d'une journée chez DiCarlo Motors.

Le principal avantage de décrire une variable aléatoire et sa distribution de probabilité est, qu'une fois cette distribution de probabilité connue, il est relativement facile de déterminer la probabilité d'occurrence des différents événements qui peuvent présenter un intérêt pour les responsables. Par exemple, en utilisant la distribution de probabilité de DiCarlo Motors présentée dans le tableau 5.4, on s'aperçoit que le nombre le plus probable d'automobiles vendues au cours d'une journée est 1, avec une probabilité égale à  $f(1) = 0,39$ . De plus, la probabilité de vendre au moins 3 automobiles au cours d'une journée est égale à  $f(3) + f(4) + f(5) = 0,14 + 0,04 + 0,01 = 0,19$ . Ces probabilités,

**Tableau 5.4** *Distribution de probabilité du nombre d'automobiles vendues au cours d'une journée chez DiCarlo Motors*

$x$	$f(x)$
0	0,18
1	0,39
2	0,24
3	0,14
4	0,04
5	0,01
	Total 1,00

ainsi que d'autres, fournissent des informations qui peuvent aider les responsables à comprendre le processus de vente d'automobiles chez DiCarlo Motors.

Une fonction de probabilité d'une variable aléatoire discrète doit satisfaire les deux conditions suivantes :

► **Conditions requises pour une fonction de probabilité discrète :**

$$f(x) \geq 0 \quad (5.1)$$

$$\sum f(x) = 1 \quad (5.2)$$

Ces relations sont analogues aux deux conditions de base, déterminant l'attribution des probabilités aux résultats d'une expérience, présentées au chapitre 4.

Dans le tableau 5.4, nous voyons que les probabilités de la variable aléatoire  $X$  satisfont la condition (5.1) ;  $f(x)$  est supérieure ou égale à 0 pour toutes les valeurs  $x$  de  $X$ . De plus, la somme des probabilités est égale à 1 ; la condition (5.2) est donc satisfaite. Ainsi, la fonction utilisée est une véritable fonction de probabilité discrète. Il est également possible de présenter graphiquement les distributions de probabilité.

Sur le graphique 5.1, les valeurs de la variable aléatoire  $X$ , correspondant aux ventes journalières chez DiCarlo Motors, sont représentées sur l'axe des abscisses et les probabilités correspondantes sur l'axe des ordonnées.

En plus des tableaux et des graphiques, une formule qui associe la fonction de probabilité  $f(x)$  à chaque valeur  $x$  de  $X$  est souvent utilisée pour décrire les distributions de probabilité. L'exemple le plus simple d'une distribution de probabilité discrète donnée par une formule est la **distribution uniforme discrète**. Sa fonction de probabilité est donnée par l'équation (5.3).

► **Fonction de probabilité uniforme discrète**

$$f(x) = 1/n \quad (5.3)$$

où

$n$  correspond au nombre de valeurs que la variable aléatoire peut prendre.

Par exemple, considérons l'expérience d'un lancer de dé et définissons la variable aléatoire  $X$  comme étant le nombre qui apparaît sur la face supérieure. La variable aléatoire peut prendre 6 valeurs différentes :  $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Ainsi, la fonction de probabilité de cette variable aléatoire est

$$f(x) = 1/6 \quad \text{pour } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Les distributions de probabilité discrètes les plus répandues sont généralement spécifiées par une formule. Trois cas importants sont les lois de probabilité binomiale, de Poisson et hypergéométrique ; on y reviendra plus tard dans ce chapitre.

## EXERCICES

### Méthode



7. La distribution de probabilité de la variable aléatoire  $X$  est donnée dans le tableau ci-dessous.

$x$	$f(x)$
20	0,20
25	0,15
30	0,25
35	0,40

- Est-ce une véritable distribution de probabilité ? Expliquer.
- Quelle est la probabilité que  $x$  soit égal à 30 ?
- Quelle est la probabilité que  $x$  soit inférieur ou égal à 25 ?
- Quelle est la probabilité que  $x$  soit supérieur à 30 ?

### Applications



8. Les données suivantes ont été collectées en comptabilisant le nombre de salles d'opération utilisées à l'hôpital général de Tampa sur une période de 20 jours : au cours de 3 jours (sur les 20 que compte l'expérience), seule une salle d'opération fut utilisée ; au cours de 5 jours, 2 salles furent utilisées ; au cours de 8 jours, 3 furent utilisées et au cours de 4 jours, les 4 salles d'opération de l'hôpital furent utilisées.
- Utiliser une approche en termes de fréquence relative pour construire une distribution de probabilité du nombre de salles d'opération utilisées au cours d'une journée.
  - Représenter graphiquement la distribution de probabilité.
  - Montrer que votre distribution de probabilité satisfait les conditions définissant une distribution de probabilité discrète.
9. Le nombre moyen de mois passés au chômage pour les chômeurs américains, fin décembre 2009, était approximativement de sept mois (Bureau des statistiques de l'emploi, janvier 2010). Supposez que les données suivantes illustrent la situation dans une

région particulière au Nord de l'État de New York. Les valeurs dans la première colonne indiquent le nombre de mois passés au chômage et les valeurs dans la seconde colonne le nombre de chômeurs.

Mois de chômage	Nombre de chômeurs
1	1 029
2	1 686
3	2 269
4	2 675
5	3 487
6	4 652
7	4 145
8	3 587
9	2 325
10	1 120

Soit  $X$  une variable aléatoire indiquant le nombre de mois passés au chômage par une personne.

- a) Utiliser les données pour développer la distribution de probabilité de  $X$ . Spécifier
  - b) Montrer que la distribution de probabilité satisfait les conditions (5.1) et (5.2).
  - c) Quelle est la probabilité qu'une personne reste sans emploi pendant au plus 2 mois ? Pendant plus de deux mois ?
  - d) Quelle est la probabilité qu'une personne reste sans emploi pendant plus de 6 mois ?
10. Le tableau suivant présente les distributions de fréquence en pourcentage des notes fournies par des cadres supérieurs et juniors spécialisés en système d'information concernant leur niveau de satisfaction sur un plan professionnel. Les niveaux de satisfaction vont de 1 (très insatisfait) à 5 (très satisfait).

Niveau de satisfaction professionnelle	Cadres supérieurs (%)	Cadres juniors (%)
1	5	4
2	9	10
3	3	12
4	42	46
5	41	28

- a) Développer une distribution de probabilité des niveaux de satisfaction d'un cadre supérieur.
- b) Développer une distribution de probabilité des niveaux de satisfaction d'un cadre junior.
- c) Quelle est la probabilité qu'un cadre supérieur donne une note de 4 ou 5 à son travail ?

- d) Quelle est la probabilité qu'un cadre junior soit très satisfait ?
- e) Comparer les niveaux de satisfaction des cadres supérieurs et des cadres juniors.
11. Un technicien assure la maintenance des machines de publipostage des entreprises de la région de Phoenix. En fonction du type de dysfonctionnement, la réparation peut nécessiter 1, 2, 3 ou 4 heures d'intervention. Les différents types de dysfonctionnement apparaissent avec la même fréquence.
- a) Développer une distribution de probabilité de la durée d'intervention.
- b) Représenter graphiquement la distribution de probabilité.
- c) Montrer que votre distribution de probabilité satisfait les conditions définissant une fonction de probabilité discrète.
- d) Quelle est la probabilité qu'une réparation nécessite trois heures ?
- e) Un appel pour une réparation vient juste d'être enregistré, mais le type de dysfonctionnement n'a pas été précisé. Il est 15h ; les techniciens de maintenance finissent, en principe, leur journée à 17h. Quelle est la probabilité que le technicien doive faire des heures supplémentaires pour réparer la machine aujourd'hui ?
12. Time Warner Cable fournit des services de télévision et d'Internet à plus de 15 millions de personnes (site Internet de Time Warner Cable, 24 octobre 2012). Supposez que les responsables de la société Time Warner Cable estiment de manière subjective la distribution de probabilité associée au nombre de nouveaux abonnés qu'ils obtiendront l'année suivante dans l'État de New York comme suit :

$x$	$f(x)$
100 000	0,10
200 000	0,20
300 000	0,25
400 000	0,30
500 000	0,10
600 000	0,05

- a) Est-ce une distribution de probabilité valide ? Expliquer.
- b) Quelle est la probabilité que la société Time Warner obtienne plus de 400 000 nouveaux abonnés ?
- c) Quelle est la probabilité que la société Time Warner obtienne moins de 200 000 nouveaux abonnés ?
13. Un psychologue a estimé qu'il fallait 1, 2 ou 3 séances pour gagner la confiance d'un nouveau patient. Soit  $X$  une variable aléatoire indiquant le nombre de séances nécessaires pour gagner la confiance d'un patient. La fonction de probabilité suivante a été proposée :

$$f(x) = \frac{x}{6} \quad \text{pour } x = 1, 2 \text{ ou } 3$$

- a) Est-ce une distribution de probabilité à proprement parler ? Expliquer.
- b) Quelle est la probabilité qu'il faille exactement deux séances pour gagner la confiance d'un patient ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il faille au moins deux séances pour gagner la confiance d'un patient ?
14. Le tableau suivant décrit une partie de la distribution de probabilité des bénéfices prévisionnels de la société MRA ( $X$  = bénéfice en milliers de dollars) pour la première année d'activité (les valeurs négatives dénotent une perte).

$x$	$f(x)$
-100	0,10
0	0,20
50	0,30
100	0,25
150	0,10
200	?

- a) Quelle est la valeur de  $f(200)$  ? Quelle est votre interprétation de cette valeur ?
- b) Quelle est la probabilité que MRA réalise des bénéfices ?
- c) Quelle est la probabilité que MRA réalise un bénéfice d'au moins 100 000 \$ ?

## 5.3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE ET VARIANCE

### 5.3.1 Espérance mathématique

L'**espérance mathématique** ou la moyenne d'une variable aléatoire est une mesure de tendance centrale. L'expression mathématique de l'espérance d'une variable aléatoire discrète  $X$  est :

► **Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète**

$$E(X) = \mu = \sum xf(x) \quad (5.4)$$

L'espérance mathématique est une moyenne pondérée des valeurs que peut prendre la variable aléatoire. Les poids correspondent aux probabilités.

Les notations  $E(X)$  et  $\mu$  décrivent toutes deux l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

L'équation (5.4) montre que pour calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète, on multiplie chaque valeur de la variable aléatoire par la probabilité  $f(x)$  correspondante et on additionne les différents produits. Le calcul de l'espérance

mathématique du nombre d'automobiles vendues au cours d'une journée, à partir des données sur les ventes d'automobiles chez DiCarlo Motors (section 5.2), est détaillé dans le tableau 5.5. La somme des entrées de la colonne  $xf(x)$  montre que l'espérance mathématique est de 1,5 automobile par jour. Nous savons désormais que bien que les ventes de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 automobiles par jour sont possibles, DiCarlo peut anticiper la vente de 1,5 automobile en moyenne par jour, soit une moyenne mensuelle de 45 ( $= 30 \times 1,5$ ) automobiles, si l'on suppose qu'il y a 30 jours dans le mois.

L'espérance mathématique n'est pas forcément égale à l'une des valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

### 5.3.2 Variance

Alors que l'espérance mathématique fournit la valeur moyenne de la variable aléatoire, on a souvent besoin d'une mesure de dispersion ou de variabilité. De la même façon que nous avons utilisé la variance dans le chapitre 3 pour résumer la dispersion d'un ensemble de données, nous utilisons maintenant la **variance** pour résumer la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire. L'expression mathématique de la variance d'une variable aléatoire est :

► **Variance d'une variable aléatoire discrète**

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x) \quad (5.5)$$

La variance est une somme pondérée des écarts au carré d'une variable aléatoire par rapport à sa moyenne. Les pondérations correspondent aux probabilités.

**Tableau 5.5** Calcul de l'espérance mathématique du nombre d'automobiles vendues au cours d'une journée chez DiCarlo Motors

$x$	$f(x)$	$xf(x)$
0	0,18	0 0,18 = 0,00
1	0,39	1 0,39 = 0,39
2	0,24	2 0,24 = 0,48
3	0,14	3 0,14 = 0,42
4	0,04	4 0,04 = 0,16
5	0,01	5 0,01 = 0,05
	Total 1,00	1,50

$E(X) = \mu = \sum xf(x)$

Comme le montre l'équation (5.5), une part essentielle de la formule de la variance est l'écart entre une valeur particulière de la variable aléatoire et sa moyenne,  $x - \mu$ . Dans le calcul de la variance d'une variable aléatoire, les écarts par rapport à la moyenne sont élevés au carré et pondérés par la valeur de la fonction de probabilité associée. La somme de ces écarts au carré pondérés, pour toutes les valeurs de la variable aléatoire, forme la *variance*. Les notations  $Var(X)$  et  $\sigma_x^2$  (ou  $\sigma^2$ ) sont les notations usuelles pour décrire la variance d'une variable aléatoire. Le calcul de la variance pour la distribution de probabilité du nombre d'automobiles vendues au cours d'une journée chez DiCarlo Motors est résumé dans le tableau 5.6. La variance est égale à 1,25. L'**écart type**  $\sigma$  correspond à la racine carrée de la variance. Ainsi, l'écart type du nombre d'automobiles vendues au cours d'une journée est

$$\sigma = \sqrt{1,25} = 1,118$$

L'écart type est mesuré dans les mêmes unités que la variable aléatoire ( $\sigma$  est égal à 1,118 automobile) et, donc, est souvent préféré à la variance pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire. La variance  $\sigma^2$  est mesurée en unité élevée au carré ; l'interprétation en est plus difficile.

