

Jaouad Madkour

# PROBABILITÉS

## Exercices corrigés

Édition 2023



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Les bases des probabilités</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Théorie des ensembles</b>	<b>4</b>
1.1	Intersection des ensembles . . . . .	4
1.2	Union des ensembles . . . . .	4
1.3	Distributivité . . . . .	5
1.4	Partition d'un ensemble . . . . .	5
1.5	Complémentaire d'une partie . . . . .	6
1.6	Cardinal d'un ensemble fini . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Analyse combinatoire</b>	<b>7</b>
2.1	Arrangement avec répétition . . . . .	7
2.2	Arrangement sans répétition . . . . .	8
2.3	Permutation sans répétition . . . . .	9
2.4	Permutation avec répétition . . . . .	9
2.5	Combinaison sans répétition . . . . .	10
2.6	Combinaison avec répétition . . . . .	11
2.7	Synthèse . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Exercices corrigés</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Analyse combinatoire</b>	<b>14</b>
3.1	Arrangement avec répétition . . . . .	14
3.2	Arrangement sans répétition . . . . .	14
3.3	Permutation avec répétition . . . . .	15
3.4	Permutation sans répétition . . . . .	15
3.5	Combinaison avec répétition . . . . .	15
3.6	Combinaison sans répétition . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Variables aléatoires discrètes</b>	<b>27</b>
4.1	Jeux de cartes . . . . .	27

4.2	Candidatures . . . . .	37
4.3	Destinations touristiques . . . . .	45
4.4	Tirage aléatoire de boules dans un sac ou une urne . . . . .	50
4.5	Exercice de synthèse . . . . .	84
4.6	Divers . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Variables aléatoires continues</b>	<b>102</b>
<b>6</b>	<b>Couples de variables aléatoires discrètes</b>	<b>150</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>210</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>222</b>

Première partie

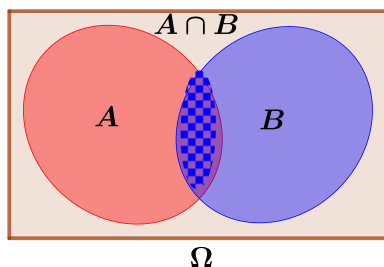
**Les bases des probabilités**

# Chapitre 1

## Théorie des ensembles

### 1.1 Intersection des ensembles

**Définition 1.** L'intersection de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble, noté  $A \cap B$ , qui contient les éléments appartenant en même temps à l'ensemble  $A$  et à l'ensemble  $B$ .



**Propriétés.**

- L'intersection des ensembles est commutative :

$$A \cap B = B \cap A$$

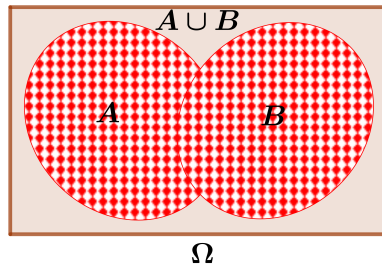
- L'intersection des ensembles est associative :

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- L'intersection des ensembles vérifie  $A \cap \Omega = A$  (avec  $A \subset \Omega$ ) et  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

### 1.2 Union des ensembles

**Définition 2.** L'union de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble, noté  $A \cup B$ , qui contient les éléments appartenant à l'ensemble  $A$  ou à l'ensemble  $B$ .



**Propriétés.**

— L'union des ensembles est commutative :

$$A \cup B = B \cup A$$

— L'union des ensembles est associative :

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

— L'union des ensembles vérifie  $A \cup \Omega = \Omega$  (avec  $A \subset \Omega$ ) et  $A \cup \emptyset = A$ .

### 1.3 Distributivité

**Propriétés.**

— L'intersection des ensembles est distributive par rapport à leur union :

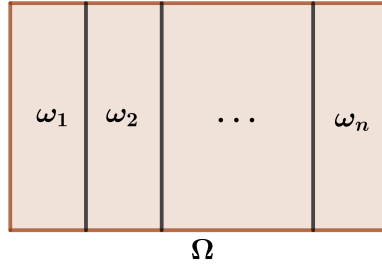
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— L'union des ensembles est distributive par rapport à leur intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

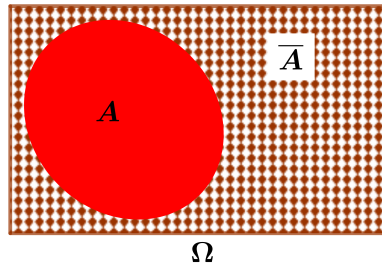
### 1.4 Partition d'un ensemble

**Définition 3.** La partition d'un ensemble  $\Omega$  est un ensemble de parties non vides de  $\Omega$ , notées  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , disjointes deux à deux ( $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ) et dont l'union est égale à  $\Omega$  ( $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_n = \Omega$ ).



## 1.5 Complémentaire d'une partie

**Définition 4.** Le complémentaire d'une partie  $A$  d'un ensemble  $\Omega$  est la partie, notée  $\bar{A}$ , de l'ensemble  $\Omega$  qui n'appartient pas à  $A$ . En particulier,  $\bar{\Omega} = \emptyset$  et  $\bar{\emptyset} = \Omega$ .



*Remarque 1.* La partie  $A$  et son complémentaire  $\bar{A}$  forment une partition de l'ensemble  $\Omega$  puisque  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .

**Théorème 1** (Lois de De Morgan).

Soit  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $\Omega$ . Les lois de De Morgan sont :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

## 1.6 Cardinal d'un ensemble fini

**Définition 5.** Le cardinal d'un ensemble fini  $A$ , notée  $\text{card}(A)$  ou  $\#A$ , est le nombre d'éléments de cet ensemble. En particulier,  $\text{card}(\emptyset) = 0$  et  $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$ .

**Théorème 2.**

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles finis. Le cardinal de l'union est donné par :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

# Chapitre 2

## Analyse combinatoire

### 2.1 Arrangement avec répétition

**Définition 6.** Un arrangement avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est une disposition ordonnée de  $p$  éléments qui ne sont pas nécessairement discernables.

**Théorème 3.** Le nombre d'arrangements avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est :

$$\alpha_n^p = n^p$$

**Justification.** Un arrangement avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  revient à tirer, avec remise,  $p$  éléments dans un ensemble  $\Omega$  de  $n$  éléments pour remplir les  $p$  cases d'une grille :

Case 1	Case 2	Case 3	...	Case $p$
--------	--------	--------	-----	----------

Comme il s'agit d'un tirage avec remise (ou tirage non exhaustif), l'élément tiré est, à chaque fois, remis dans l'ensemble  $\Omega$  et peut être tiré un nombre infini de fois. Ainsi, il y a  $n$  choix possibles pour remplir la première case et il y a encore  $n$  choix possibles pour remplir la deuxième case,  $n$  choix possibles pour remplir la troisième case et ainsi de suite jusqu'à la case  $p$  :

Case 1	Case 2	Case3	...	Case $p$
$n$ possibilités	$n$ possibilités	$n$ possibilités	...	$n$ possibilités

Le nombre d'arrangements avec répétition est donc  $n \times n \times n \times \dots \times n = n^p$ .

**Exemple 1.** Combien peut-on composer de codes de 4 chiffres ordonnés et non nécessairement discernables ?

Le nombre de codes est donné par le nombre d'arrangements avec répétition de 4 éléments

(les chiffres qui entrent dans la composition du code) parmi 10 (on choisit dans l'ensemble  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ) soit :

$$\alpha_{10}^4 = 10^4 = 10000$$

## 2.2 Arrangement sans répétition

**Définition 7.** Un arrangement sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est une disposition ordonnée de  $p$  éléments discernables.

**Théorème 4.** Le nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Justification.** Un arrangement sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  revient à tirer, sans remise,  $p$  éléments dans un ensemble  $\Omega$  de  $n$  éléments pour remplir les  $p$  cases d'une grille :

Case 1	Case 2	Case 3	...	Case $p$
--------	--------	--------	-----	----------

Comme il s'agit d'un tirage sans remise (ou tirage exhaustif), l'élément tiré n'est pas remis dans l'ensemble  $\Omega$  et ne peut être tiré une autre fois. Ainsi, il y a  $n$  choix possibles pour remplir la première case et il reste  $n - 1$  choix possibles pour remplir la deuxième case,  $n - 2$  choix possibles pour remplir la troisième case et ainsi de suite jusqu'à la case  $p$  pour laquelle il reste  $n - p + 1$  choix possibles :

Case 1	Case 2	Case 3	...	Case $p$
$n$ possibilités	$n - 1$ possibilités	$n - 2$ possibilités	...	$n - p + 1$ possibilités

Le nombre d'arrangements sans répétition est donc :

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(n-p)\cdots \times 2 \times 1}{(n-p) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

**Exemple 2.** Combien peut-on composer de codes de 4 chiffres ordonnés et discernables ? Le nombre de codes est donné par le nombre d'arrangements sans répétition de 4 éléments (les chiffres qui entrent dans la composition du code) parmi 10 (on choisit dans l'ensemble  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ) soit :

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

## 2.3 Permutation sans répétition

**Définition 8.** Une permutation sans répétition de  $n$  éléments est une disposition ordonnée de  $n$  éléments discernables.

**Théorème 5.** Le nombre de permutations sans répétition de  $n$  éléments est :

$$P_n = n!$$

**Justification.** Une permutation sans répétition de  $n$  éléments revient à tirer, sans remise,  $n$  éléments dans un ensemble  $\Omega$  de  $n$  éléments pour remplir les  $n$  cases d'une grille :

Case 1	Case 2	...	Case $n - 1$	Case $n$
--------	--------	-----	--------------	----------

Comme il s'agit d'un tirage sans remise (ou tirage exhaustif), l'élément tiré n'est pas remis dans l'ensemble  $\Omega$  et ne peut être tiré une autre fois. Ainsi, il y a  $n$  choix possibles pour remplir la première case et il reste  $n - 1$  choix possibles pour remplir la deuxième case,  $n - 2$  choix possibles pour remplir la troisième case et ainsi de suite jusqu'à la case  $n$  pour laquelle il reste un seul choix possible :

Case 1	Case 2	...	Case $n - 1$	Case $n$
$n$ possibilités	$n - 1$ possibilités	...	2 possibilités	1 possibilité

Le nombre de permutations sans répétition est donc  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$ .

*Remarque 2.* Une permutation sans répétition est un arrangement sans répétition particulier dans lequel le nombre d'éléments choisis  $p$  est égal au nombre d'éléments disponibles  $n$  :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

**Exemple 3.** Combien peut-on composer de codes à partir des chiffres  $\{1, 2, 3\}$  ?

Le nombre de codes est donné par le nombre de permutations sans répétition de 3 éléments, soit  $P_3 = 3! = 6$ . Il s'agit des codes : 123, 132, 213, 231, 312 et 321.

## 2.4 Permutation avec répétition

**Définition 9.** Une permutation avec répétition de  $n$  éléments regroupés en groupes de  $n_1, n_2, \dots, n_k$  éléments non discernables (avec  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ) est une disposition ordonnée de  $n$  éléments discernables et non discernables.

**Théorème 6.** Le nombre de permutations avec répétition de  $n$  éléments est :

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

**Justification.** Supposons que parmi les  $n$  éléments à permuter,  $n_1$  éléments sont non discernables. Permuter ces  $n_1$  éléments entre eux ne va pas affecter les permutations des  $n$  éléments mais va réduire leur nombre. Ainsi, au lieu d'obtenir  $n!$  permutations de  $n$  éléments discernables, on obtiendra  $\frac{n!}{n_1!}$  permutations de  $n$  éléments dont  $n_1$  sont non discernables. Le nombre de permutations sans répétitions  $n!$  a donc été divisé par le nombre de permutations des éléments non discernables  $n_1!$ .