**Tableau 5.6** Calcul de la variance du nombre d'automobiles vendues au cours d'une journée chez DiCarlo Motors

$x$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$f(x)$	$(x - \mu)^2 f(x)$
0	$0 - 1,5 = -1,5$	2,25	0,18	$2,25 \cdot 0,18 = 0,4050$
1	$1 - 1,5 = -0,5$	0,25	0,39	$0,25 \cdot 0,39 = 0,0975$
2	$2 - 1,5 = 0,5$	0,25	0,24	$0,25 \cdot 0,24 = 0,0600$
3	$3 - 1,5 = 1,5$	2,25	0,14	$2,25 \cdot 0,14 = 0,3150$
4	$4 - 1,5 = 2,5$	6,25	0,04	$6,25 \cdot 0,04 = 0,2500$
5	$5 - 1,5 = 3,5$	12,25	0,01	$12,25 \cdot 0,01 = 0,1225$
			Total 1,00	1,2500

$Var(X) = \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x)$

## EXERCICES

**Méthode**

15. Le tableau suivant présente une distribution de probabilité pour une variable aléatoire  $X$ .

$x$	$f(x)$
3	0,25
6	0,50
9	0,25

- Calculer  $E(X)$ , l'espérance mathématique de  $X$ .
- Calculer  $\sigma^2$ , la variance de  $X$ .
- Calculer  $\sigma$ , l'écart type de  $X$ .

16. Le tableau suivant présente une distribution de probabilité pour une variable aléatoire  $Y$ .



$y$	$f(x)$
2	0,20
4	0,30
7	0,40
8	0,10

- Calculer  $E(Y)$ .
- Calculer  $Var(Y)$  et  $\sigma$ .

**Applications**

17. Le nombre d'étudiants qui passe le test d'aptitude SAT a augmenté et atteint le nombre record de 1,5 million (College Board, 26 août 2008). Les étudiants peuvent refaire le test dans l'espoir d'améliorer leur score qui est transmis aux bureaux d'admission des universités et grandes écoles. Le nombre de tentatives et le nombre d'étudiants sont donnés ci-dessous.

Nombre de tentatives	Nombre d'étudiants
1	721 769
2	601 325
3	166 736
4	22 299
5	6 730

- Soit  $X$  une variable aléatoire indiquant le nombre de tentatives faites par un étudiant. Déterminer la distribution de probabilité de cette variable aléatoire.
- Quelle est la probabilité qu'un étudiant passe le test plus d'une fois ?
- Quelle est la probabilité qu'un étudiant passe le test au moins trois fois ?

- d) Quelle est l'espérance mathématique du nombre de tentatives de passage du test ?  
Quelle est votre interprétation de cette valeur ?
- e) Quelle est la variance et quel est l'écart type du nombre de tentatives de passage du test ?
18. L'enquête logement américaine a fourni les données suivantes concernant le nombre de fois où des logements (occupés par leur propriétaire ou des locataires) ont connu une coupure d'eau d'au moins 6 heures au cours des trois derniers mois (site Internet du bureau américain du recensement, octobre 2012).



Nombre de fois	Nombre de logements	
	Occupés par leur propriétaire	Loués
0	547	23
1	5 012	541
2	6 100	3 832
3	2 644	8 690
4 ou plus	557	3 783

- a) Définir une variable aléatoire  $X$  correspondant au nombre de fois où des logements occupés par leur propriétaire ont connu une coupure d'eau d'au moins 6 heures au cours des 3 derniers mois et développer la distribution de probabilité de cette variable aléatoire (considérer que  $x = 4$  représente quatre fois ou plus).
- b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable  $X$ .
- c) Définir une variable aléatoire  $Y$  correspondant au nombre de fois où des logements loués ont connu une coupure d'eau d'au moins 6 heures au cours des 3 derniers mois et développer la distribution de probabilité de cette variable aléatoire (considérer que  $y = 4$  représente quatre fois ou plus).
- d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable  $Y$ .
- e) Quelles conclusions pouvez-vous tirer de la comparaison du nombre de fois où une coupure d'eau est intervenue dans des logements occupés par leur propriétaire versus des logements loués ?
19. La Virginie Occidentale a l'un des plus forts taux de divorce des États-Unis, avec un taux annuel d'environ 5 divorces pour 1 000 personnes (site Internet des centres pour le contrôle et la prévention des maladies, 12 janvier 2012). Le centre de conseil marital (MCC) pense que le fort taux de divorce dans l'État pourrait les amener à embaucher du personnel supplémentaire. Avec l'aide d'un consultant, la direction de MCC a développé la distribution de probabilité suivante du nombre de nouveaux clients qui pourraient s'adresser au centre l'année suivante.
- a) Cette distribution de probabilité est-elle valide ? Expliquer
- b) Quelle est la probabilité que MCC obtienne plus de 30 nouveaux clients ?
- c) Quelle est la probabilité que MCC obtienne moins de 20 nouveaux clients ?
- d) Calculer l'espérance mathématique et la variance.

$x$	$f(x)$
10	0,05
20	0,10
30	0,10
40	0,20
50	0,35
60	0,20

20. Le tableau suivant présente la distribution de probabilité des indemnités payées par la société d'assurance automobile Newton en cas de collision.

Indemnité (\$)	Probabilité
0	0,85
500	0,04
1 000	0,04
3 000	0,03
5 000	0,02
8 000	0,01
10 000	0,01

- a) Utiliser l'indemnité moyenne en cas de collision pour déterminer la prime d'assurance collision qui permet à la société d'équilibrer ses comptes.
- b) La compagnie d'assurance fait payer une cotisation annuelle pour le risque de collision égale à 520 dollars. Quelle est l'espérance mathématique de l'assurance collision pour un assuré ? (Conseil : il s'agit des paiements moyens versés par la compagnie moins le coût de l'assurance). Pourquoi un assuré souscrit-il à une police d'assurance collision avec cette espérance mathématique ?
21. Les distributions des niveaux de satisfaction sur le plan professionnel d'un échantillon de cadres supérieurs et juniors en système d'information sont présentées ci-dessous. Les niveaux de satisfaction vont de 1 (très insatisfait) à 5 (très satisfait).

Niveau de satisfaction professionnelle	Probabilité	
	Cadres supérieurs	Cadres juniors
1	0,05	0,04
2	0,09	0,10
3	0,03	0,12
4	0,42	0,46
5	0,41	0,28

- a) Quelle est l'espérance mathématique des niveaux de satisfaction des cadres supérieurs ?
- b) Quelle est l'espérance mathématique des niveaux de satisfaction des cadres juniors ?
- c) Calculer la variance des niveaux de satisfaction professionnelle des cadres supérieurs et juniors.
- d) Calculer l'écart type des niveaux de satisfaction professionnelle des cadres supérieurs et juniors.

- e) Comparer les niveaux de satisfaction des cadres supérieurs et juniors.
22. La demande pour un produit des industries Carolina fluctue beaucoup d'un mois à l'autre. La distribution de probabilité présentée dans le tableau ci-dessous, basée sur les deux dernières années, correspond à la demande mensuelle qui s'adresse à l'entreprise.

Demande (en nombre d'unités)	Probabilité
300	0,20
400	0,30
500	0,35
600	0,15

- a) Si l'entreprise base ses commandes mensuelles sur l'espérance mathématique de la demande mensuelle, quelle quantité doit être commandée par mois ?
- b) Supposer que chaque unité demandée génère un revenu de 70 dollars et coûte 50 dollars. Combien l'entreprise perdra ou gagnera en un mois si sa commande est basée sur votre réponse en (a) et que la demande effective pour le produit est de 300 unités ?
23. Lors de l'enquête annuelle de Gallup sur les habitudes de consommation, un échantillon aléatoire de 1 014 adultes âgés de 18 ans et plus est interviewé par téléphone. L'une des questions posées était : « Combien de tasses de café buvez-vous en moyenne par jour ? ». Le tableau suivant indique les résultats obtenus (site Internet de Gallup, 6 août 2012).

Nombre de tasses par jour	Nombre de réponses
0	365
1	264
2	193
3	91
4 ou plus	101

Soit  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de tasses de café consommées en moyenne par jour. Considérez que  $x = 4$  représente quatre fois ou plus.

- a) Développer une distribution de probabilité pour  $X$ .
- b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .
- c) Calculer la variance de  $X$ .
- d) Supposez que nous ne soyons intéressés que par les adultes qui boivent au moins une tasse de café en moyenne par jour. Pour ce groupe, soit  $Y$  la variable aléatoire correspondant au nombre de tasses de café consommées en moyenne par jour. Calculer l'espérance mathématique de  $Y$  et la comparer à celle de  $X$ .
24. La société informatique J. R. Ryland envisage l'extension de son usine afin de pouvoir commencer la production d'un nouvel ordinateur. Le président de la société doit déterminer si l'extension doit être faite à moyenne ou grande échelle. La demande pour le nouveau produit est incertaine ; elle peut être faible, moyenne ou élevée. Les estimations probabilistes de la demande sont respectivement égales à 0,20, 0,50 et 0,30. Soit  $X$  le profit annuel en milliers de dollars dans le cas du projet à moyenne échelle et  $Y$  le profit annuel dans le cas du projet à grande échelle. Les prévisionnistes de la firme ont développé les prévisions de profit suivantes pour les projets d'expansion à moyenne et grande échelle.

		Expansion à moyenne échelle		Expansion à grande échelle	
		$x$	$f(x)$	$y$	$f(y)$
Demande	Faible	50	0,20	0	0,20
	Moyenne	150	0,50	100	0,50
	Élevée	200	0,30	300	0,30

- a) Calculer l'espérance mathématique du profit pour les deux alternatives d'expansion. Quelle décision est préférable en termes de maximisation du profit ?
- b) Calculer la variance du profit pour les deux alternatives d'expansion. Quelle décision est préférable en termes de minimisation des risques ou de l'incertitude ?

## 5.4 LA LOI BINOMIALE

La loi binomiale est une distribution de probabilité discrète qui a de nombreuses applications. Elle est associée à une expérience à plusieurs étapes, appelée expérience binomiale.

### 5.4.1 Une expérience binomiale

Une **expérience binomiale** possède les quatre propriétés suivantes.

► **Propriétés d'une expérience binomiale**

1. L'expérience est une série de  $n$  tirages identiques.
2. Deux événements sont possibles à chaque tirage. L'un est dit succès, l'autre échec.
3. La probabilité de succès, notée  $p$ , ne se modifie pas d'un tirage à l'autre. Par conséquent, la probabilité d'échec, notée  $1 - p$ , ne se modifie pas non plus.
4. Les tirages sont indépendants.

Si les propriétés 2, 3 et 4 sont satisfaites, on dit que les tirages sont générés par un processus de Bernoulli. Si la propriété 1 est également satisfaite, il s'agit alors d'une expérience binomiale. La figure 5.2 décrit une série possible de résultats d'une expérience binomiale comprenant huit tirages.

Jakob Bernoulli (1654-1705), le premier de la famille des mathématiciens suisses Bernoulli, a publié un traité sur les probabilités qui contenait la théorie des permutations et des combinaisons, ainsi que le théorème binomial.