Plus généralement, si les  $n$  éléments à permuter sont répartis en groupes de, respectivement,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  éléments non discernables (avec  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ), alors le nombre de permutations avec répétitions est :  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ .

**Exemple 4.** Combien peut-on composer de codes à partir des chiffres  $\{1, 2, 2\}$  ?

Le nombre de codes est donné par le nombre de permutations avec répétition de 3 éléments dont 2 non discernables, soit :

$$P_{1,2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

Il s'agit de la liste de l'exemple précédent  $\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$  en remplaçant le chiffre 3 par le chiffre 2. On obtient :  $\{122, \cancel{122}, 212, 221, \cancel{212}, \cancel{221}\}$ .

## 2.5 Combinaison sans répétition

**Définition 10.** Une combinaison sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est une disposition qui n'est pas nécessairement ordonnée de  $p$  éléments discernables.

**Théorème 7.** Le nombre de combinaisons sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Justification.** Une combinaison sans répétition est une disposition dans laquelle l'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, deux dispositions seront considérées identiques quelque soit l'ordre dans lequel elles se présentent pourvu qu'elles contiennent les même éléments.

Une combinaison sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est une sorte d'arrangement sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  dans lequel les  $p$  éléments peuvent être permutés. Par conséquent, le nombre de combinaisons sans répétition est réduit, il est égal au nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  divisé par le nombre de permutations des  $p$  éléments :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Exemple 5.** Combien peut-on former d'équipes de 11 joueurs à partir de 22 individus ? Le nombre d'équipes est donné par le nombre de combinaisons sans répétition de 11

éléments parmi 22, soit :

$$C_{22}^{11} = \frac{22!}{11!(22-11)!} = \frac{22!}{11!11!} = 705432$$

## 2.6 Combinaison avec répétition

**Définition 11.** Une combinaison avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est une disposition qui n'est pas nécessairement ordonnée d'éléments qui ne sont pas nécessairement discernables.

**Théorème 8.** Le nombre de combinaisons sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  est :

$$K_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

**Justification.** Dans une combinaison sans répétition de  $p$  éléments parmi les  $n$  éléments d'un ensemble  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , chaque élément ne peut être choisi qu'une seule fois. Si un élément  $\omega_i$  est choisi une deuxième fois, cela veut dire qu'il a été choisi à la place d'un autre élément  $\omega_j$ , ( $i \neq j$ ). Pour ne pas éliminer l'élément  $\omega_j$  des choix possibles, il faut accroître la taille de l'ensemble  $\Omega$  de 1. De ce fait, combiner avec répétition  $p$  éléments parmi  $n$  est équivalent à combiner sans répétition  $p$  éléments parmi  $n+1$ . De la même manière, si l'élément  $\omega_i$  est choisi une troisième fois, cela veut dire qu'il a été choisi à la place d'un autre élément  $\omega_k$ , ( $i \neq k$ ). Pour ne pas éliminer l'élément  $\omega_k$  des choix possibles, il faut encore accroître la taille de l'ensemble  $\Omega$  de 1. De ce fait, combiner avec répétition  $p$  éléments parmi  $n$  est équivalent à combiner sans répétition  $p$  éléments parmi  $n+2$ . Plus généralement, si un élément  $\omega_i$  est choisi  $p$  fois, cela veut dire qu'il a été choisi à la place d'autres éléments et qu'il faut accroître la taille de l'ensemble  $\Omega$  de  $p-1$ . De ce fait, combiner avec répétition  $p$  éléments parmi  $n$  est équivalent à combiner sans répétition  $p$  éléments parmi  $n+p-1$  :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

**Exemple 6.** Dans une urne contenant 8 boules identiques numérotées de 1 à 8, on tire successivement, avec remise, 5 boules et l'on note leurs numéros sans tenir compte de l'ordre dans lequel elles sont tirées. Quel est le nombre de combinaisons possibles ?

Le nombre de combinaisons est donné par le nombre de combinaisons avec répétition de 5 éléments parmi 8, c'est à dire :

$$K_8^5 = C_{8+5-1}^5 = \frac{(8+5-1)!}{5!(8-1)!} = 792$$

## 2.7 Synthèse

Disposition	Avec ordre	Sans ordre
Sans répétition	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$
Avec répétition	$\alpha_n^p = n^p$	$K_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p$

Deuxième partie

**Exercices corrigés**

# Chapitre 3

## Analyse combinatoire

### 3.1 Arrangement avec répétition

### 3.2 Arrangement sans répétition

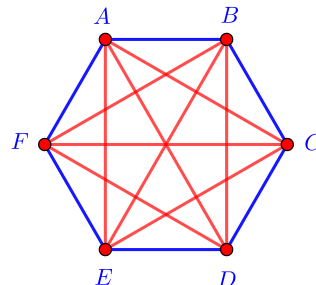
**Exercice 1 :**

1. Combien y a-t-il de nombres entiers entre 100 et 1000 formés de chiffres tous différents ?
2. Quel est le nombre de diagonales dans un hexagone ?

**Solution :**

1. Nombre de nombres entiers compris entre 100 et 1000 formés de chiffres tous différents : Notons tout d'abord que le nombre 1000 est exclu des nombres recherchés puisqu'il contient plusieurs fois le même chiffre 0. Il reste donc à énumérer les nombres entiers de 3 chiffres différents et compris entre 100 et 999 en veillant à ne pas commencer par un 0 pour ne pas se retrouver avec des nombres à 2 chiffres seulement. Par conséquent, il faut choisir le premier chiffre dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ , soit 9 possibilités, et les deux derniers dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$  exception faite du premier chiffre qui aura déjà été choisi. Formellement, un nombre étant une disposition ordonnée (et sans répétition dans le présent cas), il s'agit de trouver le nombre d'arrangements sans répétition. Ainsi, on dispose de  $A_9^1 = 9$  choix pour le premier chiffre et de  $A_9^2 = 72$  choix pour les deux derniers, soit un nombre total de nombres entiers égal à  $A_9^1 A_9^2 = 9 \times 72 = 648$ .
2. Nombre de diagonales dans un hexagone :

Un hexagone  $ABCDEF$  est un polygone à six sommets et six côtés, et une diagonale est un segment reliant deux points non consécutifs d'un polygone. Le segment  $[AC]$  par exemple est une diagonale de l'hexagone  $ABCDEF$  tandis que le segment  $[AB]$  n'en est pas une. Ainsi, pour obtenir une diagonale, il suffit de sélectionner deux sommets différents et de les relier par un segment dans un sens ou dans un autre ( $[AC]$  ou  $[CA]$  par exemple). Une diagonale est donc une disposition sans répétition et sans ordre de deux points non consécutifs choisis parmi les 6 sommets de l'hexagone  $\{A, B, C, D, E, F\}$ . Formellement, le nombre de diagonales est donné par le nombre de combinaisons sans répétition de 2 éléments parmi 6 à l'exception des 6 côtés, soit :



$$C_6^2 - 6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} - 6 = 9$$

Il s'agit des segments  $[AC], [AD], [AE], [BD], [BE], [BF], [CE], [CF]$  et  $[DF]$ .

### 3.3 Permutation avec répétition

### 3.4 Permutation sans répétition

### 3.5 Combinaison avec répétition

### 3.6 Combinaison sans répétition

**Exercice 2 :**

Montrer que  $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} + C_p^p$ .

**Solution :**

**Rappel :** Triangle de Pascal

$C_n^p$	$p$					
	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
$n$	2	1	2	1		
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$C_n^p$	$p$					
	0	1	2	3	4	...
0	$C_0^0$					
1	$C_1^0$	$C_1^1$				
$n$	2	$C_2^0$	$C_2^1$	$C_2^2$		
3	$C_3^0$	$C_3^1$	$C_3^2$	$C_3^3$		
4	$C_4^0$	$C_4^1$	$C_4^2$	$C_4^3$	$C_4^4$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Le triangle de Pascal permet de calculer les combinaisons  $C_n^p$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$  et  $p = 0, 1, 2, \dots$  avec  $p \leq n$  selon la règle suivante : une combinaison  $C_n^p$  est la somme de la combinaison  $C_{n-1}^p$  qui se trouve sur la même colonne du triangle de Pascal que la combinaison  $C_n^p$  mais décalée d'une ligne et de la combinaison  $C_{n-1}^{p-1}$  qui se trouve sur une ligne et une colonne décalées du triangle de Pascal, c'est à dire :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \tag{3.1}$$

En généralisant cette formule à  $n, n-1, n-2, \dots, p+1$ , on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} C_n^p &= C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \\ C_{n-1}^p &= C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1} \\ C_{n-2}^p &= C_{n-3}^p + C_{n-3}^{p-1} \\ &\vdots \\ C_{p+1}^p &= C_p^p + C_p^{p-1} \end{aligned}$$

En additionnant les membres gauches d'une part et les membres droits d'autres part, on obtient :

$$C_n^p + C_{n-1}^p + C_{n-2}^p + \dots + C_{p+1}^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^p + C_{n-3}^{p-1} + \dots + C_p^p + C_p^{p-1}$$

En simplifiant, on obtient le résultat recherché :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_p^p$$

**Exercice 3 :**

On obtient une grille en noircissant certaines cases du tableau suivant :

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

1. Combien de grilles peut-on obtenir sachant qu'on peut noircir entre 0 et 16 cases ?
2. Combien peut-on obtenir de grilles ayant exactement 3 cases noires ?

**Solution :**

Une grille est obtenue en noircissant une ou certaines cases. Choisir la même case plusieurs fois ne changera pas la grille, la répétition n'est donc pas permise. Inverser l'ordre des cases donnera également la même grille, l'ordre n'a donc pas d'importance. Ainsi, une grille est une disposition sans ordre et sans répétitions des cases. Il s'agit donc d'une combinaison sans répétition de  $p$  cases parmi 16.

1. Nombre de grilles obtenues sachant qu'on peut noircir entre 0 et 16 cases : On peut concevoir des grilles n'ayant aucune case noircie ou des grilles ayant une seule case noircies ou ... ou des grilles ayant 16 cases noircies. Ainsi, on a :

- $C_{16}^0 = 1$  grille n'ayant aucune case noircie,
- $C_{16}^1 = 16$  grilles ayant 1 seule case noircie,
- $C_{16}^2 = 120$  grilles ayant 2 cases noircies,
- $C_{16}^3 = 560$  grilles ayant 3 cases noircies,
- $C_{16}^4 = 1820$  grilles ayant 4 cases noircies,
- $C_{16}^5 = 4368$  grilles ayant 5 cases noircies,
- $C_{16}^6 = 8008$  grilles ayant 6 cases noircies,
- $C_{16}^7 = 11440$  grilles ayant 7 cases noircies,
- $C_{16}^8 = 12870$  grilles ayant 8 cases noircies,
- $C_{16}^9 = 11440$  grilles ayant 9 cases noircies,
- $C_{16}^{10} = 8008$  grilles ayant 10 cases noircies,
- $C_{16}^{11} = 4368$  grilles ayant 11 cases noircies,
- $C_{16}^{12} = 1820$  grilles ayant 12 cases noircies,
- $C_{16}^{13} = 560$  grilles ayant 13 cases noircies,
- $C_{16}^{14} = 120$  grilles ayant 14 cases noircies,
- $C_{16}^{15} = 16$  grilles ayant 15 cases noircies,
- $C_{16}^{16} = 1$  grille ayant 16 cases noircies.

Il en résulte que le nombre total de grilles que l'on peut obtenir en noircissant entre

0 et 16 cases est :

$$\sum_{p=0}^{16} C_{16}^p = 65536$$

2. Le nombre de grilles ayant exactement 3 cases noires est donné par le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 16 :

$$C_{16}^3 = 560$$

#### Exercice 4 :

Une entreprise veut installer un circuit de lignes téléphoniques dans une ville.

1. Quel est le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre et de n'envisager que les combinaisons de 8 chiffres au plus ?
2. Même question, si en plus, elle ne doit établir que des numéros de 10 chiffres ;
3. Si on l'autorise à répéter les chiffres, mais à composer uniquement des numéros de 7 chiffres sans utiliser le 0 ;
4. Si on lui impose des numéros de 10 chiffres avec 4 fois le chiffre 1, 3 fois le chiffre 5 et 3 fois le chiffre 7 (1,1,1,1,5,5,5,7,7,7).

#### Solution :

Une ligne téléphonique est une disposition ordonnée, avec ou sans répétition, de chiffres choisis dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Le nombre de lignes téléphoniques est donc donné par le nombre d'arrangements, avec ou sans répétition, de  $p$  éléments parmi  $n$  (i.e,  $n^p$  ou  $A_n^p$ ).

1. Le nombre maximum de lignes que l'entreprise peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre et de n'envisager que les combinaisons d'au plus 8 chiffres :

Dans cette question, la répétition n'est pas autorisée. Le nombre de lignes téléphoniques est ainsi donné par le nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n = 10$ , c'est à dire  $A_{10}^p$ . Comme on ne peut envisager que des lignes d'au plus 8 chiffres, alors  $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Si l'on note  $L_p$  une ligne téléphonique composée de  $p$  chiffres, alors on a :

- $\text{card}(L_1) = A_{10}^1 = 10$
- $\text{card}(L_2) = A_{10}^2 = 90$
- $\text{card}(L_3) = A_{10}^3 = 720$
- $\text{card}(L_4) = A_{10}^4 = 5040$
- $\text{card}(L_5) = A_{10}^5 = 30240$
- $\text{card}(L_6) = A_{10}^6 = 151200$
- $\text{card}(L_7) = A_{10}^7 = 604800$
- $\text{card}(L_8) = A_{10}^8 = 1814400$

Ainsi, le nombre maximum de lignes que l'entreprise peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre et de n'envisager que les combinaisons d'au plus 8 chiffres est égal à :

$$\sum_{p=1}^8 A_{10}^p = 10 + 90 + 720 + 5040 + 30240 + 151200 + 604800 + 1814400 = 2606500 \quad (3.2)$$

2. Le nombre maximum de lignes que l'entreprise peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre et de n'envisager que des numéros de 10 chiffres :

Cette question est un cas particulier de la question précédente dans le cas  $p = 10$ .

On obtient alors :

$$A_{10}^{10} = \frac{10!}{(10-10)!} = 3628800 \quad (3.3)$$

Il s'agit aussi du nombre de permutations des 10 chiffres  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , c'est à dire  $10! = 3628800$ .

3. Le nombre maximum de lignes que l'entreprise peut installer si on l'autorise à répéter les chiffres, mais à composer uniquement des numéros de 7 chiffres sans utiliser le 0 :

Dans cette question, la répétition est permise. Le nombre de lignes de 7 chiffres est alors donné par le nombre d'arrangements avec répétition de 7 éléments parmi 9 (comme le 0 est exclu, il reste à choisir les chiffres parmi  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ), soit :

$$9^7 = 4782969 \quad (3.4)$$

4. Le nombre maximum de lignes que l'entreprise peut installer si on lui impose des numéros de 10 chiffres avec 4 fois le chiffre 1, 3 fois le chiffre 5 et 3 fois le chiffre 7  $(1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 7, 7, 7)$  :

Il s'agit de permuter 10 chiffres parmi lesquels il y a 3 groupes d'éléments non discernables (4 fois le 1, 3 fois le 5 et 3 fois le 7), soit :

$$P_{4,3,3}^{10} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 3!} = 4200 \quad (3.5)$$

### Exercice 5 :

1. Combien peut-on former de nombres de 10 chiffres ne commençant pas par 0 ?
2. Combien peut-on former de nombres situés entre 10 et 10000 formés de chiffres tous différents ?
3. Combien peut-on former de nombres à partir de la disposition suivante ?

$$(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8, 8)$$

**Solution :**

Un nombre est une disposition ordonnée, avec ou sans répétition, de  $p$  chiffres choisis dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  comportant 10 éléments. Le nombre de dispositions est donné par le nombre d'arrangements, avec ou sans répétition, de  $p$  éléments parmi  $n$ , c'est à dire  $n^p$  ou  $A_n^p$ .

1. Nombre de nombres de 10 chiffres ne commençant pas par 0 :

— Si la répétition des chiffres est permise, le premier chiffre est à choisir dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , soit  $9^1 = 9$  possibilités **ET** les neufs qui restent sont à choisir dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , soit  $10^9 = 10000000000$  possibilités. Ainsi, le nombre de nombres de 10 chiffres avec répétition ne commençant pas par 0 est donné par :

$$9^1 \times 10^9 = 9 \times 10000000000 = 90000000000 \quad (3.6)$$

— Si la répétition des chiffres n'est pas permise, le premier chiffre est à choisir dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , soit  $A_9^1 = 9$  possibilités **ET** les neufs qui restent sont à choisir dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  à l'exception du chiffre qui a été choisi pour occuper la première place, soit  $A_9^9 = 362880$  possibilités. Ainsi, le nombre de nombres de 10 chiffres sans répétition ne commençant pas par 0 est donné par :

$$A_9^1 \times A_9^9 = 9 \times 362880 = 3265920900000000000 \quad (3.7)$$

2. Nombre de nombres situés entre 10 et 10000 formés de chiffres tous différents :

Dans cette question, la répétition des chiffres dans un nombre n'est pas autorisée. Par conséquent, le nombre de dispositions est donné par le nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (3.8)$$

Les nombres entiers situés entre 10 et 10000 appartiennent à l'une ou l'autre des catégories suivantes, mais pas à deux catégories en même temps :

- Catégorie  $N_2$  contenant les nombres de 2 chiffres :  $\{10, 11, \dots, 99\}$
- Catégorie  $N_3$  contenant les nombres de 3 chiffres :  $\{100, 101, \dots, 999\}$
- Catégorie  $N_4$  contenant les nombres de 4 chiffres :  $\{1000, 1001, \dots, 9999\}$
- Catégorie  $N_5$  contenant un nombre de 5 chiffres :  $\{10000\}$

Attention ! le premier chiffre doit être différent de 0, sinon on risque de se retrouver dans la catégorie précédente. Les autres chiffres doivent être différents entre eux et différents du premier chiffre. Il faut donc choisir le premier chiffre dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , pour cela il y a  $A_9^1 = 9$  possibilités et les  $p$  autres chiffres dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  à l'exception du chiffre choisi pour occuper

la première place et pour cela il y a  $A_{10-1}^p$  possibilités. Notons que la dernière catégorie  $N_5$  ne contenant que le nombre 10000 est directement exclue puisque dans ce nombre, le chiffre 0 est répété 4 fois. Ainsi, on obtient :

- $\text{card}(N_2) = A_9^1 A_9^1 = 9 \times 9 = 81$
- $\text{card}(N_3) = A_9^1 A_9^2 = 9 \times 72 = 648$
- $\text{card}(N_4) = A_9^1 A_9^3 = 9 \times 504 = 4536$

Finalement, le nombre des entiers situés entre 10 et 10000 formés de chiffres tous différents est donné par la somme :

$$\text{card}(N_2) + \text{card}(N_3) + \text{card}(N_4) = 81 + 648 + 4536 = 5265 \quad (3.9)$$

3. Nombre de nombres que l'on peut former à partir de la disposition suivante :

$$(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8, 8)$$

Il s'agit simplement de permuter les 17 éléments de la disposition précédente dont 8, 3, 4 et 2 éléments respectivement sont non discernables. Le nombre de dispositions possibles est alors donné par :

$$P_{8,3,4,2}^{17} = \frac{17!}{8! \times 3! \times 4! \times 2!} = 30630600 \quad (3.10)$$

### Exercice 6 :

Combien y a-t-il de nombres entiers entre 10 et 1000000 formés de chiffres tous différents ?

### Solution :

Un nombre est une disposition ordonnée de chiffres tirés dans  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Dans cet exercice, les chiffres qui composent les nombres entiers doivent être différents, la répétition n'est donc pas autorisée. Par conséquent, le nombre des dispositions ordonnées et sans répétition est donné par le nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (3.11)$$

Les nombres entiers entre 10 et 1000000 appartiennent à l'une ou l'autre des catégories suivantes, mais pas à deux catégories en même temps :

- Catégorie  $C_1$  : Nombres de 2 chiffres :  $\{10, 11, \dots, 99\}$
- Catégorie  $C_2$  : Nombres de 3 chiffres :  $\{100, 101, \dots, 999\}$
- Catégorie  $C_3$  : Nombres de 4 chiffres :  $\{1000, 1001, \dots, 9999\}$
- Catégorie  $C_4$  : Nombres de 5 chiffres :  $\{10000, 10001, \dots, 99999\}$
- Catégorie  $C_5$  : Nombres de 6 chiffres :  $\{100000, 100001, \dots, 999999\}$
- Catégorie  $C_6$  : Nombre de 7 chiffres : 1000000

Attention! le premier chiffre doit être différent de zéro, sinon on risque de se retrouver dans la catégorie précédente. Les autres chiffres doivent être différents entre eux et différents du premier chiffre. Il faut donc choisir le premier chiffre dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , pour cela il y a  $A_9^1 = 9$  possibilités et les  $p$  autres chiffres dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  à l'exception du chiffre choisi pour occuper la première place et pour cela il y a  $A_{10-1}^p$  possibilités. Notons que la dernière catégorie  $C_6$  ne contenant que le nombre 1000000 est directement exclue puisque dans ce nombre, le chiffre 0 est répété plusieurs fois. Ainsi, on obtient :

- $\text{card}(C_1) = A_9^1 A_9^1 = 9 \times 9 = 81$
- $\text{card}(C_2) = A_9^1 A_9^2 = 9 \times 72 = 648$
- $\text{card}(C_3) = A_9^1 A_9^3 = 9 \times 504 = 4536$
- $\text{card}(C_4) = A_9^1 A_9^4 = 9 \times 3024 = 27216$
- $\text{card}(C_5) = A_9^1 A_9^5 = 9 \times 15120 = 136080$

Finalement, le nombre des entiers compris entre 10 et 1000000 formés de chiffres tous différents est donné par la somme :

$$\text{card}(C_1) + \text{card}(C_2) + \text{card}(C_3) + \text{card}(C_4) + \text{card}(C_5) = 168561 \quad (3.12)$$

**Exercice 7 :**

1. De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents a raison d'un dossier par casier ?
2. De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents quelque soit le nombre de dossiers par casier ?

**Solution :**

1. Le nombre de façons de placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents à raison d'un dossier par casier est donné par le nombre d'arrangements sans répétition de 4 éléments parmi 15, c'est à dire  $A_{15}^4 = 32760$ .
2. Le nombre de façons de placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents quelque soit le nombre de dossiers par casier est donné par le nombre d'arrangements avec répétition de 4 éléments parmi 15, soit  $15^4 = 50625$ .

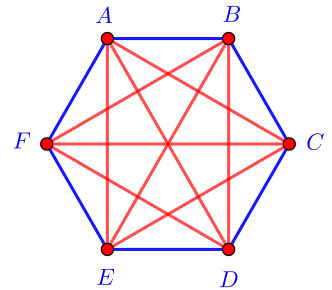
**Exercice 8 :**

1. Combien y a-t-il de nombres entiers entre 100 et 1000 formés de chiffres tous différents ?
2. Quel est le nombre de diagonales dans un hexagone ?