L'intérêt d'une expérience binomiale est de connaître le nombre de succès intervenant au cours de  $n$  tirages. Soit  $X$  le nombre de succès obtenus en  $n$  tirages.  $X$  peut prendre les valeurs  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ . Puisque le nombre de valeurs est fini,  $X$  est une variable aléatoire discrète. La distribution de probabilité associée à cette variable aléatoire est appelée **loi binomiale**. Par exemple, considérons l'expérience suivante qui consiste à lancer une pièce de monnaie cinq fois de suite. À chaque lancer, on observe si la pièce retombe du côté pile ou du côté face. Nous nous intéressons au nombre d'apparitions du côté face au cours

<i>Propriété 1:</i>	L'expérience consiste en $n = 8$ tirages identiques.
<i>Propriété 2:</i>	De chaque tirage résulte soit un succès ( $S$ ) soit un échec ( $E$ ).
<b>Tirages</b> →	1    2    3    4    5    6    7    8
<b>Résultats</b> →	$S$ $E$ $E$ $S$ $S$ $E$ $S$ $S$

**Figure 5.2** Une série possible de succès et d'échecs d'une expérience binomiale à huit tirages

de ces cinq lancers. Cette expérience a-t-elle les propriétés d'une expérience binomiale ? Quelle est la variable aléatoire qui nous intéresse dans cette expérience ? Remarquons que :

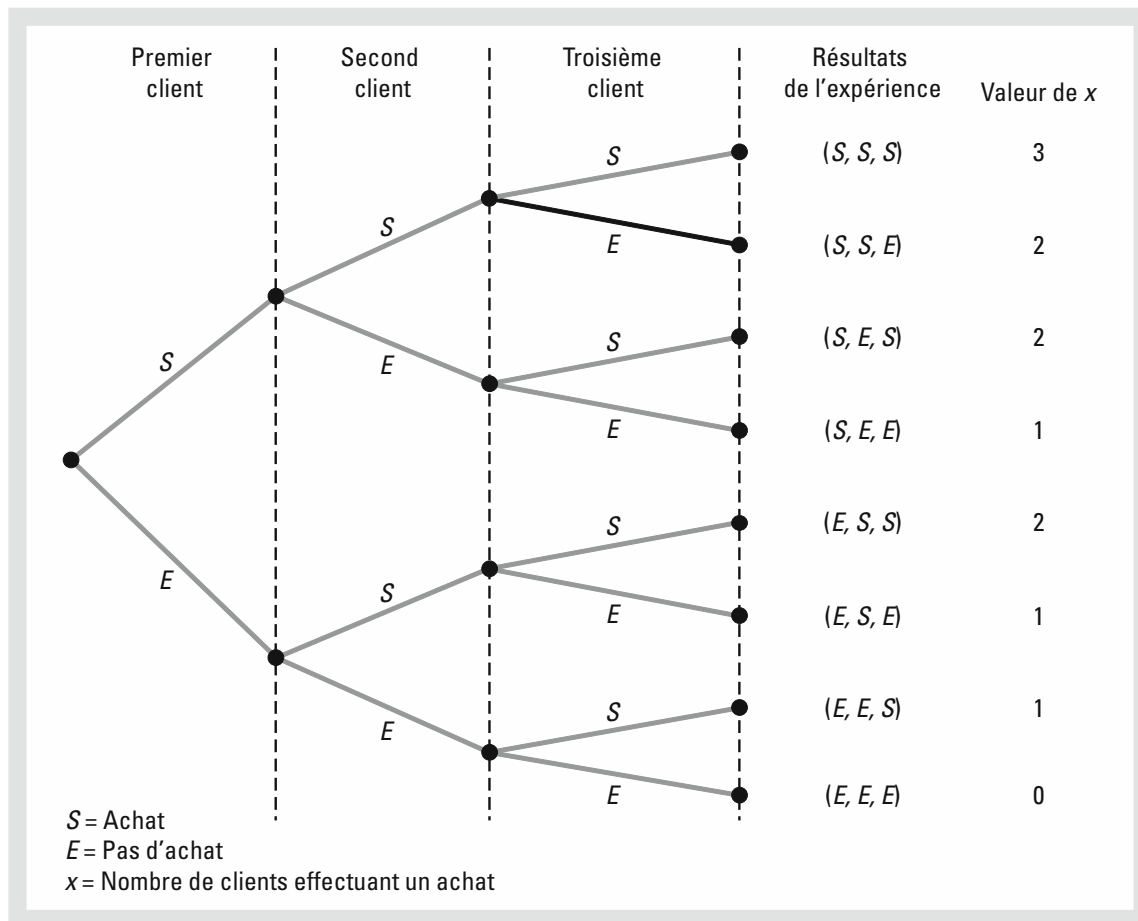
1. L'expérience consiste en cinq tirages identiques ; chaque tirage correspond au lancer d'une pièce.
2. Deux issues sont possibles à chaque tirage : pile ou face. On peut considérer face comme un succès et pile comme un échec.
3. Les probabilités de succès et d'échec ne se modifient pas d'un tirage à l'autre ; ici,  $p = 0,5$  et  $1 - p = 0,5$ .
4. Les tirages ou lancers sont indépendants, puisque le résultat d'un lancer n'est pas affecté par ce qui se passe lors des autres lancers.

Ainsi, les propriétés d'une expérience binomiale sont satisfaites. La variable aléatoire correspond ici au nombre de fois où le côté face apparaît lors des cinq tirages. Dans ce cas,  $X$  peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

Prenons un autre exemple : considérons un représentant d'une compagnie d'assurance qui se rend chez dix particuliers, sélectionnés de manière aléatoire. L'issue de chaque entrevue est associée à un succès si le particulier souscrit à une police d'assurance et à un échec sinon. De par son expérience passée, le vendeur sait que la probabilité qu'un particulier, sélectionné aléatoirement, souscrive à une police d'assurance est de 0,10. En vérifiant les propriétés d'une expérience binomiale, on observe que :

1. L'expérience consiste en 10 tirages identiques, chaque tirage consistant à contacter un particulier.
2. Deux issues sont possibles à chaque tirage : le particulier souscrit à une police d'assurance (succès) ou non (échec).
3. Les probabilités de succès et d'échec sont supposées être invariantes par rapport aux tirages ;  $p = 0,10$  et  $1 - p = 0,90$  à chaque tirage.
4. Les tirages sont indépendants puisque les familles sont sélectionnées aléatoirement.

Puisque les quatre hypothèses sont satisfaites, il s'agit bien d'une expérience binomiale. La variable aléatoire correspond dans cet exemple au nombre de souscriptions obtenues en contactant dix particuliers. Dans ce cas  $X$  peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10.



**Figure 5.3** Diagramme arborescent du problème du magasin de prêt-à-porter Martin

La propriété 3 de l'expérience binomiale est dite *hypothèse de stationnarité*. Elle est parfois confondue avec la propriété 4 d'indépendance des tirages. Pour bien comprendre les différences entre ces deux propriétés, reprenons l'exemple du représentant en assurance qui contacte des particuliers dans le but de leur vendre une police d'assurance. Si à la fin de la journée, le représentant est fatigué et a perdu de son enthousiasme, la probabilité de succès (vendre une police d'assurance) peut tomber à 0,05, par exemple, lors du dixième contact. Dans ce cas, la propriété 3 (propriété de stationnarité) n'est plus satisfaite et l'expérience n'est plus binomiale, même si la propriété 4 (propriété d'indépendance) est toujours satisfaite, c'est-à-dire même si les décisions d'achat de chaque particulier sont indépendantes.

Dans les applications impliquant des expériences binomiales, une formule mathématique spécifique, la *fonction de probabilité binomiale*, est utilisée pour calculer la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages. En utilisant les concepts probabilistes introduits dans le chapitre 4, nous développerons cette formule au travers d'un problème illustratif.

### 5.4.2 Le problème du magasin de prêt-à-porter Martin

Considérons le comportement d'achat des trois prochains clients qui entreront dans le magasin de prêt-à-porter Martin. Sur la base de son expérience passée, le gérant du magasin estime la probabilité qu'un client fasse un achat à 0,30. Quelle est la probabilité que deux des trois clients suivants fassent un achat ? En utilisant une représentation sous forme arborescente (figure 5.3), on peut voir que l'expérience consistant à observer le comportement d'achat de trois clients, génère huit issues possibles. Notant un succès (un achat)  $S$  et un échec (pas d'achat)  $E$ , nous nous intéressons aux résultats de l'expérience qui comportent deux succès parmi les trois tirages (deux achats parmi les trois décisions d'achat). Vérifions que cette expérience correspond à une expérience binomiale. En vérifiant les quatre conditions d'une expérience binomiale, nous remarquons que :

1. L'expérience peut être décrite comme étant une série de trois tirages identiques, un tirage pour chacun des trois clients qui entrent dans le magasin.
2. Deux issues – le client fait un achat (succès) ou le client ne fait pas d'achat (échec) – sont possibles à chaque tirage.
3. La probabilité qu'un client fasse un achat (0,30) ou qu'il ne fasse pas d'achat (0,70) est supposée identique pour tous les clients.
4. La décision d'achat de chaque client est indépendante des décisions des autres clients.

Les propriétés d'une expérience binomiale sont donc satisfaites.

Le nombre de résultats de l'expérience qui donnent exactement  $x$  succès en  $n$  tirages peut être calculé à partir de la formule suivante.<sup>2</sup>

---

► **Nombre de résultats de l'expérience fournissant exactement  $x$  succès en  $n$  tirages**

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad (5.6)$$

où

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$$

et par définition,

$$0! = 1$$


---

Reprenons maintenant l'expérience du magasin de prêt-à-porter Martin, impliquant le comportement d'achat de trois clients. L'équation (5.6) peut être utilisée pour déterminer le nombre de résultats de l'expérience comprenant deux achats, c'est-à-dire le nombre de façons d'obtenir 2 succès ( $x = 2$ ) en 3 tirages ( $n = 3$ ). De l'équation (5.6), nous obtenons

<sup>2</sup> Cette formule, introduite dans le chapitre 4, détermine le nombre de combinaisons de  $x$  objets sélectionnés parmi  $n$ . Pour une expérience binomiale, la formule combinatoire fournit le nombre de résultats de l'expérience (série de  $n$  tirages) qui comprennent  $x$  succès.

$$\binom{n}{x} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{(3)(2)(1)}{(2)(1)(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

La formule (5.6) montre que trois des résultats possibles de l'expérience fournissent deux succès. Sur la figure 5.3, ces résultats sont notés *SSE*, *SES* et *ESS*. En utilisant l'expression (5.6) pour déterminer combien de résultats permettent de réaliser trois succès (achats) en trois tirages, on obtient

$$\binom{n}{x} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(1)} = \frac{6}{6} = 1$$

Sur le graphique 5.3, le seul résultat constitué de trois succès est identifié par *SSS*.

Nous savons que l'expression (5.6) peut être utilisée pour déterminer le nombre de résultats de l'expérience qui comprennent  $x$  succès. Mais pour déterminer la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages, il faut également connaître la probabilité associée à chacun des résultats de l'expérience. Puisque les tirages d'une expérience binomiale sont indépendants, il suffit simplement de multiplier les probabilités correspondantes à chaque résultat d'un tirage pour trouver la probabilité d'une série particulière de succès et d'échecs. La probabilité que les deux premiers clients fassent un achat mais pas le troisième est donnée par

$$pp(1-p)$$

Avec une probabilité d'achat à chaque tirage de 0,30, la probabilité d'un achat aux deux premiers tirages mais pas au troisième est donnée par

$$(0,30)(0,30)(0,70) = (0,30)^2(0,70) = 0,063$$

Deux autres séries de résultats comportent deux succès et un échec. Les probabilités de ces trois séries impliquant deux succès sont données dans le tableau ci-dessous.

Résultats des tirages				
Premier client	Deuxième client	Troisième client	Résultat de l'expérience	Probabilité
Achat	Achat	Pas d'achat	SSE	$pp(1-p) = p^2(1-p) = (0,30)^2(0,70) = 0,063$
Achat	Pas d'achat	Achat	SES	$p(1-p)p = p^2(1-p) = (0,30)^2(0,70) = 0,063$
Pas d'achat	Achat	Achat	ESS	$(1-p)pp = p^2(1-p) = (0,30)^2(0,70) = 0,063$

Remarquez que les trois résultats impliquant deux succès ont tous exactement la même probabilité. Cette observation est généralement vraie. Dans une expérience binomiale, toutes les séries de résultats de tirages impliquant  $x$  succès en  $n$  tirages ont la même probabilité d'occurrence. Elle est égale à :

$$\text{Probabilité d'une série particulière de résultats comprenant } x \text{ succès en } n \text{ tirages} = p^x(1-p)^{(n-x)} \quad (5.7)$$

Pour l'exemple du magasin de prêt-à-porter Martin, cette formule montre que tout résultat comprenant deux succès, a une probabilité de

$$p^2(1-p)^{(3-2)} = p^2(1-p)^1 = (0,30)^2(0,70)^1 = 0,063.$$

Puisque l'équation (5.6) donne le nombre de résultats d'une expérience binomiale qui comprennent  $x$  succès et l'expression (5.7) la probabilité de chaque série impliquant  $x$  succès, en combinant les équations (5.6) et (5.7), on obtient la **fonction de probabilité binomiale** suivante :