**Solution :**

1. Nombre de nombres entiers compris entre 100 et 1000 formés de chiffres tous différents : Notons tout d'abord que le nombre 1000 est exclu des nombres recherchés puisqu'il contient plusieurs fois le même chiffre 0. Il reste donc à énumérer les nombres entiers de 3 chiffres différents et compris entre 100 et 999 en veillant à ne pas commencer par un 0 pour ne pas se retrouver avec des nombres à 2 chiffres seulement. Par conséquent, il faut choisir le premier chiffre dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ , soit 9 possibilités, et les deux derniers dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$  exception faite du premier chiffre qui aura déjà été choisi. Formellement, un nombre étant une disposition ordonnée (et sans répétition dans le présent cas), il s'agit de trouver le nombre d'arrangements sans répétition. Ainsi, on dispose de  $A_9^1 = 9$  choix pour le premier chiffre et de  $A_9^2 = 72$  choix pour les deux derniers, soit un nombre total de nombres entiers égal à  $A_9^1 A_9^2 = 9 \times 72 = 648$ .

2. Nombre de diagonales dans un hexagone :  
Un hexagone  $ABCDEF$  est un polygone à six sommets et six côtés, et une diagonale est un segment reliant deux points non consécutifs d'un polygone. Le segment  $[AC]$  par exemple est une diagonale de l'hexagone  $ABCDEF$  tandis que le segment  $[AB]$  n'en est pas une. Ainsi, pour obtenir une diagonale, il suffit de sélectionner deux sommets différents et de les relier par un segment dans un sens ou dans un autre ( $[AC]$  ou  $[CA]$  par exemple). Une diagonale est donc une disposition sans répétition et sans ordre de deux points non consécutifs choisis parmi les 6 sommets de l'hexagone  $\{A, B, C, D, E, F\}$ . Formellement, le nombre de diagonales est donné par le nombre de combinaisons sans répétition de 2 éléments parmi 6 à l'exception des 6 côtés, soit :



$$C_6^2 - 6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} - 6 = 9$$

Il s'agit des segments  $[AC], [AD], [AE], [BD], [BE], [BF], [CE], [CF]$  et  $[DF]$ .

### Exercice 9 :

Raymond Queneau, dans l'un de ses ouvrages, propose quatorze ensembles :  $E_1, E_2, \dots, E_{14}$  contenant 10 vers chacun. Pour composer un poème, il suffit de choisir un vers de chaque ensemble. Le vers choisi dans l'ensemble  $E_1$  est le premier vers du poème, le vers choisi dans l'ensemble  $E_2$  est le deuxième vers du poème et ainsi de suite.

1. L'auteur intitule son ouvrage : cent mille milliard de poèmes. Le titre est-il exact ?
2. Deux vers de l'ensemble  $E_{14}$  se terminent par « destin ». Combien y a-t-il de poèmes se terminant par « destin » ?

3. On considère un poème donné  $P_i$ . Combien y a-t-il de poèmes ne contenant aucun vers de  $P_i$  ?

**Solution :**

1. Afin de composer un poème, on a les possibilités suivantes :
  - 10 choix dans le groupe  $E_1$  pour le premier vers du poème ;
  - et 10 choix dans le groupe  $E_2$  pour le deuxième vers du poème ;
  - et 10 choix dans le groupe  $E_3$  pour le troisième vers du poème ;
  - et 10 choix dans le groupe  $E_4$  pour le quatrième vers du poème ;
  - et ...
  - et 10 choix dans le groupe  $E_{13}$  pour le treizième vers du poème ;
  - et 10 choix dans le groupe  $E_{14}$  pour le quatorzième vers du poème.
 soit au total  $\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{14 \text{ facteurs}} = 10^{14} = 100.000.000.000.000$ , c'est à dire cent mille milliard de poèmes possibles. Le titre de l'ouvrage est donc exact.
  
2. Afin de composer un poème se terminant par « destin », on a les possibilités suivantes :
  - 10 choix dans le groupe  $E_1$  pour le premier vers du poème ;
  - et 10 choix dans le groupe  $E_2$  pour le deuxième vers du poème ;
  - et 10 choix dans le groupe  $E_3$  pour le troisième vers du poème ;
  - et 10 choix dans le groupe  $E_4$  pour le quatrième vers du poème ;
  - et ...
  - et 10 choix dans le groupe  $E_{13}$  pour le treizième vers du poème ;
  - et 2 choix dans le groupe  $E_{14}$  pour le quatorzième vers du poème.
 soit au total  $\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{13 \text{ facteurs}} \times 2 = 2 \times 10^{13} = 20.000.000.000.000$ , c'est à dire vingt mille milliard de poèmes se terminant par « destin ».
  
3. Afin de composer un poème excluant les vers du poème  $P_i$ , on a les possibilités suivantes :
  - 9 choix dans le groupe  $E_1$  pour le premier vers du poème, c'est à dire tous les vers du groupe  $E_1$  à l'exception du vers qui a servi de premier vers de  $P_i$  ;
  - et 9 choix dans le groupe  $E_2$  pour le deuxième vers du poème, c'est à dire tous les vers du groupe  $E_2$  à l'exception du vers qui a servi de deuxième vers de  $P_i$  ;
  - et 9 choix dans le groupe  $E_3$  pour le troisième vers du poème, c'est à dire tous les vers du groupe  $E_3$  à l'exception du vers qui a servi de troisième vers de  $P_i$  ;
  - et 9 choix dans le groupe  $E_4$  pour le quatrième vers du poème, c'est à dire tous les vers du groupe  $E_4$  à l'exception du vers qui a servi de quatrième vers de  $P_i$  ;
  - et ...
  - et 9 choix dans le groupe  $E_{13}$  pour le treizième vers du poème, c'est à dire tous les vers du groupe  $E_{13}$  à l'exception du vers qui a servi de treizième vers de  $P_i$  ;

— et 9 choix dans le groupe  $E_{14}$  pour le quatorzième vers du poème, c'est à dire tous les vers du groupe  $E_{14}$  à l'exception du vers qui a servi de quatorzième vers de  $P_i$ .

soit au total  $\underbrace{9 \times 9 \times \dots \times 9}_{14 \text{ facteurs}} = 9^{14} = 22.876.790.000.000$  poèmes.

**Exercice 10 :**

Huit convives sont invitées à s'asseoir autour d'une table où huit sièges sont prévus. Combien y a-t-il de dispositions possibles pour que les huit personnes occupent chacune un siège ?

**Solution :**

Les huit convives peuvent occuper les huit sièges de différentes manières, il suffit de permuter de places. Le nombre de dispositions possibles pour que les huit personnes occupent chacune un siège est donné par le nombre de permutations sans répétition (puisqu'un siège ne peut être occupé par deux personnes en même temps) de 8 éléments, c'est à dire :  $P_8 = 8! = 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1 = 40320$  dispositions possibles.

**Exercice 11 :**

Une entreprise veut installer un circuit de lignes téléphoniques dans une ville.

1. Quel est le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre dans un seul numéro et de n'envisager que des combinaisons d'au plus 10 chiffres ?
2. Quel est le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre dans un seul numéro et de n'envisager que des combinaisons de 8 chiffres ?
3. Quel est le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on l'autorise à répéter les chiffres, mais à composer uniquement des numéros de 6 chiffres sans utiliser le 0 ?
4. Quel est le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on lui impose des numéros de neuf chiffres avec deux fois le chiffre 1, trois fois le chiffre 5 et quatre fois le chiffre 7 ?

**Solution :**

Une ligne téléphonique est une disposition ordonnée, avec ou sans répétition, de chiffres. Le nombre de lignes est en conséquence donné par le nombre d'arrangements possibles de ces chiffres.

1. Le nombre maximum de lignes que l'entreprise peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre dans un seul numéro et de n'envisager que des combinaisons d'au plus 10 chiffres est donné par le nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  (avec  $p \leq 10$ ) chiffres choisis parmi les 10 éléments de la liste  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , soit  $A_{10}^p$  :

- Pour  $p = 1$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^1 = \frac{10!}{9!} = 10$  ;
- Pour  $p = 2$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 90$  ;
- Pour  $p = 3$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$  ;
- Pour  $p = 4$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040$  ;
- Pour  $p = 5$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$  ;
- Pour  $p = 6$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 151200$  ;
- Pour  $p = 7$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^7 = \frac{10!}{3!} = 604800$  ;
- Pour  $p = 8$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^8 = \frac{10!}{2!} = 1814400$  ;
- Pour  $p = 9$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^9 = \frac{10!}{1!} = 3628800$  ;
- Pour  $p = 10$ , le nombre de lignes est  $A_{10}^{10} = \frac{10!}{0!} = 3628800$ .

soit un nombre total de lignes  $\sum_{p=1}^{10} A_{10}^p = A_{10}^1 + A_{10}^2 + \dots + A_{10}^{10} = 9864100$ .

2. Le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on lui impose de ne répéter aucun chiffre dans un seul numéro et de n'envisager que des combinaisons de 8 chiffres est donné par le nombre d'arrangements sans répétition de 8 chiffres parmi les 10 chiffres de la liste  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , c'est à dire  $A_{10}^8 = \frac{10!}{2!} = 1814400$ .
3. Le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on l'autorise à répéter les chiffres, mais à composer uniquement des numéros de 6 chiffres sans utiliser le 0 est donné par le nombre d'arrangements avec répétition de 6 éléments choisis parmi les 9 chiffres de la liste  $\{1, 2, \dots, 9\}$ , soit  $\alpha_9^6 = 9^6 = 531441$ .
4. Le nombre maximum de lignes qu'elle peut installer si on lui impose des numéros de neuf chiffres avec deux fois le chiffre 1, trois fois le chiffre 5 et quatre fois le chiffre 7 est donné par le nombre de permutations avec répétition de 9 éléments dont 2, 3 et 4 sont non discernables, c'est à dire :  $P_{2,3,4} = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260$ .

# Chapitre 4

## Variables aléatoires discrètes

### 4.1 Jeux de cartes

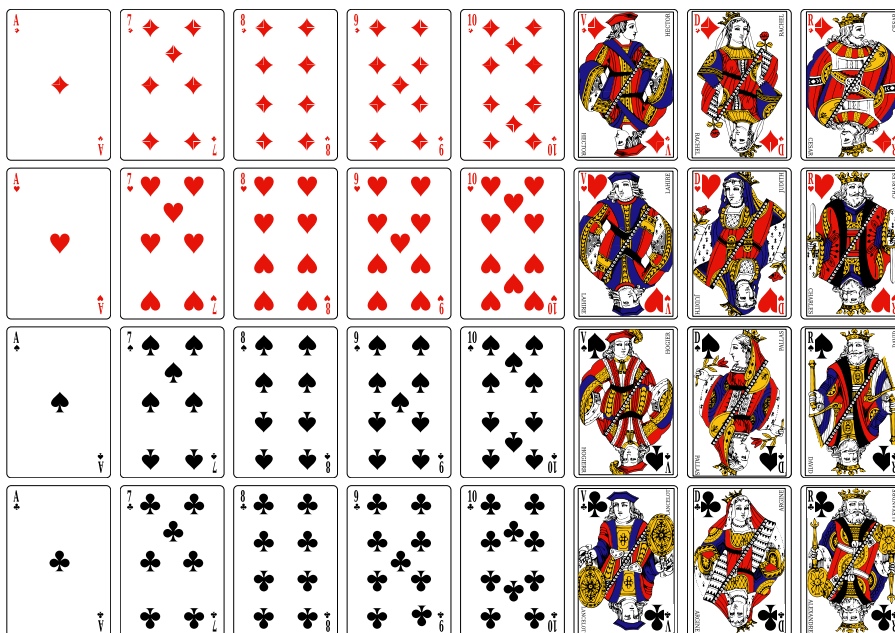
**Exercice 12 :**

Soit un jeu de 32 cartes. On tire 8 cartes au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi ces 8 cartes figurent :

1. 2 dames et 3 piques dont la dame de pique ?
2. Une dame et 3 carreaux sans la dame de carreau ?
3. 2 dames et 3 carreaux ?

**Solution :**

Un jeu de 32 cartes est organisé en 8 valeurs (l'as, 7, 8, 9, 10, le valet, la dame et le roi) réparties sur 4 enseignes (le carreau, le cur, le pique et le trèfle) :



Toutes les cartes ont les mêmes probabilités d'être tirées. Cette situation d'équiprobabilité permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.1)$$

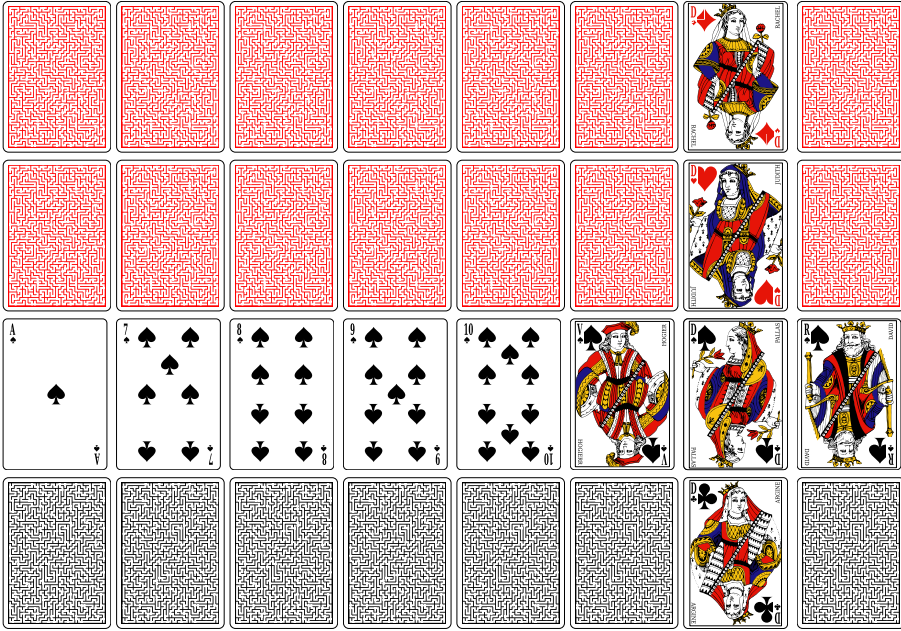
Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer (simultanément) 8 cartes au hasard parmi les 32. La répétition n'est donc pas autorisée et l'ordre n'a pas d'importance dans cette expérience. Il s'agit donc d'une combinaison de  $p = 8$  éléments parmi  $n = 32$  :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (4.2)$$

Le nombre de cas possibles est en conséquence donné par :

$$\text{card}(\Omega) = C_{32}^8 = 10518300 \quad (4.3)$$

1. Soit l'événement  $A$  : "Obtenir 2 dames et 3 piques dont la dame de pique".



La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.4)$$

Il reste à calculer  $\text{card}(A)$ . L'événement  $A$  correspond aux tirages de :

- 1 dame de pique, elle se trouve sur l'intersection de la ligne des piques et de la colonne des dames, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité ;
- une deuxième dame parmi les 3 qui restent sur la colonne des dames, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités ;
- 2 autres piques parmi les 7 qui restent sur la ligne des piques, soit  $C_7^2 = 21$  possibilités ;
- 4 cartes en dehors de la ligne des piques et de la colonne des dames pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^4 = 5985$  possibilités.

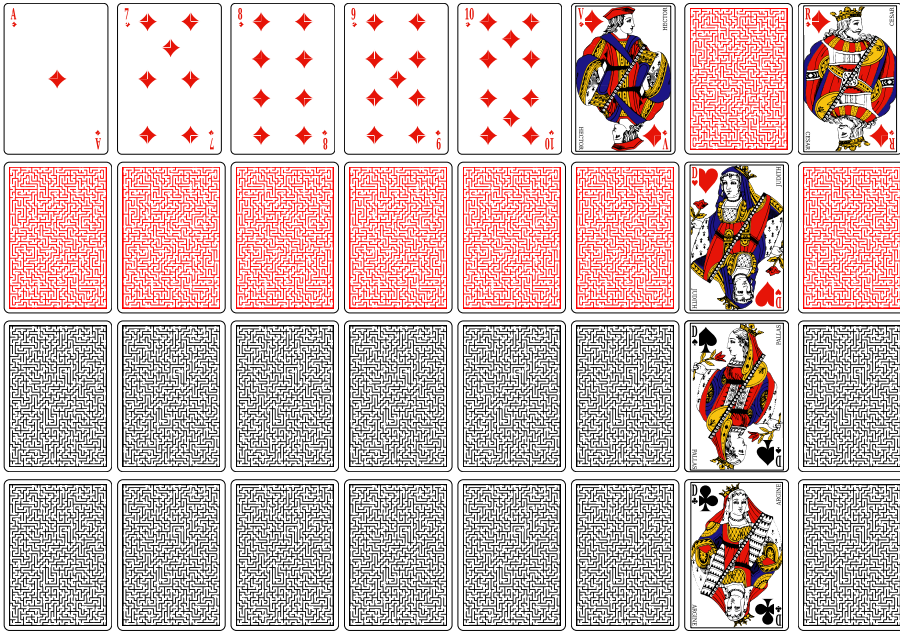
Ainsi :

$$\text{card}(A) = C_1^1 C_3^1 C_7^2 C_{21}^4 = 1 \times 3 \times 21 \times 5985 = 377055 \quad (4.5)$$

Finalement,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 C_3^1 C_7^2 C_{21}^4}{C_{32}^8} = \frac{377055}{10518300} \approx 0.03585 \quad (4.6)$$

2. Soit l'événement  $B$  : "Obtenir 1 dame et 3 carreaux sans la dame de carreau".



La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.7)$$

Il reste à calculer  $\text{card}(B)$ . L'événement  $B$  correspond aux tirages de :

- 1 dame parmi les 3 qui restent sur la colonne des dames après en avoir exclu la dame de carreau, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités ;
- 3 carreaux parmi les 7 qui restent sur la ligne des carreaux après en avoir exclu la dame de carreau, soit  $C_7^3 = 35$  possibilités ;
- 4 cartes en dehors de la ligne des carreaux et de la colonne des dames pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^4 = 5985$  possibilités.

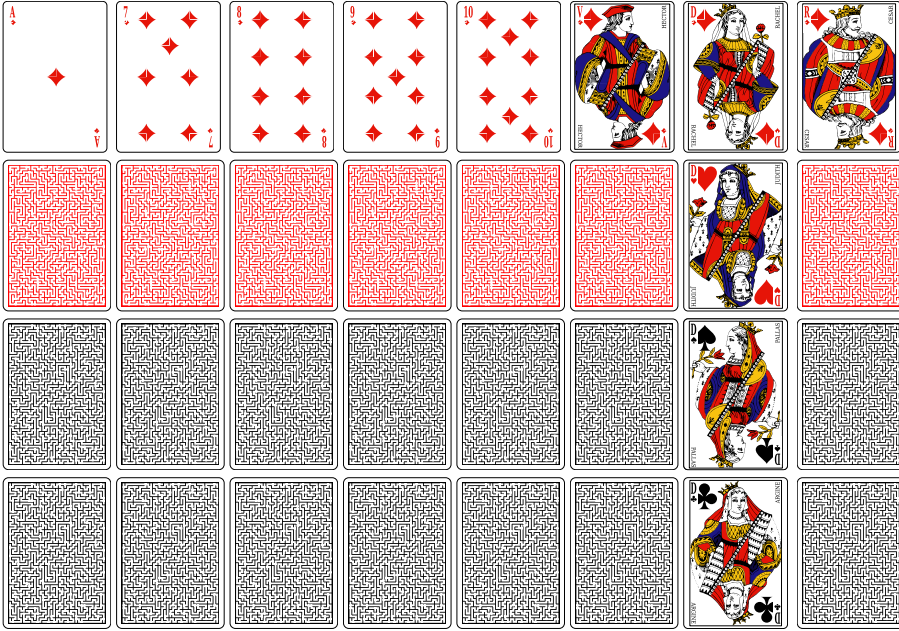
Ainsi :

$$\text{card}(B) = C_3^1 C_7^3 C_{21}^4 = 3 \times 35 \times 5985 = 628425 \quad (4.8)$$

Finalement,

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 C_7^3 C_{21}^4}{C_{32}^8} = \frac{628425}{10518300} \approx 0.05975 \quad (4.9)$$

3. Soit l'événement  $C$  : "Obtenir 2 dames et 3 carreaux".



La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.10)$$

Il reste à calculer  $\text{card}(C)$ . Cependant, il faut distinguer entre les deux événements élémentaires disjoints suivants :

- $C_1$  : "Obtenir 2 dames et 3 carreaux dont la dame de carreau". Dans ce cas, il faut tirer :
  - 1 dame de carreau, elle se trouve sur l'intersection de la ligne des carreaux et de la colonne des dames, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité ;
  - 1 dame parmi les 3 qui restent sur la colonne des dames, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités ;
  - 2 carreaux parmi les 7 qui restent sur la ligne des carreaux, soit  $C_7^2 = 21$  possibilités ;
  - 4 cartes en dehors de la ligne des carreaux et de la colonne des dames pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^4 = 5985$  possibilités.

Ainsi,

$$\text{card}(C_1) = C_1^1 C_3^1 C_7^2 C_{21}^4 = 1 \times 3 \times 21 \times 5985 = 377055 \quad (4.11)$$

- $C_2$  : "Obtenir 2 dames et 3 carreaux sans la dame de carreau". Dans ce cas, il reste à tirer
  - 2 dames parmi les 3 qui restent sur la colonne des dames après en avoir exclu la dame de carreau, soit  $C_3^2 = 3$  possibilités,
  - 3 carreaux parmi les 7 qui restent sur la ligne des carreaux après en avoir

- exclu la dame de carreau, soit  $C_7^3 = 35$  possibilités ;  
 — 3 cartes en dehors de la ligne des carreaux et de la colonne des dames pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^3 = 1330$  possibilités.

Ainsi,

$$\text{card}(C_2) = C_3^2 C_7^3 C_{21}^3 = 3 \times 35 \times 1330 = 139650 \quad (4.12)$$

Notons que les événements  $C_1$  et  $C_2$  ne peuvent se réaliser simultanément, ils sont disjoints (i.e.  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ) et leur union donne l'événement  $C$  (i.e.  $C_1 \cup C_2 = C$ ).  $C_1$  et  $C_2$  partitionnent  $C$ , il en résulte :

$$\text{card}(C) = \text{card}(C_1) + \text{card}(C_2) \quad (4.13)$$

D'où :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(C_1) + \text{card}(C_2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{377055 + 139650}{10518300} \approx 0.04912 \quad (4.14)$$

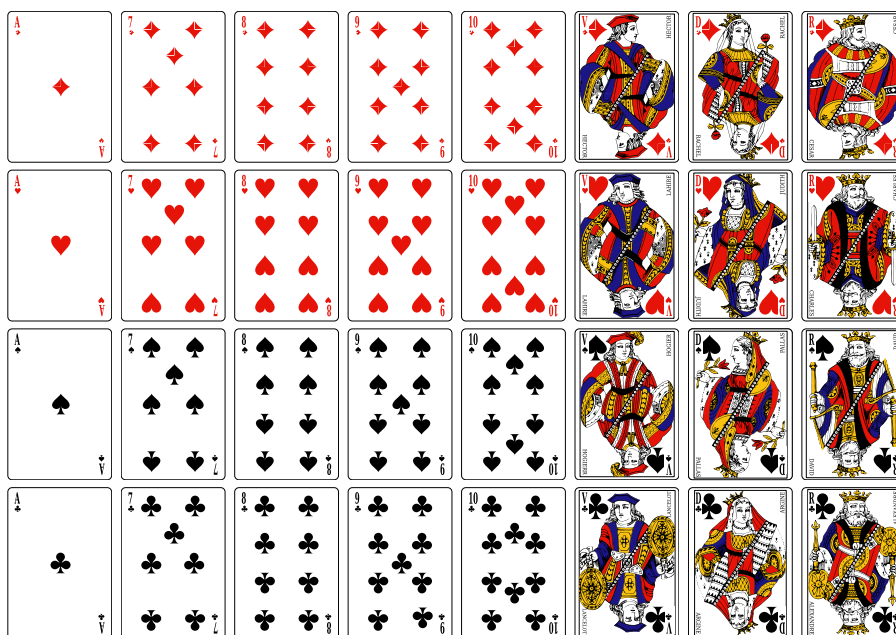
### Exercice 13 :

D'un jeu de 32 cartes, on tire 8 cartes au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi ces 8 cartes figurent :

1. 2 valets et 3 trèfles dont le valet de trèfle ?
2. 2 as et 3 piques sans l'as de pique ?
3. 2 as et 3 piques ?