► **Fonction de probabilité binomiale**

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \quad (5.8)$$

où

$x$  est le nombre de succès

$p$  est la probabilité de succès lors d'un tirage

$n$  est le nombre de tirages

$f(x)$  est la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages

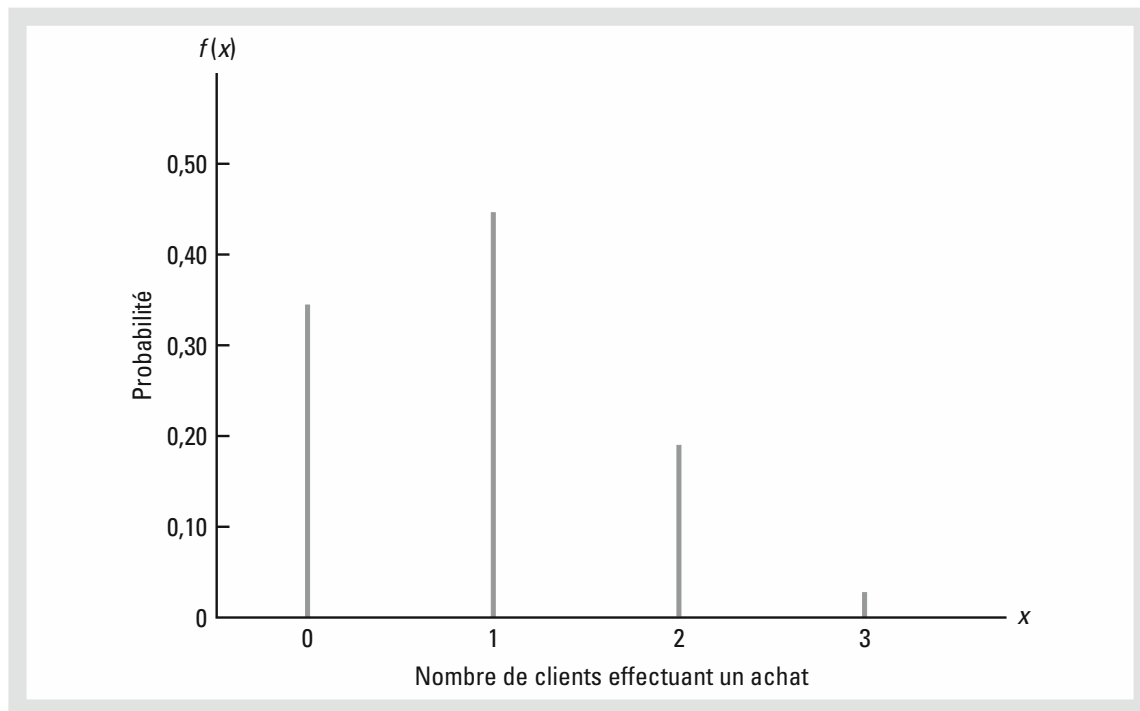
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Pour une distribution de probabilité binomiale,  $X$  est une variable aléatoire discrète ayant une fonction de probabilité  $f(x)$  applicable pour les valeurs de  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Dans l'exemple du magasin de prêt-à-porter Martin, calculons la probabilité qu'aucun client ne fasse d'achat, qu'un client fasse un achat, que deux clients fassent un achat et que les trois clients fassent un achat. Les calculs sont résumés dans le tableau 5.7 qui donne la distribution de probabilité du nombre de clients faisant un achat. La figure 5.4 est la représentation graphique de la distribution de probabilité.

**Tableau 5.7** *Distribution de probabilité du nombre de clients effectuant un achat*

$x$	$f(x)$
0	$\frac{3!}{0!3!} (0,30)^0 (0,70)^3 = 0,343$
1	$\frac{3!}{1!2!} (0,30)^1 (0,70)^2 = 0,441$
2	$\frac{3!}{2!1!} (0,30)^2 (0,70)^1 = 0,189$
3	$\frac{3!}{3!0!} (0,30)^3 (0,70)^0 = 0,027$
	Total = 1,000



**Figure 5.4** Représentation graphique de la distribution de probabilité du nombre de clients effectuant un achat

La fonction de probabilité binomiale peut être appliquée à toute expérience binomiale. Si nous sommes dans une situation où les propriétés d'une expérience binomiale sont satisfaites et où les valeurs de  $n$  et  $p$  sont connues, nous pouvons utiliser l'expression (5.8) pour calculer la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages.

Considérons une variante de l'exemple du magasin de prêt-à-porter Martin, en supposant que dix clients entrent dans le magasin, au lieu de trois. La fonction de probabilité binomiale donnée par l'expression (5.8) reste applicable. Supposons que nous ayons une expérience binomiale avec  $n = 10$ ,  $x = 4$  et  $p = 0,3$ . Dans ce cas, la probabilité que quatre clients sur les dix fassent un achat est égale à

$$f(4) = \frac{10!}{4!6!} (0,30)^4 (0,70)^6 = 0,2001$$

### 5.4.3 Utilisation des tables de probabilités binomiales

Des tables donnant la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages pour une expérience binomiale ont été créées. L'utilisation de ces tables est généralement facile et plus rapide que l'utilisation de la formule (5.8). Une table de probabilité binomiale est fournie en annexe B (table 5). Une partie de cette table a été reproduite dans le tableau 5.8. Pour utiliser cette table, il faut spécifier les valeurs de  $n$ ,  $p$  et  $x$  en fonction de l'expérience binomiale qui nous intéresse. Dans l'exemple en haut du tableau 5.8, la probabilité de trois succès dans une expérience binomiale avec  $n = 10$  et  $p = 0,4$  est de 0,2150. Vous pouvez vérifier que l'on obtient la même réponse en utilisant la fonction de probabilité binomiale (5.8).

**Tableau 5.8** Sélection de valeurs issues de la table de probabilité binomiale.Exemple :  $n = 10$ ,  $x = 3$ ,  $p = 0,4$  ;  $f(3) = 0,215$ 

		<i>p</i>									
<i>n</i>	<i>x</i>	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

Utilisons à présent cette table pour vérifier la probabilité de quatre succès en dix tirages dans le cadre du problème du magasin de prêt-à-porter Martin. La valeur de  $f(4) = 0,2001$  peut être lue directement dans la table des probabilités binomiales avec  $n = 10$ ,  $x = 4$  et  $p = 0,3$ .

Alors que les tables de probabilités binomiales sont relativement faciles à utiliser, il est impossible d'avoir des tables pour toutes les valeurs possibles de  $n$  et  $p$ , que l'on peut rencontrer dans une expérience binomiale. Cependant, avec les calculatrices actuelles, calculer la probabilité souhaitée en se servant de l'expression (5.8) n'est pas difficile, notamment si le nombre de tirages n'est pas très élevé. Dans les exercices, vous vous attacherez à calculer les probabilités binomiales à partir de l'expression (5.8), à moins que le problème ne vous demande explicitement d'utiliser la table des probabilités binomiales.

Avec les calculatrices modernes, ces tables sont presque inutiles. Il est facile d'appliquer la formule (5.8).

Les logiciels statistiques comme Minitab ou les tableurs comme Excel permettent également de calculer des probabilités binomiales. Considérons l'exemple du magasin de prêt-à-porter Martin avec  $n = 10$  et  $p = 0,3$ . La figure 5.5 illustre les probabilités binomiales générées par Minitab pour toutes les valeurs possibles de  $X$ . Notez que ces valeurs sont les mêmes que celles trouvées dans la colonne  $p = 0,3$  du tableau 5.8. L'annexe 5.1 détaille étape par étape la procédure d'utilisation de Minitab pour produire le résultat de la figure 5.5. L'annexe 5.2 décrit comment utiliser Excel pour calculer des probabilités binomiales.

### 5.4.4 Espérance mathématique et variance d'une loi binomiale

Dans la section 5.3 nous avons présenté les formules de calcul de l'espérance mathématique et de la variance d'une variable aléatoire discrète. Dans le cas particulier où la distribution de probabilité de la variable aléatoire est binomiale, avec un nombre de tirages  $n$  connu et une probabilité de succès  $p$  connue, les formules générales de l'espérance et de la variance peuvent être simplifiées. Leurs expressions sont données ci-dessous :

► **Espérance mathématique et variance pour une distribution binomiale**

$$E(X) = \mu = np \quad (5.9)$$

$$Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) \quad (5.10)$$

x	P(X = x)
0,00	0,0282
1,00	0,1211
2,00	0,2335
3,00	0,2668
4,00	0,2001
5,00	0,1029
6,00	0,0368
7,00	0,0090
8,00	0,0014
9,00	0,0001
10,00	0,0000

**Figure 5.5** Résultat de la programmation Minitab : Probabilités binomiales pour le problème du magasin de prêt-à-porter Martin

Pour le problème du magasin de prêt-à-porter Martin avec trois clients, on peut utiliser l'expression (5.9) pour calculer le nombre moyen de clients qui effectuent un achat.

$$E(X) = np = 3(0,3) = 0,9$$

Supposons que le magasin Martin prévoit que 1 000 clients entreront dans le magasin le mois prochain. Quel est le nombre moyen d'acheteurs ? La réponse est  $\mu = np = 1000(0,3) = 300$ . Ainsi, pour augmenter la moyenne des ventes, Martin doit inciter plus de clients à entrer dans le magasin et/ou accroître la probabilité qu'un client effectue un achat après être entré.

Pour le problème du magasin de prêt-à-porter Martin avec trois clients, la variance et l'écart type du nombre de clients effectuant un achat sont respectivement

$$\sigma^2 = np(1-p) = 3(0,3)(0,7) = 0,63$$

$$\sigma = \sqrt{0,63} = 0,79$$

Pour les 1 000 clients suivants qui entrent dans le magasin, la variance et l'écart type du nombre de clients effectuant un achat sont

$$\sigma^2 = np(1-p) = 1000(0,3)(0,7) = 210$$

$$\sigma = \sqrt{210} = 14,49$$

## REMARQUES

1. Les tables de probabilités binomiales présentées en annexe B donnent les valeurs de  $p$  jusqu'à  $p = 0,95$ . Dans certains ouvrages, les tables ne présentent les probabilités que pour des valeurs de  $p$  allant jusqu'à  $p = 0,5$ . On pourrait croire que de telles tables ne sont pas utilisables quand la probabilité de succès excède  $p = 0,5$ . Cependant, elles peuvent être utilisées car la probabilité de  $n-x$  échecs correspond à la probabilité de  $x$  succès. Quand la probabilité de succès est supérieure à  $0,5$ , on peut calculer à la place la probabilité de  $n-x$  échecs. La probabilité d'échec,  $1-p$ , sera inférieure à  $0,5$  quand  $p > 0,5$ .
2. Certains ouvrages présentent les tables binomiales sous forme cumulée. Pour utiliser de telles tables, il faut soustraire les probabilités cumulées pour obtenir la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages. Par exemple,  $f(2) = P(x \leq 2) - P(x \leq 1)$ . La table des probabilités binomiales présentée en annexe B fournit ces probabilités directement. Pour calculer les probabilités cumulées à partir de la table présentée en annexe B, il suffit de sommer les probabilités individuelles. Par exemple, pour calculer  $P(x \leq 2)$  en utilisant nos tables, il faut additionner  $f(0) + f(1) + f(2)$ .

## EXERCICES

**Méthode**

25. Soit une expérience binomiale avec deux tirages et  $p = 0,4$ .
- Représenter cette expérience sous forme d'un diagramme arborescent (cf. figure 5.3).
  - Calculer la probabilité d'un succès,  $f(1)$ .
  - Calculer  $f(0)$ .
  - Calculer  $f(2)$ .
  - Calculer la probabilité d'au moins un succès.
  - Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.
26. Soit une expérience binomiale avec  $n = 10$  et  $p = 0,10$ .
- Calculer  $f(0)$ .
  - Calculer  $f(2)$ .
  - Calculer  $P(x \leq 2)$ .
  - Calculer  $P(x \geq 1)$ .
  - Calculer  $E(X)$ .
  - Calculer  $Var(X)$  et  $\sigma_x$ .
27. Soit une expérience binomiale avec  $n = 20$  et  $p = 0,70$ .
- Calculer  $f(12)$ .
  - Calculer  $f(16)$ .
  - Calculer  $P(x \geq 16)$ .
  - Calculer  $P(x \leq 15)$ .
  - Calculer  $E(X)$ .
  - Calculer  $Var(X)$  et  $\sigma_x$ .

**Applications**

28. Dans le cadre de son enquête « Music 360 », la société Nielson a demandé à des adolescents et à des adultes leurs habitudes en matière d'écoute au cours des 12 derniers mois. Près des deux-tiers des adolescents américains âgés de moins de 18 ans ont déclaré utiliser le site de partage de vidéo de Google pour écouter de la musique et 35 % ont déclaré utiliser le service de radio en ligne Pandora Media (*The Wall Street Journal*, 14 août 2012). Supposez que 10 adolescents soient sélectionnés au hasard pour être interviewés sur la façon dont ils écoutent de la musique.
- Est-ce que le fait de sélectionner aléatoirement 10 adolescents et de leur demander s'ils utilisent ou non le service en ligne de Pandora Media est une expérience binomiale ?
  - Quelle est la probabilité qu'aucun des 10 adolescents n'utilise le service de radio en ligne de Pandora Media ?
  - Quelle est la probabilité que 4 des 10 adolescents utilisent le service de radio en ligne de Pandora Media ?

- d) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 des 10 adolescents utilisent le service de radio en ligne de Pandora Media ?
29. Le centre médical a rapporté avoir reçu 295 000 appels pour des services d'hospitalisation et des services de catégorie A du programme Medicare. Parmi eux, 40 % des appels ont été traités avec succès (*The Wall Street Journal*, 22 octobre 2012). Supposez que 10 appels aient été tout juste reçus par un centre médical.
- Calculer la probabilité qu'aucun des appels ne soit traité avec succès.
  - Calculer la probabilité qu'exactly un appel soit traité avec succès.
  - Quelle est la probabilité qu'au moins deux appels soient traités avec succès ?
  - Quelle est la probabilité que plus de la moitié des appels soient traités avec succès ?
30. Quand une machine fonctionne correctement, seulement 3 % des pièces produites sont défectueuses. Deux pièces produites sur la machine sont sélectionnées de façon aléatoire. Nous nous intéressons au nombre de pièces défectueuses.
- Décrire les conditions sous lesquelles cette situation constituerait une expérience binomiale.
  - Représenter cette expérience sous forme d'un diagramme arborescent similaire à celui de la figure 5.3.
  - Combien de résultats y a-t-il avec exactement un défaut détecté ?
  - Calculer les probabilités associées aux événements « aucun défaut n'est détecté », « exactement un défaut est détecté » et « deux défauts sont détectés ».
31. Une enquête Randstad/Harris Interactive a rapporté que 25 % des employés déclaraient que leur société était loyale envers eux (*USA Today*, 11 novembre 2009). Supposez que 10 employés sont sélectionnés aléatoirement et interrogés à propos de la loyauté de leur société.
- La sélection de dix employés constitue-t-elle une expérience binomiale ? Expliquer.
  - Quelle est la probabilité qu'aucun des 10 employés ne déclare que leur société est loyale envers eux ?
  - Quelle est la probabilité que 4 des 10 employés déclarent que leur société est loyale envers eux ?
  - Quelle est la probabilité qu'au moins 2 des 10 employés déclarent que leur société est loyale envers eux ?
32. Les systèmes de radar et de détection des missiles militaires sont conçus pour alerter un pays contre des attaques ennemies. Une question pertinente est de savoir si un système de détection est capable d'identifier une attaque et d'émettre un avertissement. Supposons qu'un système de détection particulier ait une probabilité de 0,90 de détecter une attaque par missile. Utiliser la distribution binomiale pour répondre aux questions suivantes.
- Quelle est la probabilité qu'un seul système de détection détecte une attaque ?
  - Si deux systèmes de détection sont installés dans la même région et opèrent indépendamment, quelle est la probabilité qu'au moins un des systèmes détecte l'attaque ?
  - Si trois systèmes sont installés, quelle est la probabilité qu'au moins un des systèmes détecte l'attaque ?
  - Recommanderiez-vous l'installation de plusieurs systèmes de détection ? Expliquer.



- 33.** Douze des 20 finalistes du championnat PGA de 2009 qui se déroula au club de golf Hazeltine à Chaska, dans le Minnesota, utilisaient des balles de golf de la marque Titleist (site Internet GolfBallTest, 12 novembre 2009). Supposez que ces résultats soient représentatifs de la probabilité qu'un joueur du championnat PGA sélectionné aléatoirement utilise des balles de la marque Titleist. Effectuer les calculs suivants, pour un échantillon de 15 joueurs du championnat PGA.
- a) Calculer la probabilité qu'exactement 10 des 15 joueurs utilisent des balles de golf de la marque Titleist.
  - b) Calculer la probabilité que plus de 10 joueurs sur les 15 utilisent des balles de golf de la marque Titleist.
  - c) Pour un échantillon de 15 joueurs du championnat PGA, calculer le nombre moyen de joueurs qui utilisent des balles de la marque Titleist.
  - d) Pour un échantillon de 15 joueurs du championnat PGA, calculer la variance et l'écart type du nombre de joueurs qui utilisent des balles de la marque Titleist.
- 34.** Une étude menée par le centre de recherche Pew a montré que 75 % des 18-34 ans vivant avec leurs parents déclarent contribuer aux dépenses du foyer (*The Wall Street Journal*, 22 octobre 2012). Supposez qu'un échantillon aléatoire de 15 personnes âgées de 18 à 34 ans vivant avec leurs parents soit sélectionné et qu'on leur demande si elles contribuent aux dépenses du foyer.
- a) La sélection de 15 personnes âgées de 18 à 34 ans vivant chez leurs parents constitue-t-elle une expérience binomiale ? Expliquer.
  - b) Si l'échantillon montre qu'aucune de ces personnes ne contribue aux dépenses du foyer, mettriez-vous en doute les résultats de l'étude du centre de recherche Pew ?
  - c) Quelle est la probabilité qu'au moins dix des quinze 18-34 ans vivant avec leurs parents contribuent aux dépenses du foyer ?
- 35.** Une université a constaté que 20 % de ses étudiants abandonnaient leurs études sans avoir validé le cours d'introduction aux statistiques. Supposons que 20 étudiants ont choisi ce cours ce trimestre.
- a) Quelle est la probabilité qu'au plus deux étudiants abandonnent ?
  - b) Quelle est la probabilité qu'exactement quatre étudiants abandonnent ?
  - c) Quelle est la probabilité que plus de trois étudiants abandonnent ?
  - d) Quelle est l'espérance mathématique du nombre d'abandons ?
- 36.** Un sondage Gallup a révélé que 30 % des Américains étaient satisfaits de la façon dont les choses se passaient aux États-Unis (site Internet de Gallup, 12 septembre 2012). Supposez qu'un échantillon de 20 Américains soit sélectionné pour participer à une étude sur la situation du pays.
- a) Calculer la probabilité qu'exactement quatre des vingt Américains interrogés soient satisfaits de la situation du pays.
  - b) Calculer la probabilité qu'au moins deux des vingt Américains interrogés soient satisfaits de la situation du pays.
  - c) Pour l'échantillon de 20 Américains, calculer le nombre moyen d'Américains satisfaits de la situation.
  - d) Pour l'échantillon de 20 Américains, calculer la variance et l'écart type du nombre d'Américains satisfaits de la situation .

37. Vingt-trois pourcents des véhicules en circulation ne sont pas assurés (CNN, 23 février 2006). Au cours d'un week-end particulier, 35 véhicules furent impliqués dans des accidents de la circulation.
- Quelle est l'espérance mathématique du nombre de véhicules impliqués non assurés ?
  - Quelle est la variance et quel est l'écart type ?

## 5.5 LA LOI DE POISSON

Dans cette section, nous considérons une variable aléatoire discrète qui est souvent utile pour décrire le nombre d'occurrences d'un événement au cours d'un intervalle de temps ou d'espace bien défini. Par exemple, la variable aléatoire en question peut être le nombre d'arrivées de voitures à une station de lavage en une heure, le nombre de réparations nécessaires sur 10 km d'autoroute, ou le nombre de fuites sur 100 km de pipeline. Si les deux propriétés suivantes sont satisfaites, le nombre d'occurrences est une variable aléatoire décrite par une loi (une distribution de probabilité) de Poisson.

La loi de Poisson est souvent utilisée pour modéliser les taux d'arrivée dans des situations de file d'attente.

### ► Propriétés d'une expérience de Poisson

- La probabilité d'une occurrence est la même dans deux intervalles de même longueur.
- L'occurrence ou la non-occurrence d'un événement dans un intervalle est indépendante de l'occurrence ou la non-occurrence de cet événement dans un autre intervalle.

La fonction de probabilité de Poisson est donnée par l'expression suivante :

### ► Fonction de probabilité de Poisson

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad (5.11)$$

où

- $f(x)$  est la probabilité de  $x$  occurrences dans un intervalle
- $\mu$  est l'espérance mathématique ou le nombre moyen d'occurrences dans un intervalle
- $e$  le nombre d'Euler, vaut environ 2,71828

Siméon Poisson enseigna les mathématiques à l'École Polytechnique de Paris de 1802 à 1808. En 1837, il publia un travail intitulé « Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et civile » qui comprend une discussion sur ce qui, plus tard, sera connu sous le nom de distribution de Poisson.

Dans le cadre d'une loi de Poisson,  $X$  est une variable aléatoire discrète indiquant le nombre d'occurrences dans un intervalle. Puisqu'il n'y a pas de limite supérieure au nombre d'occurrences, la fonction de probabilité  $f(x)$  est applicable pour les valeurs  $x = 0, 1, 2, \dots$  sans limite. Dans des applications pratiques, la valeur de  $X$  peut éventuellement être tellement grande que  $f(x)$  est proche de zéro ; la probabilité que  $X$  prenne des valeurs supérieures devient négligeable.

### 5.5.1 Un exemple avec des intervalles temporels

Les laboratoires Bell ont utilisé la distribution de Poisson pour modéliser les « arrivées » d'appels téléphoniques.

Supposons que nous nous intéressions au nombre d'arrivées au guichet d'une banque, au cours d'un intervalle de 15 minutes, le matin, en semaine. Si l'on suppose que la probabilité d'une arrivée est la même pour deux intervalles de longueur égale et que l'arrivée ou la non-arrivée pendant une période de temps est indépendante de l'arrivée ou de la non-arrivée pendant une autre période de temps, la fonction de probabilité de Poisson peut être appliquée. Supposons que ces hypothèses sont satisfaites et qu'une analyse des données historiques révèle que le nombre moyen d'arrivées au cours d'un intervalle de 15 minutes est de 10 ; dans ce cas, la fonction de probabilité suivante s'applique :

$$f(x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

La variable aléatoire est ici le nombre d'arrivées en 15 minutes.

Si la direction veut connaître la probabilité de cinq arrivées en 15 minutes, on pose  $x = 5$  et on obtient ainsi :

$$\text{Probabilité de 5 arrivées en 15 minutes} = f(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0,0378$$

Bien que la probabilité ci-dessus soit déterminée par la fonction de probabilité en posant  $\mu = 10$  et  $x = 5$ , il est souvent plus facile de recourir à la table de distribution de probabilités de Poisson. Cette table fournit les probabilités pour des valeurs particulières de  $x$  et  $\mu$ . Une table de ce type se trouve en annexe B, table 7. Par commodité, nous avons reproduit une partie de cette table dans le tableau 5.9. Pour utiliser la table des probabilités de Poisson, il suffit de connaître les valeurs de  $x$  et  $\mu$ . Dans le tableau 5.9, la probabilité de cinq arrivées en 15 minutes se lit à l'intersection de la ligne correspondant à  $x = 5$  et de la colonne correspondant à  $\mu = 10$ . On obtient  $f(x) = 0,0378$ .

Dans cet exemple, la moyenne de la distribution de Poisson est  $\mu = 10$  arrivées en 15 minutes. Une propriété de la distribution de Poisson est que la moyenne et la variance de la distribution sont égales. Ainsi, la variance du nombre d'arrivées en 15 minutes est  $\sigma^2 = 10$ . L'écart type est  $\sigma = \sqrt{10} = 3,16$ .

**Tableau 5.9** Valeurs sélectionnées de la table de probabilités de PoissonExemple :  $\mu = 10$ ,  $x = 5$ ;  $f(5) = 0,0378$ 

x	$\mu$									
	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0398	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0764	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1091	0,1064	0,1037	0,1010	0,0982	0,0955	0,0928	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137
12	0,0752	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0888	0,0908	0,0928	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0685	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521
15	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	0,0281	0,0297	0,0313	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	0,0168	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0026	0,0028	0,0031	0,0034	0,0037
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

Une propriété de la distribution de Poisson est que la moyenne et la variance sont égales.

L'exemple précédent implique une période de 15 minutes mais d'autres intervalles de temps peuvent être envisagés. Supposons que nous voulions calculer la probabilité d'une arrivée en trois minutes. Puisque 10 est le nombre moyen d'arrivées en 15 minutes,  $10/15 = 2/3$  est le nombre moyen d'arrivées en une minute et  $3 \cdot 2/3 = 2$  est le nombre moyen d'arrivées en trois minutes. Ainsi la probabilité de  $x$  arrivées en trois minutes avec  $\mu = 2$  est donnée par la fonction de probabilité de Poisson suivante.

$$f(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

La probabilité d'une arrivée en trois minutes est calculée comme suit :

$$\text{Probabilité d'une arrivée en 3 minutes} = f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,2707$$

Précédemment, nous avons calculé la probabilité de cinq arrivées en 15 minutes. Elle est égale à 0,0378. La probabilité d'une arrivée en 3 minutes (0,2707) n'est pas identique. Pour calculer une probabilité de Poisson pour un intervalle de temps différent, il convient tout d'abord de convertir le taux moyen d'arrivées pour la période de temps qui nous intéresse et ensuite de calculer la probabilité.

### 5.5.2 Un exemple avec des intervalles de longueur ou de distance

Considérons une application n'impliquant pas d'intervalle de temps, pour laquelle la distribution de probabilité de Poisson est utile. Supposons que nous nous intéressions à l'occurrence des défauts majeurs sur une autoroute, un mois après sa réfection. On suppose que la probabilité d'un défaut majeur est la même sur deux portions d'autoroute de longueur égale et que l'apparition d'un défaut sur un intervalle est indépendante de l'apparition d'un défaut sur un autre intervalle. Ainsi, la distribution de probabilité de Poisson peut être appliquée.