### Solution :

Un jeu de 32 cartes est organisé en 8 valeurs (l'as, 7, 8, 9, 10, le valet, la dame et le roi) réparties sur 4 enseignes (le carreau, le cur, le pique et le trèfle) :



Toutes les cartes ont les mêmes probabilités d'être tirées. Cette situation d'équiprobabilité permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.15)$$

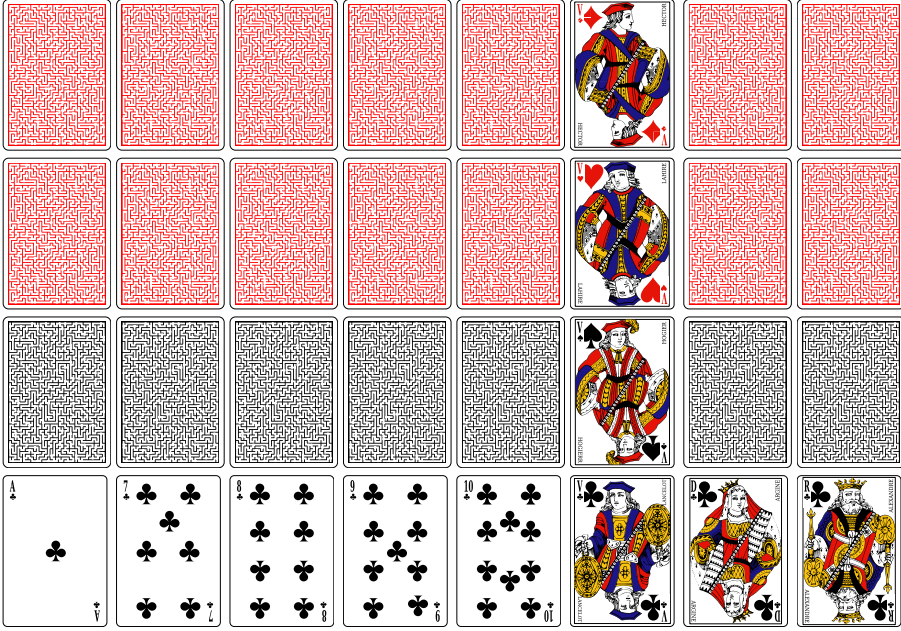
Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer (simultanément) 8 cartes au hasard parmi les 32. La répétition n'est pas autorisée et l'ordre n'a pas d'importance dans cette expérience. Il s'agit donc d'une combinaison de  $p = 8$  éléments parmi  $n = 32$  :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (4.16)$$

Le nombre de cas possibles est en conséquence donné par :

$$\text{card}(\Omega) = C_{32}^8 = 10518300 \quad (4.17)$$

1. Soit l'événement  $A$  : "Obtenir 2 valets et 3 trèfles dont le valet de trèfle".



La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.18)$$

Il reste à calculer  $\text{card}(A)$ . L'événement  $A$  correspond aux tirages de :

- 1 valet de trèfle, il se trouve sur l'intersection de la ligne des trèfles et de la colonne des valets, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité ;
- un deuxième valet parmi les 3 qui restent sur la colonne des valets, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités ;
- 2 autres trèfles parmi les 7 qui restent sur la ligne des trèfles, soit  $C_7^2 = 21$  possibilités ;
- 4 cartes en dehors de la ligne des trèfles et de la colonne des valets pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^4 = 5985$  possibilités.

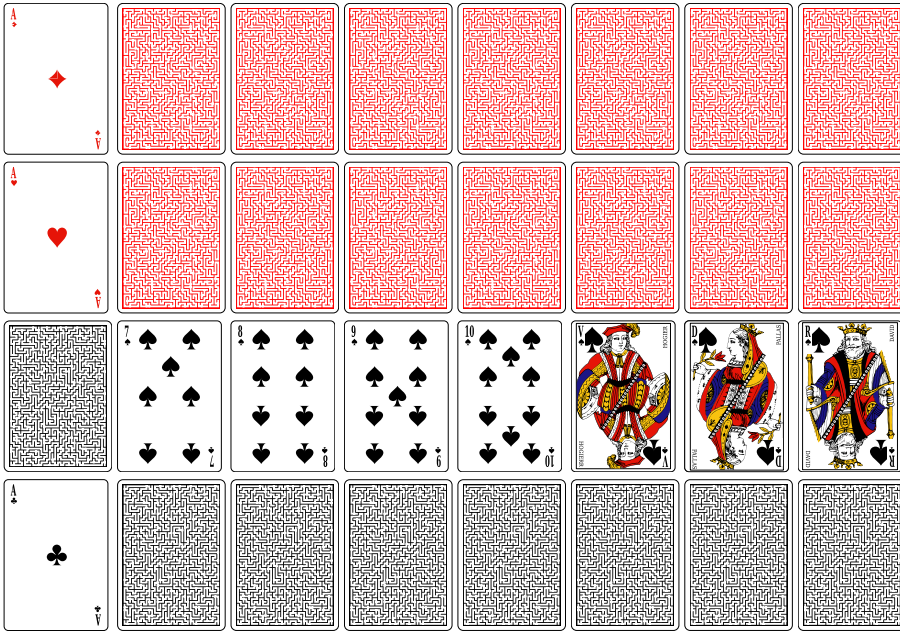
Ainsi :

$$\text{card}(A) = C_1^1 C_3^1 C_7^2 C_{21}^4 = 1 \times 3 \times 21 \times 5985 = 377055 \quad (4.19)$$

Finalement,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 C_3^1 C_7^2 C_{21}^4}{C_{32}^8} = \frac{377055}{10518300} \approx 0.03585 \quad (4.20)$$

2. Soit l'événement  $B$  : "Obtenir 2 as et 3 piques sans l'as de pique".



La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.21)$$

Il reste à calculer  $\text{card}(B)$ . L'événement  $B$  correspond aux tirages de :

- 2 as parmi les 3 qui restent sur la colonne des as après en avoir exclu l'as de pique, soit  $C_3^2 = 3$  possibilités ;
- 3 piques parmi les 7 qui restent sur la ligne des piques après en avoir exclu l'as de pique, soit  $C_7^3 = 35$  possibilités ;
- 3 cartes en dehors de la ligne des piques et de la colonne des as pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^3 = 1330$  possibilités.

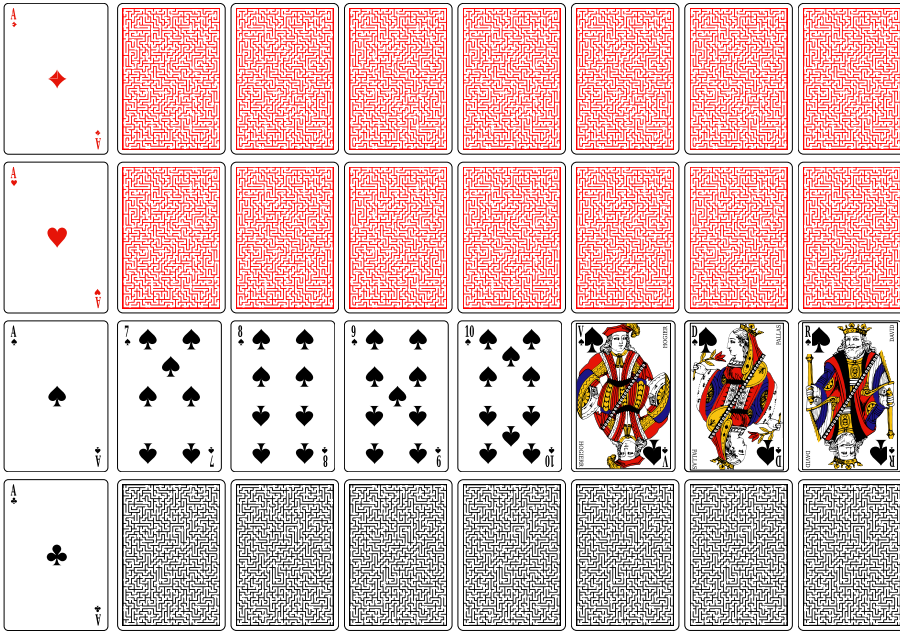
Ainsi :

$$\text{card}(B) = C_3^2 C_7^3 C_{21}^3 = 3 \times 35 \times 1330 = 139650 \quad (4.22)$$

Finalement,

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^2 C_7^3 C_{21}^3}{C_{32}^8} = \frac{139650}{10518300} \approx 0.013277 \quad (4.23)$$

3. Soit l'événement  $C$  : "Obtenir 2 as et 3 piques".



La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.24)$$

Il reste à calculer  $\text{card}(C)$ . Cependant, il faut distinguer entre les deux événements élémentaires disjoints suivants :

- $C_1$  : "Obtenir 2 as et 3 piques dont l'as de pique". Dans ce cas, il faut tirer :
  - 1 as de pique, il se trouve sur l'intersection de la ligne des piques et de la colonne des as, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité ;
  - 1 as parmi les 3 qui restent sur la colonne des as, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités ;
  - 2 piques parmi les 7 qui restent sur la ligne des piques, soit  $C_7^2 = 21$  possibilités ;
  - 4 cartes en dehors de la ligne des piques et de la colonne des as pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^4 = 5985$  possibilités.

Ainsi,

$$\text{card}(C_1) = C_1^1 C_3^1 C_7^2 C_{21}^4 = 1 \times 3 \times 21 \times 5985 = 377055 \quad (4.25)$$

- $C_2$  : "Obtenir 2 as et 3 piques sans l'as de pique". Dans ce cas, il reste à tirer
  - 2 as parmi les 3 qui restent sur la colonne des as après en avoir exclu l'as de pique, soit  $C_3^2 = 3$  possibilités,
  - 3 piques parmi les 7 qui restent sur la ligne des piques après en avoir exclu l'as de pique, soit  $C_7^3 = 35$  possibilités ;
  - 3 cartes en dehors de la ligne des piques et de la colonne des as pour compléter les 8 cartes à tirer, soit  $C_{21}^3 = 1330$  possibilités.

Ainsi,

$$\text{card}(C_2) = C_3^2 C_7^3 C_{21}^3 = 3 \times 35 \times 1330 = 139650 \quad (4.26)$$

Notons que les événements  $C_1$  et  $C_2$  ne peuvent se réaliser simultanément, ils sont disjoints (i.e.  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ) et leur union donne l'événement  $C$  (i.e.  $C_1 \cup C_2 = C$ ).  $C_1$  et  $C_2$  partitionnent  $C$ , il en résulte :

$$\text{card}(C) = \text{card}(C_1) + \text{card}(C_2) \quad (4.27)$$

D'où :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(C_1) + \text{card}(C_2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{377055 + 139650}{10518300} \approx 0.04912 \quad (4.28)$$

## 4.2 Candidatures

### Exercice 14 :

Parmi 12 candidats à une bourse, 3 appartiennent à la ville de Tanger, 3 appartiennent à la ville de Rabat, 3 appartiennent à la ville de Fès et 3 appartiennent à la ville de Marrakech. Parmi ces candidats, 4 seulement vont réussir.

1. Quelle est la probabilité que les quatre candidats appartiennent à des villes différentes ?
2. Quelle est la probabilité que les quatre candidats appartiennent à une même ville ?

### Solution :

Les 12 candidats à la bourse viennent de 4 villes selon le tableau suivant :

Tanger	Rabat	Fès	Marrakech
Tanger	Rabat	Fès	Marrakech
Tanger	Rabat	Fès	Marrakech

Ils ont tous la même probabilité d'être admis. Cette situation d'équiprobabilité permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.29)$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des possibilités. Chaque candidat ne peut être choisi qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, le nombre de dispositions des 4 candidats à retenir est donné par le nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 12, soit :

$$\text{card}(\Omega) = C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495 \quad (4.30)$$

1. Désignons par  $A$  l'événement : "les 4 candidats appartiennent à des villes différentes".

La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.31)$$

Le calcul de  $\text{card}(A)$  se fait en deux étapes :

- (a) Tirage au sort des villes : les 4 candidats viennent de villes différentes. Comme le nombre total de villes est égal à 4, il faut donc choisir les 4 villes parmi ces 4 villes disponibles. L'ordre dans lequel les villes sont choisies n'a pas d'importance et une ville ne peut être choisie qu'une seule fois. Il s'agit donc d'une combinaison sans répétition de 4 éléments parmi 4 :

$$C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1 \quad (4.32)$$

- (b) Tirage au sort des candidats : choisir un candidat parmi les 3 candidats de Tanger ( $C_3^1$ ), choisir un candidat parmi les 3 candidats de Rabat ( $C_3^1$ ), choisir un candidat parmi les 3 candidats de Fès ( $C_3^1$ ) et choisir un candidat parmi les 3 candidats de Marrakech ( $C_3^1$ ), soit :

$$C_3^1 C_3^1 C_3^1 C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} \quad (4.33)$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \quad (4.34)$$

$$= 81 \quad (4.35)$$

Il vient :

$$\text{card}(A) = C_4^4 \times C_3^1 C_3^1 C_3^1 C_3^1 = 1 \times 81 = 81 \quad (4.36)$$

D'où

$$P(A) = \frac{81}{495} = \frac{9}{55} \quad (4.37)$$

2. Désignons par  $B$  l'événement : "Les 4 candidats appartiennent à une même ville".

La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.38)$$

Le calcul de  $\text{card}(B)$  se fait en deux étapes :

- (a) Tirage au sort de la ville dans les 4 villes disponibles :

$$C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4 \quad (4.39)$$

- (b) Tirage au sort des candidats : choisir 4 candidats par les 3 candidats de la ville

choisie ( $C_3^4 = 0$ ) et ne choisir aucun candidat parmi les candidats de chacune des 3 autres villes ( $C_3^0 C_3^0 C_3^0$ ), soit :

$$C_3^4 C_3^0 C_3^0 C_3^0 = 0 \times \frac{3!}{0!(3-0)!} \times \frac{3!}{0!(3-0)!} \times \frac{3!}{0!(3-0)!} = 0 \quad (4.40)$$

Il vient :

$$\text{card}(B) = C_4^1 \times C_3^4 C_3^0 C_3^0 C_3^0 = 4 \times 0 = 0 \quad (4.41)$$

D'où

$$P(B) = \frac{0}{495} = 0 \quad (4.42)$$

**Rappel :**

$$p > n \Rightarrow C_n^p = 0 \quad (4.43)$$

### Exercice 15 :

Parmi 10 candidats à cinq postes, 2 appartiennent à la ville de Tanger, 2 appartiennent à la ville de Rabat, 2 appartiennent à la ville de Casablanca, 2 appartiennent à la ville de Fès et 2 appartiennent à la ville Marrakech. Parmi ces 10 candidats, 5 seulement vont gagner un poste.

1. Calculer la probabilité que les 5 candidats gagnants appartiennent à des villes différentes.
2. Calculer la probabilité que deux gagnants seulement appartiennent à une même ville et les trois autres appartiennent à des villes différentes.
3. Calculer la probabilité que les 5 candidats gagnants appartiennent à une même ville.

### Solution :

Les 10 candidats viennent deux à deux de 5 villes selon le tableau suivant :

Tanger	Rabat	Casablanca	Fès	Marrakech
Tanger	Rabat	Casablanca	Fès	Marrakech

Ils ont tous la même probabilité d'être admis. Cette situation d'équiprobabilité permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.44)$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des possibilités. Chaque candidat ne peut être choisi qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, le nombre de dispositions des 5 candidats à retenir est donné par le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 10, soit :

$$\text{card}(\Omega) = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252 \quad (4.45)$$

1. Désignons par  $A$  l'événement : "les 5 candidats gagnants appartiennent à des villes différentes". La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.46)$$

Le calcul de  $\text{card}(A)$  se fait en deux étapes :

- (a) Tirage au sort des villes : les 5 candidats viennent de villes différentes. Comme le nombre total de villes est égal à 5, il faut donc choisir les 5 villes parmi ces 5 villes disponibles. L'ordre dans lequel les villes sont choisies n'a pas d'importance et une ville ne peut être choisie qu'une seule fois. Il s'agit donc d'une combinaison sans répétition de 5 éléments parmi 5 :

$$C_5^5 = \frac{5!}{5!(5-5)!} = 1 \quad (4.47)$$

- (b) Tirage au sort des candidats : choisir un candidat parmi les 2 candidats de Tanger ( $C_2^1$ ), choisir un candidat parmi les 2 candidats de Rabat ( $C_2^1$ ), choisir un candidat parmi les 2 candidats de Casablanca ( $C_2^1$ ), choisir un candidat parmi les 2 candidats de Fès ( $C_2^1$ ) et choisir un candidat parmi les 2 candidats de Marrakech ( $C_2^1$ ), soit :

$$C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \quad (4.48)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad (4.49)$$

$$= 32 \quad (4.50)$$

Il vient :

$$\text{card}(A) = C_5^5 \times C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 = 1 \times 32 = 32 \quad (4.51)$$

D'où

$$P(A) = \frac{32}{252} = \frac{8}{63} \quad (4.52)$$

2. Désignons par  $B$  l'événement : "2 candidats gagnants seulement appartiennent à une même ville et les 3 autres appartiennent à des villes différentes". La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.53)$$

Le calcul de  $\text{card}(B)$  se fait selon les étapes suivantes :

- (a) Parmi les 5 villes, choisir celle à laquelle appartiendront 2 candidats ( $C_5^1$ ) puis

choisir 2 candidats parmi les 2 candidats de cette ville ( $C_2^2$ ), soit :

$$C_5^1 C_2^2 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \times \frac{2!}{2!(2-2)!} = 5 \times 1 = 5 \quad (4.54)$$

- (b) **ET**, parmi les 4 villes qui restent, choisir 3 villes auxquelles appartiendront un candidat chacune ( $C_4^3$ ), puis choisir un candidat parmi les 2 candidats de chacune de ces villes ( $C_2^1 C_2^1 C_2^1$ ), soit :

$$C_4^3 C_2^1 C_2^1 C_2^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \quad (4.55)$$

- (c) **ET**, dans la dernière ville qui reste ( $C_1^1$ ), ne choisir aucun candidat parmi ses 2 candidats ( $C_2^0$ ), soit :

$$C_1^1 C_2^0 = \frac{1!}{1!(1-1)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} = 1 \times 1 = 1 \quad (4.56)$$

Il vient :

$$\text{card}(B) = C_5^1 C_2^2 \times C_4^3 C_2^1 C_2^1 C_2^1 \times C_1^1 C_2^0 = 5 \times 32 \times 1 = 160 \quad (4.57)$$

D'où

$$P(B) = \frac{160}{252} = \frac{40}{63} \quad (4.58)$$

3. Désignons par  $C$  l'événement : "Les 5 candidats gagnants appartiennent à une même ville". La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.59)$$

Le calcul de  $\text{card}(C)$  se fait en deux étapes :

- (a) Tirage au sort de la ville dans les 5 villes disponibles :

$$C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5 \quad (4.60)$$

- (b) Tirage au sort des candidats : choisir 5 candidats par les 2 candidats de la ville choisie ( $C_2^5 = 0$ ) et ne choisir aucun candidat parmi les candidats de chacune des 4 autres villes ( $C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0$ ), soit :

$$C_2^5 C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0 = 0 \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} = 0 \quad (4.61)$$

Il vient :

$$\text{card}(C) = C_5^1 \times C_2^5 C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0 = 5 \times 0 = 0 \quad (4.62)$$

D'où

$$P(C) = \frac{0}{252} = 0 \quad (4.63)$$

**Rappel :**

$$p > n \Rightarrow C_n^p = 0 \quad (4.64)$$

**Exercice 16 :**

Parmi 12 candidats à s'inscrire en doctorat, 2 appartiennent à la ville de Tanger, 2 appartiennent à la ville de Rabat, 2 appartiennent à la ville de Fès, 2 appartiennent à la ville de Marrakech, 2 appartiennent à la ville d'Agadir et 2 appartiennent à la ville d'Oujda. Parmi ces candidats, 4 seulement vont réussir.

1. Quelle est la probabilité que les quatre candidats appartiennent à des villes différentes ?
2. Quelle est la probabilité que deux candidats seulement appartiennent à des villes différentes ?
3. Quelle est la probabilité que les quatre candidats appartiennent à une même ville ?

**Solution :**

Les 12 candidats au doctorat viennent deux à deux de 6 villes selon le tableau suivant :

Tanger	Rabat	Fès	Marrakech	Agadir	Oujda
Tanger	Rabat	Fès	Marrakech	Agadir	Oujda

Ils ont tous la même probabilité d'être admis. Cette situation d'équiprobabilité permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.65)$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des possibilités. Chaque candidat ne peut être choisi qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, le nombre de dispositions des 4 candidats à retenir est donné par le nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 12, soit :

$$\text{card}(\Omega) = C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495 \quad (4.66)$$

1. Désignons par  $A$  l'événement : "les 4 candidats appartiennent à des villes différentes". La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.67)$$

Le calcul de  $\text{card}(A)$  se fait en deux étapes :

- (a) Tirage au sort des villes : les 4 candidats viennent de villes différentes. Comme le nombre total de villes est égal à 6, il faut donc choisir les 4 villes parmi ces 6 villes disponibles. L'ordre dans lequel les villes sont choisies n'a pas d'importance et une ville ne peut être choisie qu'une seule fois. Il s'agit donc d'une combinaison sans répétition de 4 éléments parmi 6 :

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15 \quad (4.68)$$

- (b) Tirage au sort des candidats : choisir un candidat parmi les 2 candidats de la première ville choisie ( $C_2^1$ ), choisir un candidat parmi les 2 candidats de la deuxième ville choisie ( $C_2^1$ ), choisir un candidat parmi les 2 candidats de la troisième ville choisie ( $C_2^1$ ), choisir un candidat parmi les 2 candidats de la quatrième ville choisie ( $C_2^1$ ) et ne choisir aucun candidats parmi les candidats des 2 villes qui n'ont pas été choisies ( $C_2^0 C_2^0$ ), soit :

$$C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^0 C_2^0 = \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \quad (4.69)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \quad (4.70)$$

$$= 16 \quad (4.71)$$

Il vient :

$$\text{card}(A) = C_6^4 \times C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^0 C_2^0 = 15 \times 16 = 240 \quad (4.72)$$

D'où

$$P(A) = \frac{240}{495} = \frac{48}{99} \quad (4.73)$$

2. Désignons par  $B$  l'événement : "2 candidats seulement appartiennent à des villes différentes", ou bien de manière équivalente "2 candidats seulement appartiennent à des villes différentes et les 2 autres appartiennent à la même ville". La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.74)$$