Supposons que les défauts majeurs apparaissent un mois après la réfection de l'autoroute à un taux moyen de deux par kilomètre. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de défaut majeur sur une portion particulière de l'autoroute d'une longueur de 3 km ? Puisque nous nous intéressons à un intervalle long de 3 km,  $\mu = (2 \text{ défauts/km})(3 \text{ km}) = 6$  représente le nombre moyen de défauts majeurs sur une portion d'autoroute de 3 km. D'après l'expression (5.11), la probabilité qu'il n'y ait aucun défaut majeur est égale à 0,0025. Il est donc improbable qu'il n'y ait aucun défaut sur cette portion d'autoroute longue de 3 km. En réalité, il y a une probabilité de 0,9975 ( $1 - 0,0025 = 0,9975$ ) qu'il y ait au moins un défaut majeur sur cette portion d'autoroute.

## EXERCICES

### Méthode

38. Considérer une distribution de probabilité de Poisson avec  $\mu = 3$ .
- Écrire la fonction de probabilité de Poisson appropriée.
  - Calculer  $f(2)$ .
  - Calculer  $f(1)$ .
  - Calculer  $P(x \geq 2)$ .

39. Considérer une distribution de probabilité de Poisson avec un nombre moyen de deux occurrences par période de temps.
- a) Écrire la fonction de probabilité de Poisson appropriée.
  - b) Quel est le nombre moyen d'occurrences en trois périodes de temps ?
  - c) Écrire la fonction de probabilité de Poisson appropriée pour déterminer la probabilité de  $x$  occurrences en trois périodes de temps.
  - d) Calculer la probabilité de deux occurrences en une période de temps.
  - e) Calculer la probabilité de six occurrences en trois périodes de temps.
  - f) Calculer la probabilité de cinq occurrences en deux périodes de temps.



## Applications

40. Les appels téléphoniques arrivent à un taux de 48 par heure au bureau des réservations de Regional Airways.
- a) Calculer la probabilité de recevoir trois appels dans un intervalle de 5 minutes.
  - b) Calculer la probabilité de recevoir exactement 10 appels en 15 minutes.
  - c) Supposons qu'il n'y ait aucun appel en attente pour le moment. Si l'agent met cinq minutes pour répondre à l'appel en cours, combien de personnes attendront pendant ce temps ? Quelle est la probabilité que personne n'attende ?
  - d) S'il n'y a aucun appel en cours, quelle est la probabilité que l'agent puisse prendre 3 minutes de repos sans être dérangé ?
41. Durant la période des inscriptions par téléphone à l'université, les appels se succèdent au rythme d'un toutes les deux minutes.
- a) Quel est le nombre moyen d'appels en une heure ?
  - b) Quelle est la probabilité de trois appels en cinq minutes ?
  - c) Quelle est la probabilité d'aucun appel dans un intervalle de cinq minutes ?
42. En 2011, la ville de New York a enregistré un total de 11 232 accidents de véhicules motorisés qui se sont produits du lundi au vendredi entre 15 h et 18 h (site Internet du département des véhicules motorisés de l'État de New York, 24 octobre 2012). Cela correspond à une moyenne de 14,4 accidents par heure.
- a) Calculer la probabilité qu'aucun accident ne survienne durant une période de 15 minutes.
  - b) Calculer la probabilité qu'au moins un accident survienne durant une période de 15 minutes.
  - c) Calculer la probabilité qu'au moins quatre accidents surviennent durant une période de 15 minutes.
43. Les passagers d'une compagnie aérienne arrivent aléatoirement et indépendamment au poste de contrôle des bagages d'un grand aéroport international. Le taux d'arrivée moyen est de 10 passagers par minute.
- a) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée au cours d'une minute ?



- b) Quelle est la probabilité qu'au plus trois passagers arrivent au cours d'une minute ?
  - c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée au cours de 15 secondes ?
  - d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une arrivée au cours de 15 secondes ?
44. Selon l'Administration nationale océanique et atmosphérique (NOAA), l'État du Colorado enregistre en moyenne 18 tornades au mois de juin chaque année (site Internet de NOAA, 8 novembre 2012). Remarque : il y a 30 jours au mois de juin.
- a) Calculer le nombre moyen de tornades par jour.
  - b) Calculer la probabilité qu'aucune tornade ne se forme au cours d'une journée.
  - c) Calculer la probabilité qu'exactement une tornade se forme au cours d'une journée.
  - d) Calculer la probabilité que plus d'une tornade se forme au cours d'une journée.
45. Le conseil national de sécurité estime que les accidents interrompant le travail coûtent environ 200 milliards de dollars chaque année en perte de productivité aux entreprises américaines (Conseil National de Sécurité, mars 2006). En se fondant sur les estimations du Conseil, on s'attend à ce que trois accidents surviennent dans les sociétés de 50 employés. Répondre aux questions suivantes pour les sociétés de 50 employés.
- a) Quelle est la probabilité qu'aucun accident ne survienne durant une période d'un an ?
  - b) Quelle est la probabilité qu'au moins deux accidents surviennent durant une période d'un an ?
  - c) Quelle est l'espérance mathématique du nombre d'accidents en six mois ?
  - d) Quelle est la probabilité qu'aucun accident ne survienne au cours des six prochains mois ?

## 5.6 LA LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

La **loi hypergéométrique** est étroitement liée à la loi binomiale. La différence majeure entre ces deux lois est que, lorsqu'il s'agit d'une loi hypergéométrique, les tirages ne sont pas indépendants, et la probabilité de succès change d'un tirage à l'autre.

La notation habituelle dans des applications de la loi hypergéométrique est la suivante :  $r$  correspond au nombre d'éléments dans la population de taille  $N$  qui sont considérés comme des succès et  $N - r$  correspond au nombre d'éléments dans la population qui sont considérés comme des échecs. La **fonction de probabilité hypergéométrique** est utilisée pour calculer la probabilité que, dans un échantillon de  $n$  éléments sélectionnés aléatoirement sans remise, nous obtenions  $x$  éléments considérés comme des succès et  $n - x$  éléments considérés comme des échecs. Pour que cela se réalise, il faut obtenir  $x$  succès parmi les  $r$  succès de la population et  $n - x$  échecs parmi les  $N - r$  échecs de la population. La fonction de probabilité hypergéométrique décrite ci-dessous fournit la probabilité d'obtenir  $x$  succès dans un échantillon de taille  $n$ .

► **Fonction de probabilité hypergéométrique**

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{N-x}}{\binom{N}{n}} \quad (5.12)$$

pour  $0 \leq x \leq r$

où  $x$  est le nombre de succès

$n$  est le nombre de tirages

$f(x)$  est la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages

$N$  est le nombre d'éléments dans la population

$r$  est le nombre d'éléments dans la population appelés succès

Notez que  $\binom{N}{n}$  représente le nombre de façons de sélectionner un échantillon de taille  $n$  parmi une population de taille  $N$ ;  $\binom{r}{x}$  représente le nombre de façons d'obtenir  $x$  succès parmi un nombre total de succès  $r$  dans la population; et  $\binom{N-r}{n-x}$  représente le nombre de façons d'obtenir  $n-x$  échecs parmi un nombre total d'échecs  $N-r$  dans la population. Dans le cadre d'une loi hypergéométrique,  $X$  est une variable aléatoire discrète et la fonction de probabilité  $f(x)$  donnée par l'équation (5.12) est généralement applicable pour des valeurs  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Cependant, seules les valeurs de  $X$  pour lesquelles le nombre de succès observés est inférieur ou égal au nombre de succès dans la population ( $x \leq r$ ) et pour lesquelles le nombre d'échecs observés est inférieur ou égal au nombre d'échecs dans la population ( $n-x \leq N-r$ ) sont valides. Si ces deux conditions ne sont pas satisfaites pour certaines valeurs de  $X$ , alors  $f(x) = 0$  pour ces valeurs, indiquant que la probabilité que la variable aléatoire  $X$  prenne cette valeur est nulle.

Pour illustrer les calculs nécessaires lors de l'utilisation de la formule (5.12), considérons le problème de contrôle de la qualité suivant. Les fusibles électriques produits par Ontario Electric sont conditionnés par boîte de douze. Supposons qu'un inspecteur sélectionne aléatoirement trois des 12 fusibles contenus dans une boîte pour les tester. Si la boîte contient exactement cinq fusibles défectueux, quelle est la probabilité que l'inspecteur trouve exactement un fusible défectueux parmi les trois sélectionnés au hasard ? Dans cet exemple,  $n = 3$  et  $N = 12$ . Avec  $r = 5$  fusibles défectueux dans la boîte, la probabilité de trouver  $x = 1$  fusible défectueux est :

$$f(1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{7}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{\left(\frac{5!}{1!4!}\right) \left(\frac{7!}{2!5!}\right)}{\left(\frac{12!}{3!9!}\right)} = \frac{5 \times 21}{220} = 0,4773$$

Supposons maintenant que nous voulions connaître la probabilité de trouver *au moins* un fusible défectueux. La façon la plus simple de répondre à cette question consiste

tout d'abord à calculer la probabilité que l'inspecteur ne trouve aucun fusible défectueux. La probabilité de  $x = 0$  est :

$$f(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\left(\frac{5!}{0!4!}\right)\left(\frac{7!}{2!5!}\right)}{\left(\frac{12!}{3!9!}\right)} = \frac{1 \times 35}{220} = 0,1591$$

La probabilité de ne trouver aucun fusible défectueux étant égale à 0,1591, on en conclut que la probabilité de trouver au moins un fusible défectueux est de  $1 - 0,1591 = 0,8409$ . Ainsi, il y a une probabilité relativement élevée que l'inspecteur trouve au moins un fusible défectueux.

La moyenne et la variance d'une distribution hypergéométrique sont données par les formules suivantes :

$$E(X) = \mu = n \left( \frac{r}{N} \right) \quad (5.13)$$

$$Var(X) = \sigma^2 = n \left( \frac{r}{N} \right) \left( 1 - \frac{r}{N} \right) \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \quad (5.14)$$

Dans l'exemple précédent,  $n = 3$ ,  $r = 5$  et  $N = 12$ . Ainsi, la moyenne et la variance du nombre de fusibles défectueux sont égales à :

$$\mu = n \left( \frac{r}{N} \right) = 3 \left( \frac{5}{12} \right) = 1,25$$

$$\sigma^2 = n \left( \frac{r}{N} \right) \left( 1 - \frac{r}{N} \right) \left( \frac{N-n}{N-1} \right) = 3 \left( \frac{5}{12} \right) \left( 1 - \frac{5}{12} \right) \left( \frac{12-3}{12-1} \right) = 0,60$$

L'écart type est égal à  $\sigma = \sqrt{0,60} = 0,77$ .

## REMARQUES

Considérons une distribution hypergéométrique avec  $n$  tirages. Soit  $p = \left( \frac{r}{N} \right)$  la probabilité de succès au premier tirage. Si la taille de la population est importante, le terme  $\frac{N-n}{N-1}$  de l'expression (5.14) tend vers 1. Par conséquent, la moyenne et la variance se résument à  $E(X) = np$  et  $Var(X) = np(1-p)$ . Ces expressions sont celles de la moyenne et de la variance d'une distribution binomiale (expressions (5.9) et (5.10)). Lorsque la taille de la population est importante, une distribution hypergéométrique peut être approchée par une distribution binomiale avec  $n$  tirages et une probabilité de succès  $p = \left( \frac{r}{N} \right)$ .

## EXERCICES

**Méthode**

46. Supposons que  $N = 10$  et  $r = 3$ . Calculer les probabilités hypergéométriques pour les valeurs suivantes de  $x$  et de  $n$ .
- $n = 4, x = 1$ .
  - $n = 2, x = 2$ .
  - $n = 2, x = 0$ .
  - $n = 4, x = 2$ .
  - $n = 4, x = 4$ .
47. Supposons que  $N = 15$  et  $r = 4$ . Quelle est la probabilité de  $x = 3$  pour  $n = 10$  ?

**Applications**

48. Une enquête a révélé qu'une majorité d'Américains envisageaient de faire leurs achats de Noël en ligne pour ne pas dépenser de l'argent en carburant pour se rendre d'un magasin à l'autre (site Internet de SOASTA, 24 octobre 2012). Supposez que nous ayons un groupe de 10 acheteurs ; 7 préfèrent faire leurs achats en ligne et 3 dans des magasins physiques. Un échantillon aléatoire de 3 acheteurs parmi ces 10 est sélectionné pour une étude approfondie relative à l'impact de leur comportement d'achat sur l'économie.
- Quelle est la probabilité qu'exactly deux acheteurs préfèrent acheter en ligne ?
  - Quelle est la probabilité que la majorité (2 ou 3 acheteurs) préfère acheter en ligne ?
49. Le Blackjack, appelé fréquemment le 21, est un jeu populaire, joué dans les casinos de Las Vegas. Un joueur reçoit deux cartes. Les figures (valets, dames et rois) et les dix valent 10 points. Les as valent 11 points. Un jeu de 52 cartes comprend 16 cartes valant 10 points (valets, dames, rois et dix) et 4 as.
- Quelle est la probabilité que les deux cartes données soient des cartes à 10 points ou des as ?
  - Quelle est la probabilité que les deux cartes soient des as ?
  - Quelle est la probabilité que les deux cartes soient des cartes à 10 points ?
  - Un blackjack est la combinaison d'une carte à 10 points et d'un as, formant ainsi un total de 21 points. Utiliser vos réponses aux questions précédentes pour déterminer la probabilité qu'un joueur détienne un blackjack (astuce : cette question n'est pas un problème hypergéométrique. Développer votre propre relation logique, afin de déterminer comment les probabilités hypergéométriques des questions (a), (b) et (c) peuvent être combinées pour répondre à cette question).
50. La société Axline Computers fabrique des ordinateurs dans deux usines, l'une située au Texas, l'autre à Hawaï. L'usine du Texas emploie 40 personnes ; l'usine de Hawaï, 20 personnes. On a demandé à un échantillon aléatoire de 10 employés de répondre à un questionnaire.
- Quelle est la probabilité qu'aucun employé sélectionné ne travaille à Hawaï ?
  - Quelle est la probabilité qu'un seul employé sélectionné travaille à Hawaï ?
  - Quelle est la probabilité qu'au moins deux employés sélectionnés travaillent à Hawaï ?
  - Quelle est la probabilité que neuf employés sélectionnés travaillent au Texas ?



51. L'enquête des restaurants Zagat fournit des évaluations quant à la qualité de la nourriture, du décor et du service dans plusieurs grands restaurants à travers les États-Unis. Pour les 15 meilleurs restaurants de Boston, le prix moyen d'un dîner, incluant boisson et pourboire, était de 48,60 dollars. Vous partez en voyage d'affaires à Boston et vous dînez dans trois de ces restaurants. Votre société vous remboursera au maximum 50 dollars par repas. Des collègues, coutumiers de ces restaurants, vous ont dit que le prix du repas dans 1/3 de ces restaurants excédait 50 dollars. Supposez que vous sélectionniez aléatoirement trois de ces restaurants pour dîner.
- Quelle est la probabilité qu'aucun des repas n'excède le prix remboursé par votre société ?
  - Quelle est la probabilité qu'un des repas excède le prix remboursé par votre société ?
  - Quelle est la probabilité que deux des repas excèdent le prix remboursé par votre société ?
  - Quelle est la probabilité que les trois repas excèdent le prix remboursé par votre société ?
52. Le programme de relance de l'économie (TARP) adopté par le Congrès américain en octobre 2008, a permis l'injection de 700 milliards de dollars dans l'économie en difficulté. Plus de 200 milliards de dollars ont été donnés aux institutions financières en difficulté dans le but d'augmenter leur offre de prêts pour relancer l'économie. Mais trois mois plus tard, une étude de la Réserve fédérale a montré que les deux tiers des banques qui avaient reçu une aide du fonds de relance, avaient durci leurs conditions de prêts aux entreprises (*The Wall Street Journal*, 3 février 2009). Sur les 10 banques qui ont été les principales bénéficiaires du fonds de relance, seules trois ont effectivement accordé davantage de prêts durant cette période.

Augmentation des prêts accordés	Réduction des prêts accordés
BB&T	Bank of America
Sun Trust Banks	Capital One
U.S. Bancorp	Citigroup
	FifthThirdBancorp
	J.P. Morgan Chase
	Regions Financial
	U.S. Bancorp

Dans le cadre de cet exercice, supposez que vous sélectionniez aléatoirement 3 banques parmi ces 10 établissements pour poursuivre l'étude sur les comportements de prêts des banques. Soit  $X$  une variable aléatoire indiquant le nombre de banques dans l'étude qui ont accordé davantage de prêts.

- Quelle est la valeur de  $f(0)$  ? Quelle est votre interprétation de cette valeur ?
- Quelle est la valeur de  $f(3)$  ? Quelle est votre interprétation de cette valeur ?
- Calculer  $f(1)$  et  $f(2)$ . Déterminer la distribution de probabilité du nombre de banques qui ont accordé davantage de prêts. Quelle valeur de la variable aléatoire a la plus grande probabilité d'occurrence ?
- Quelle est la probabilité qu'au moins une banque ait accordé davantage de prêts ?
- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de cette variable aléatoire.

## RÉSUMÉ

Une variable aléatoire fournit une description numérique du résultat d'une expérience. La distribution de probabilité d'une variable aléatoire décrit la façon dont les probabilités sont distribuées, en fonction des valeurs que la variable aléatoire peut prendre. Pour une variable aléatoire discrète  $X$ , la distribution de probabilité est définie par une

fonction de probabilité notée  $f(x)$  qui donne la probabilité associée à chaque valeur  $x$  de la variable aléatoire.

Nous avons introduit deux types de distributions de probabilité discrètes. L'une implique l'établissement d'une liste de valeurs que peut prendre la variable aléatoire et les probabilités associées dans un tableau. Nous avons montré comment la méthode d'attribution des probabilités basée sur la fréquence relative pouvait être utilisée pour développer des distributions de probabilité discrètes empiriques de ce type.

Le second type de distribution de probabilité discrète dont nous avons parlé, implique l'utilisation d'une fonction mathématique pour définir les probabilités d'une variable aléatoire. Les lois binomiale, de Poisson et hypergéométrique discutées ici sont toutes de ce type. La loi binomiale peut être utilisée pour déterminer la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages si l'expérience a les propriétés suivantes :

1. L'expérience est une série de  $n$  tirages identiques.
2. Deux issues sont possibles à chaque tirage. L'une est qualifiée de succès, l'autre d'échec.
3. La probabilité de succès  $p$  ne se modifie pas d'un tirage à l'autre. Par conséquent, la probabilité d'échec  $1-p$  ne se modifie pas non plus.
4. Les tirages sont indépendants les uns des autres.

Quand les quatre conditions sont satisfaites, on peut déterminer la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages en utilisant la fonction de probabilité binomiale. Nous avons également présenté les formules de la moyenne et de la variance d'une loi binomiale.

La loi de Poisson est utilisée pour déterminer la probabilité d'obtenir  $x$  occurrences au cours d'un intervalle de temps ou d'espace donné. Une expérience suit une loi de Poisson si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. La probabilité d'une occurrence est la même dans deux intervalles de même longueur.
2. L'occurrence ou la non-occurrence dans un intervalle est indépendante de l'occurrence ou la non-occurrence dans un autre intervalle.

Une troisième loi discrète, la loi hypergéométrique, a été introduite dans la section 5.6. Comme la loi binomiale, elle est utilisée pour calculer la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages. Mais contrairement à la loi binomiale, la probabilité de succès change d'un tirage à l'autre.

## GLOSSAIRE

**VARIABLE ALÉATOIRE.** Description numérique du résultat d'une expérience.

**VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE.** Variable aléatoire qui peut prendre un nombre de valeurs fini ou infini dénombrable.

**VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE.** Variable aléatoire qui peut prendre n'importe quelle

valeur dans un intervalle ou un ensemble d'intervalles.

**DISTRIBUTION OU LOI DE PROBABILITÉ.** Description de la façon dont les probabilités sont distribuées selon les valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

**FONCTION DE PROBABILITÉ.** Fonction notée  $f(x)$  qui donne la probabilité que la variable aléatoire  $X$  prenne une valeur  $x$  particulière.

**DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ DISCRÈTE EMPIRIQUE.** Distribution de probabilité discrète pour laquelle la méthode d'attribution des probabilités basée sur la méthode des fréquences relatives peut être utilisée.

**LOI UNIFORME DISCRÈTE.** Distribution de probabilité pour laquelle chaque valeur possible de la valeur aléatoire a la même probabilité d'occurrence.

**ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE.** Mesure de la moyenne ou de la tendance centrale d'une variable aléatoire.

**VARIANCE.** Mesure de la dispersion ou de la variabilité d'une variable aléatoire.

**ÉCART TYPE.** Racine carrée de la variance.

**EXPÉRIENCE BINOMIALE.** Expérience probabiliste ayant les quatre propriétés établies dans la section 5.4.

**LOI BINOMIALE.** Distribution de probabilité donnant la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages d'une expérience binomiale.

**FONCTION DE PROBABILITÉ BINOMIALE.** Fonction utilisée pour calculer les probabilités d'une expérience binomiale.

**LOI DE POISSON.** Distribution de probabilité donnant la probabilité de  $x$  occurrences d'un événement dans un intervalle de temps ou d'espace particulier.

**FONCTION DE PROBABILITÉ DE POISSON.** Fonction utilisée pour calculer les probabilités de Poisson.

**LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE.** Distribution de probabilité donnant la probabilité de  $x$  succès en  $n$  tirages à partir d'une population caractérisée par  $r$  succès et  $N - r$  échecs.

**FONCTION DE PROBABILITÉ HYPERGÉOMÉTRIQUE.** Fonction utilisée pour calculer les probabilités hypergéométriques.

## FORMULES CLÉ

### Fonction de probabilité uniforme discrète

$$f(x) = \frac{1}{n} \quad (5.3)$$

### Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

$$E(X) = \mu = \sum xf(x) \quad (5.4)$$

### Variance d'une variable aléatoire discrète

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x) \quad (5.5)$$

### Nombre de résultats d'une expérience fournissant $x$ succès en $n$ tirages

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad (5.6)$$

### Fonction de probabilité binomiale

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \quad (5.8)$$

**Espérance mathématique pour une distribution de probabilité binomiale**

$$E(X) = \mu = np \quad (5.9)$$

**Variance pour une distribution de probabilité binomiale**

$$Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) \quad (5.10)$$

**Fonction de probabilité de Poisson**

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad (5.11)$$

**Fonction de probabilité hypergéométrique**

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{N-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq r \quad (5.12)$$

**Espérance mathématique pour une distribution de probabilité hypergéométrique**

$$E(X) = \mu = n \left( \frac{r}{N} \right) \quad (5.13)$$

**Variance pour une distribution de probabilité hypergéométrique**

$$Var(X) = \sigma^2 = n \left( \frac{r}{N} \right) \left( 1 - \frac{r}{N} \right) \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \quad (5.14)$$

**EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES**

- 53.** Les garde-côtes américains fournissent une grande quantité d'informations relatives aux accidents de bateaux incluant les conditions météorologiques (force des vents) au moment de l'accident. Le tableau suivant indique les résultats obtenus pour 4 401 accidents (site Internet des garde-côtes, 8 novembre 2012).

Force des vents	Pourcentage d'accidents
Aucun	9,6
Léger	54,0
Modéré	23,8
Fort	7,7
Tempête	1,9

Soit  $X$  une variable aléatoire reflétant les conditions connues relatives à la force des vents au moment de chaque accident. On fixe  $x = 0$  pour aucun,  $x = 1$  pour léger,  $x = 2$  pour modéré,  $x = 3$  pour fort et  $x = 4$  pour tempête.

- a) Développer une distribution de probabilité pour  $X$ .
  - b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .
  - c) Calculer la variance et l'écart type de  $X$ .
  - d) Que révèlent vos résultats quant à la relation entre les conditions météorologiques et les accidents de bateaux ?
54. Le site Internet Car Repair Ratings fournit aux consommateurs des informations et des évaluations des garagistes présents aux États-Unis et au Canada. Les temps d'attente des consommateurs sont l'une des catégories évaluées. Le tableau suivant fournit un résumé des évaluations des temps d'attente (1 = Service lent / retard ; 10 = Service rapide / à l'heure) pour 40 garages sélectionnés aléatoirement implantés dans la province de l'Ontario au Canada (site Internet Car Repair Ratings, 14 novembre 2012).

Évaluation du temps d'attente	Nombre de garages
1	6
2	2
3	3
4	2
5	5
6	2
7	4
8	5
9	5
10	6

- a) Développer une distribution de probabilité pour  $X$  correspondant à l'évaluation du temps d'attente.
  - b) Un garage qui a obtenu une note au moins égale à 9 est considéré fournir un service de qualité. Si un consommateur sélectionne aléatoirement un des 40 garages pour y faire sa prochaine révision, quelle est la probabilité que le garage sélectionné fournisse un service de qualité ?
  - c) Quelle est l'espérance mathématique et la variance pour la variable aléatoire  $X$  ?
  - d) Supposez que 7 des 40 garages passés en revue soient des revendeurs de voitures neuves. Sur ces 7 revendeurs de voitures neuves, deux fournissent des services de qualité. Comparez la probabilité qu'un revendeur de voitures neuves fournisse un service de qualité par rapport à d'autres types de garages.
55. Les dépenses budgétaires d'une université du Midwest ont été estimées pour l'année à venir à 9, 10, 11, 12 ou 13 millions de dollars. Les dépenses réelles ne sont pas connues mais les probabilités suivantes ont été assignées aux différentes dépenses : 0,3, 0,2, 0,25, 0,05 et 0,2.
- a) Donner la distribution de probabilité des dépenses prévisionnelles.

- b) Quelle est l'espérance mathématique des dépenses pour l'année à venir ?
- c) Quelle est la variance des dépenses pour l'année à venir ?
- d) Si les revenus pour l'année sont estimés à 12 millions de dollars, quelle sera la situation financière de l'université ?
- 56.** Une enquête a montré qu'en moyenne le trajet de porte à porte d'un banlieusard, entre son domicile et son lieu de travail, dure 26 minutes. De plus, 5 % des banlieusards ont un temps de trajet supérieur à une heure (site Internet du bureau des statistiques sur les transports, 12 janvier 2004).
- a) Si 20 banlieusards sont interrogés un jour donné, quelle est la probabilité que trois indiquent que leur trajet domicile-travail dure plus d'une heure ?
- b) Si 20 banlieusards sont interrogés un jour donné, quelle est la probabilité qu'aucun n'indique que son trajet domicile-travail dure plus d'une heure ?
- c) Si une société a 2 000 employés, quelle est l'espérance mathématique du nombre d'employés effectuant un trajet domicile-travail dont la durée est supérieure à une heure ?
- d) Si une société a 2 000 employés, quels sont la variance et l'écart type du nombre d'employés effectuant un trajet domicile-travail dont la durée est supérieure à une heure ?
- 57.** Le tableau suivant fournit le pourcentage d'individus dans chaque tranche d'âge qui se sert d'un programme de fiscalité en ligne pour préparer sa déclaration de revenus (site Internet CompleteTax, 9 novembre 2012).

Âge	Utilise un programme en ligne (%)
18-34	16
35-44	12
45-54	10
55-64	8
65 et plus	2

Supposez qu'une étude approfondie basée sur des interviews personnelles soit menée par la suite pour déterminer les facteurs les plus importants dans le choix d'une méthode pour remplir sa déclaration d'impôts.

- a) Combien de personnes appartenant au groupe d'âge 18-34 ans devraient être incluses dans l'échantillon pour obtenir un nombre moyen de personnes utilisant un programme en ligne pour préparer sa déclaration d'impôt supérieur ou égal à 25 ?
- b) Combien de personnes appartenant au groupe d'âge 35-44 ans devraient être incluses dans l'échantillon pour obtenir un nombre moyen de personnes utilisant un programme en ligne pour préparer sa déclaration d'impôt supérieur ou égal à 25 ?
- c) Combien de personnes ayant au moins 65 ans devraient être incluses dans l'échantillon pour obtenir un nombre moyen de personnes utilisant un programme en ligne pour préparer sa déclaration d'impôt supérieur ou égal à 25 ?
- d) Si le nombre d'individus âgés entre 18 et 34 ans inclus dans l'échantillon est égal à la valeur identifiée à la question (a), quel est l'écart type du pourcentage de personnes qui utilisent un programme en ligne ?

- e) Si le nombre d'individus âgés entre 35 et 44 ans inclus dans l'échantillon est égal à la valeur identifiée à la question (b), quel est l'écart type du pourcentage de personnes qui utilisent un programme en ligne ?
58. Beaucoup de sociétés utilisent une technique de contrôle de la qualité appelée « échantillonnage d'acceptation » pour contrôler les arrivées de cargaisons de pièces, de matières premières, etc. Dans l'industrie électronique, les composants sont fréquemment envoyés en grand nombre. L'inspection d'un échantillon de  $n$  composants peut être considérée comme les  $n$  tirages d'une expérience binomiale. Le résultat de chaque composant testé (tirage) indique soit que le composant est bon, soit qu'il est défectueux. Reynolds Electronics accepte un lot d'un fournisseur particulier si la part des composants défectueux dans ce lot n'excède pas 1 %. Considérons un échantillon aléatoire de cinq unités d'une cargaison testée.
- Supposons que 1 % de la cargaison est défectueuse. Calculer la probabilité qu'aucune unité de l'échantillon ne soit défectueuse.
  - Supposons que 1 % de la cargaison est défectueuse. Calculer la probabilité qu'exactly une unité de l'échantillon soit défectueuse.
  - Quelle est la probabilité d'observer au moins une unité défectueuse dans l'échantillon, si 1 % de la cargaison est défectueuse ?
  - Vous sentiriez-vous rassuré en acceptant une cargaison si une unité était trouvée défectueuse ? Pourquoi ?
59. Le taux de chômage s'élève à 4,1 % en Arizona (site Internet CNN Money, 2 mai 2007). Supposons que 100 personnes en âge de travailler vivant en Arizona soient sélectionnées aléatoirement.
- Quelle est l'espérance mathématique du nombre de chômeurs ?
  - Quels sont la variance et l'écart type du nombre de chômeurs ?
60. La société Mahoney Custom Home Builders de Canyon Lake au Texas a demandé aux visiteurs de son site Internet ce qui était pour eux le plus important dans le choix d'un constructeur de maison. Les réponses possibles étaient : la qualité, le prix, les avis de clients, l'ancienneté de la société et des caractéristiques spécifiques. Les résultats ont montré que 23,5 % des personnes qui ont répondu choisissaient le prix comme critère le plus important (site Internet de Mahoney Custom Homes, 13 novembre 2012). Supposez qu'un échantillon de 200 acheteurs potentiels de maisons autour de Canyon Lake soit sélectionné.
- Combien d'acheteurs potentiels déclareront que le prix est le critère le plus important dans leur choix d'un constructeur ?
  - Quel est l'écart type du nombre de personnes interrogées pour lesquelles le prix est le critère de choix le plus important ?
  - Quel est l'écart type du nombre de personnes interrogées qui ne considèrent pas le prix comme le critère de choix d'un constructeur le plus important ?
61. Les voitures arrivent à une station de lavage aléatoirement et indépendamment. La probabilité d'une arrivée est la même pour deux intervalles de longueur égale. Le taux d'arrivée moyen est de 15 voitures par heure. Quelle est la probabilité qu'au moins 20 voitures arrivent en une heure ?
62. Un nouveau processus de production automatique tombe en panne, en moyenne, 1,5 fois par jour. À cause du coût associé à une panne, la direction s'intéresse à la probabilité d'avoir au

moins trois pannes en une journée. Supposons que les pannes surviennent aléatoirement, que la probabilité d'une panne est la même pour deux intervalles de temps de longueur égale et que les pannes survenant au cours d'une période sont indépendantes des pannes survenant au cours d'autres périodes. Quelle est la probabilité d'avoir au moins trois pannes en une journée ?

- 63.** Un directeur régional responsable du développement économique en Pennsylvanie s'intéresse au nombre de faillites des petites entreprises. Si le nombre moyen de faillites de petites entreprises est de 10 par mois, quelle est la probabilité qu'exactement quatre petites entreprises fassent faillite au cours d'un mois donné ? Supposez que la probabilité de faillite est la même pour deux mois différents et que l'occurrence ou la non-occurrence d'une faillite au cours d'un mois donné est indépendante des faillites survenues au cours d'un autre mois.
- 64.** Les arrivées de clients dans une banque sont aléatoires et indépendantes. La probabilité d'une arrivée en une minute est la même que la probabilité d'une arrivée en une autre minute. Supposons un taux d'arrivée moyen de trois clients par minute.
- a) Quelle est la probabilité d'exactement trois arrivées en une minute ?
  - b) Quelle est la probabilité d'au moins trois arrivées en une minute ?
- 65.** Un jeu de cartes contient 52 cartes, dont quatre as. Quelle est la probabilité que la donne de cinq cartes fournisse :
- a) Une paire d'as ?
  - b) Un as ?
  - c) Aucun as ?
  - d) Au moins un as ?
- 66.** Dans le classement des meilleures écoles de commerce américaines effectué par *U.S. News & World Report*, les universités de Harvard et Stanford occupent à égalité la première place. De plus, sur 7 des 10 premières écoles de commerce, les étudiants ont une note GPA moyenne supérieure ou égale à 3,50 (*America's Best Graduate Schools*, édition 2009, U.S. News & World Report). Supposez que nous sélectionnions aléatoirement 2 écoles parmi les 10 meilleures.
- a) Quelle est la probabilité que dans exactement une école, les étudiants aient une note GPA moyenne supérieure ou égale à 3,50 ?
  - b) Quelle est la probabilité que dans les deux écoles, les étudiants aient une note GPA moyenne supérieure ou égale à 3,50 ?
  - c) Quelle est la probabilité que dans aucune des deux écoles, les étudiants aient une note GPA moyenne supérieure ou égale à 3,50 ?

## ANNEXE 5.1 DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES AVEC MINITAB

Les logiciels statistiques tels que Minitab proposent une procédure efficace et relativement simple pour calculer des probabilités binomiales. Dans cette annexe, nous détaillons pas à pas la procédure de détermination des probabilités binomiales dans le cadre du

problème du magasin de prêt-à-porter Martin introduit dans la section 5.4. La probabilité binomiale souhaitée est calculée pour  $n = 10$  et  $p = 0,3$ . Avant de commencer la programmation Minitab, l'utilisateur doit entrer les valeurs de la variable aléatoire  $X$  dans une colonne de la feuille de calcul. Nous entrons les valeurs 0, 1, 2, ..., 10 dans la colonne 1 (voir figure 5.5) pour générer la loi binomiale. Les étapes de Minitab pour obtenir les probabilités binomiales voulues sont les suivantes.

- Étape 1.** Sélectionner le menu **Calc**
- Étape 2.** Sélectionner **Probability Distributions**
- Étape 3.** Sélectionner **Binomial**
- Étape 4.** Quand la boîte de dialogue s'ouvre :
  - Sélectionner **Probability**
  - Entrer 10 dans la boîte **Number of trials**
  - Entrer 0,3 dans la boîte **Probability of success**
  - Entrer C1 dans la boîte **Input column**
  - Cliquer sur **OK**

Le résultat de cette procédure apparaîtra de la même façon que celui présenté dans la figure 5.5.

Minitab fournit des probabilités de Poisson et hypergéométriques de la même manière. Par exemple, pour calculer des probabilités de Poisson, les seules différences se situent au niveau des étapes 3, où l'option **Poisson** doit être sélectionnée et 4, où la moyenne doit être entrée à la place du nombre de tirages et de la probabilité de succès.

## ANNEXE 5.2 DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES AVEC EXCEL

Excel a la capacité de calculer des probabilités pour plusieurs distributions, y compris les distributions binomiale, de Poisson et hypergéométrique introduites dans ce chapitre. La fonction Excel pour calculer des probabilités binomiales est BINOM.DIST. Cette fonction a quatre facteurs :  $x$  (le nombre de succès),  $n$  (le nombre de tirages),  $p$  (la probabilité de succès) et *cumulative*. Le 4<sup>e</sup> facteur (*cumulative*) est défini par FALSE si on souhaite obtenir la probabilité de  $x$  succès et par TRUE si on souhaite obtenir la probabilité cumulée d'obtenir au plus  $x$  succès. Ici, nous décrivons comment calculer la probabilité d'obtenir de 0 à 10 succès dans le cadre du problème du magasin de prêt-à-porter Martin étudié à la section 5.4 (cf. figure 5.5).

Référez-vous à la figure 5.6. La feuille de calcul contenant les formules apparaît en arrière-plan, la feuille de résultats au premier plan. Nous entrons le nombre de tirages (10) dans la cellule B1, la probabilité de succès dans la cellule B2 et les valeurs de la variable aléatoire dans les cellules B5:B15. Les étapes suivantes génèrent les probabilités souhaitées.

- Étape 1.** Utiliser la fonction BINOM.DIST pour calculer la probabilité de  $x = 0$  en entrant la formule suivante dans la cellule C5 :
  - = BINOM.DIST(B5,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)
- Étape 2.** Copier la formule dans les cellules C6:C15.
  - La feuille de résultats de la figure 5.6 montre que les probabilités obtenues sont identiques à celles présentées dans la figure 5.5. Des

	A	B	C	D
1	Nombre de tirages ( $n$ )	10		
2	Probabilité de succès ( $p$ )	0,3		
3				
4		$x$	$f(x)$	
5		0	=BINOMDIST(B5,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
6		1	=BINOMDIST(B6,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
7		2	=BINOMDIST(B7,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
8		3	=BINOMDIST(B8,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
9		4	=BINOMDIST(B9,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
10		5	=BINOMDIST(B10,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
11		6	=BINOMDIST(B11,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
12		7	=BINOMDIST(B12,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
13		8	=BINOMDIST(B13,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
14		9	=BINOMDIST(B14,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
15		10	=BINOMDIST(B15,\$B\$1,\$B\$2,FALSE)	
16				

	A	B	C	D
1	Nombre de tirages ( $n$ )	10		
2	Probabilité de succès ( $p$ )	0,3		
3				
4		$x$	$f(x)$	
5		0	0,0282	
6		1	0,1211	
7		2	0,2335	
8		3	0,2668	
9		4	0,2001	
10		5	0,1029	
11		6	0,0368	
12		7	0,0090	
13		8	0,0014	
14		9	0,0001	
15		10	0,0000	
16				

**Figure 5.6** Feuille de calcul Excel pour le calcul des probabilités binomiales

probabilités de Poisson et hypergéométriques peuvent être obtenues de façon similaire. Les fonctions POISSON.DIST et HYPERGEOM.DIST sont utilisées. L'outil Excel Insert Fonction peut aider l'utilisateur à entrer les bons facteurs dans ces fonctions (cf. annexe E).