Le calcul de  $\text{card}(B)$  se fait selon les étapes suivantes :

- (a) Parmi les 6 villes, choisir celle à laquelle appartiendront 2 candidats ( $C_6^1$ ) puis choisir 2 candidats parmi les 2 candidats de cette ville ( $C_2^2$ ), soit :

$$C_6^1 C_2^2 = \frac{6!}{1!(6-1)!} \times \frac{2!}{2!(2-2)!} = 6 \times 1 = 6 \quad (4.75)$$

- (b) **ET**, parmi les 5 villes qui restent, choisir 2 villes auxquelles appartiendront

un candidat chacune ( $C_5^2$ ), puis choisir un candidat parmi les 2 candidats de chacune de ces villes ( $C_2^1 C_2^1$ ), soit :

$$C_5^2 C_2^1 C_2^1 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} = 10 \times 2 \times 2 = 40 \quad (4.76)$$

(c) **ET**, dans les 3 villes qui restent ( $C_3^3$ ), ne choisir aucun candidat parmi les 2 candidats de chacune ( $C_2^0 C_2^0 C_2^0$ ), soit :

$$C_3^3 C_2^0 C_2^0 C_2^0 = \frac{3!}{3!(3-3)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (4.77)$$

Il vient :

$$\text{card}(B) = C_6^1 C_2^2 \times C_5^2 C_2^1 C_2^1 \times C_3^3 C_2^0 C_2^0 C_2^0 = 6 \times 40 \times 1 = 240 \quad (4.78)$$

D'où

$$P(B) = \frac{240}{252} = \frac{60}{63} \quad (4.79)$$

3. Désignons par  $C$  l'événement : "Les 4 candidats appartiennent à une même ville".

La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.80)$$

Le calcul de  $\text{card}(C)$  se fait en deux étapes :

(a) Tirage au sort de la ville dans les 6 villes disponibles :

$$C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = 6 \quad (4.81)$$

(b) Tirage au sort des candidats : choisir 4 candidats par les 2 candidats de la ville choisie ( $C_2^4 = 0$ ) et ne choisir aucun candidat parmi les candidats de chacune des 5 autres villes ( $C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0$ ), soit :

$$C_2^4 C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0 = 0 \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{2!}{0!(2-0)!} = 0 \quad (4.82)$$

Il vient :

$$\text{card}(C) = C_6^1 \times C_2^4 C_2^0 C_2^0 C_2^0 C_2^0 = 6 \times 0 = 0 \quad (4.83)$$

D'où

$$P(C) = \frac{0}{495} = 0 \quad (4.84)$$

**Rappel :**

$$p > n \Rightarrow C_n^p = 0 \quad (4.85)$$

### 4.3 Destinations touristiques

**Exercice 17 :**

Pour passer ses vacances, un touriste marocain a le choix entre 5 destinations au Maroc, 5 destinations en France, 2 destinations en Espagne et 2 destinations en Italie. Parmi ces destinations, il décide d'en choisir 4 seulement.

1. Calculer la probabilité que les quatre destinations appartiennent à des pays différents ;
2. Calculer la probabilité que les quatre destinations appartiennent à un même pays ;
3. Calculer la probabilité que 2 destinations appartiennent à la France, et au moins une destination appartient au Maroc.

**Solution :**

Les 14 destinations que le touriste marocain peut choisir sont regroupées dans le tableau suivant :

Maroc	Maroc	Maroc	France	France	Espagne	Italie
Maroc	Maroc	France	France	France	Espagne	Italie

Elles ont toutes la même probabilité d'être choisies. Cette situation d'équiprobabilité permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \tag{4.86}$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des possibilités. Chaque destination ne peut être choisie qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel elle est choisie. Par conséquent, le nombre de dispositions des 4 destinations à retenir est donné par le nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 14, soit :

$$\text{card}(\Omega) = C_{14}^4 = \frac{14!}{4!(14-4)!} = 1001 \tag{4.87}$$

1. Désignons par  $A$  l'événement : "les 4 destinations appartiennent à des pays différents". La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \tag{4.88}$$

avec

$$\text{card}(A) = C_5^1 C_5^1 C_2^1 C_2^1 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 = 100 \tag{4.89}$$

D'où

$$P(A) = \frac{100}{1001} \tag{4.90}$$

2. Désignons par :

- $B$  l'événement : "Les 4 destinations appartiennent à un même pays" ;
- $B_M$  l'événement : "Les 4 destinations appartiennent au Maroc" ;
- $B_F$  l'événement : "Les 4 destinations appartiennent à la France" ;
- $B_E$  l'événement : "Les 4 destinations appartiennent à l'Espagne" ;
- $B_I$  l'événement : "Les 4 destinations appartiennent à l'Italie".

où  $B_M, B_F, B_E$  et  $B_I$  forment une partition de  $B$  dont la probabilité est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.91)$$

avec  $\text{card}(B) = \text{card}(B_M) + \text{card}(B_F) + \text{card}(B_E) + \text{card}(B_I)$  et

$$\text{card}(B_M) = C_5^4 C_5^0 C_2^0 C_2^0 = 5 \times 1 \times 1 \times 1 = 5 \quad (4.92)$$

$$\text{card}(B_F) = C_5^0 C_5^4 C_2^0 C_2^0 = 1 \times 5 \times 1 \times 1 = 5 \quad (4.93)$$

$$\text{card}(B_E) = C_5^0 C_5^0 C_2^4 C_2^0 = 1 \times 1 \times 0 \times 1 = 0 \quad (4.94)$$

$$\text{card}(B_I) = C_5^0 C_5^0 C_2^0 C_2^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 0 = 0 \quad (4.95)$$

D'où  $\text{card}(B) = 5 + 5 + 0 + 0 = 10$  et

$$P(B) = \frac{10}{1001} \quad (4.96)$$

**Rappel :**

$$p > n \Rightarrow C_n^p = 0 \quad (4.97)$$

3. Désignons par  $C$  l'événement : "2 destinations appartiennent à la France et au moins une destination appartient au Maroc". Cet événement peut s'écrire de manière explicite somme suit : "2 destinations appartiennent à la France et 1 destination appartient au Maroc et 1 destination appartient à l'Espagne" (désignons cet événement par  $C_1$ ) **OU** "2 destinations appartiennent à la France et 1 destination appartient au Maroc et 1 destination appartient à l'Italie" (désignons cet événement par  $C_2$ ) **OU** "2 destinations appartiennent à la France et 2 destinations appartiennent au Maroc" (désignons cet événement par  $C_3$ ). Ainsi,  $C_1, C_2$  et  $C_3$  forment une partition de  $C$  et  $\text{card}(C) = \text{card}(C_1) + \text{card}(C_2) + \text{card}(C_3)$  avec :

$$\text{— } \text{card}(C_1) = C_5^2 C_5^1 C_2^1 C_2^0 = 10 \times 5 \times 2 \times 1 = 100$$

$$\text{— } \text{card}(C_2) = C_5^2 C_5^1 C_2^0 C_2^1 = 10 \times 5 \times 1 \times 2 = 100$$

$$\text{— } \text{card}(C_3) = C_5^2 C_5^2 C_2^0 C_2^0 = 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 100$$

Par conséquent,  $\text{card}(C) = 100 + 100 + 100 = 300$  et subséquemment :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{300}{1001} \quad (4.98)$$

**Exercice 18 :**

Pour passer ses vacances, un touriste marocain a le choix entre 5 destinations au Maroc, 5 destinations en France, 5 destinations en Espagne et 2 destinations en Italie. Parmi ces destinations, 5 seulement vont être choisies au hasard.

1. Calculer la probabilité que les 5 destinations choisies au hasard appartiennent à des pays différents ;
2. Calculer la probabilité que les 5 destinations appartiennent à un même pays ;
3. Calculer la probabilité que 3 destinations appartiennent à la France et au moins une destination appartient au Maroc.

**Solution :**

Les 17 destinations que le touriste marocain peut choisir sont regroupées dans le tableau suivant :

Maroc	Maroc	Maroc	France	France	Espagne	Espagne	Espagne	Italie
Maroc	Maroc	France	France	France	Espagne	Espagne		Italie

Elles ont toutes la même probabilité d'être choisies. Cette situation d'équiprobabilité permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.99)$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des possibilités. Chaque destination ne peut être choisie qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel elle est choisie. Par conséquent, le nombre de dispositions des 5 destinations à retenir est donné par le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 17, soit :

$$\text{card}(\Omega) = C_{17}^5 = \frac{17!}{5!(17-5)!} = 6188 \quad (4.100)$$

1. Désignons par  $A$  l'événement : "les 5 destinations appartiennent à des pays différents". La probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.101)$$

avec

$$\text{card}(A) = C_5^1 C_5^1 C_5^1 C_2^1 C_0^1 = 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 0 = 0 \quad (4.102)$$

D'où

$$P(A) = \frac{0}{6188} = 0 \quad (4.103)$$

2. Désignons par :

- $B$  l'événement : "Les 5 destinations appartiennent à un même pays";
- $B_M$  l'événement : "Les 5 destinations appartiennent au Maroc";
- $B_F$  l'événement : "Les 5 destinations appartiennent à la France";
- $B_E$  l'événement : "Les 5 destinations appartiennent à l'Espagne";
- $B_I$  l'événement : "Les 5 destinations appartiennent à l'Italie".

où  $B_M, B_F, B_E$  et  $B_I$  forment une partition de  $B$  dont la probabilité est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.104)$$

avec  $\text{card}(B) = \text{card}(B_M) + \text{card}(B_F) + \text{card}(B_E) + \text{card}(B_I)$  et

$$\text{card}(B_M) = C_5^5 C_5^0 C_5^0 C_2^0 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (4.105)$$

$$\text{card}(B_F) = C_5^0 C_5^5 C_5^0 C_2^0 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (4.106)$$

$$\text{card}(B_E) = C_5^0 C_5^0 C_5^5 C_2^0 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (4.107)$$

$$\text{card}(B_I) = C_5^0 C_5^0 C_5^0 C_2^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 0 = 0 \quad (4.108)$$

D'où  $\text{card}(B) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$  et

$$P(B) = \frac{3}{6188} \quad (4.109)$$

**Rappel :**

$$p > n \Rightarrow C_n^p = 0 \quad (4.110)$$

3. Désignons par  $C$  l'événement : "3 destinations appartiennent à la France et au moins une destination appartient au Maroc". Cet événement peut s'écrire de manière explicite comme suit : "3 destinations appartiennent à la France et 1 destination appartient au Maroc et 1 destination appartient à l'Espagne" (désignons cet événement par  $C_1$ ) **OU** "3 destinations appartiennent à la France et 1 destination appartient au Maroc et 1 destination appartient à l'Italie" (désignons cet événement par  $C_2$ ) **OU** "3 destinations appartiennent à la France et 2 destinations appartiennent au Maroc" (désignons cet événement par  $C_3$ ). Ainsi,  $C_1, C_2$  et  $C_3$  forment une partition de  $C$  et  $\text{card}(C) = \text{card}(C_1) + \text{card}(C_2) + \text{card}(C_3)$  avec :

$$\text{— } \text{card}(C_1) = C_5^3 C_5^1 C_2^1 C_2^0 = 10 \times 5 \times 2 \times 1 = 100$$

$$\text{— } \text{card}(C_2) = C_5^3 C_5^1 C_2^0 C_2^1 = 10 \times 5 \times 1 \times 2 = 100$$

$$\text{— } \text{card}(C_3) = C_5^3 C_5^2 C_2^0 C_2^0 = 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 100$$

Par conséquent,  $\text{card}(C) = 100 + 100 + 100 = 300$  et subséquemment :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{300}{6188} \quad (4.111)$$

**Exercice 19 :**

5 étudiants passent 10 concours pour accéder à 10 grandes écoles

1. Calculer la probabilité que les 5 étudiants réussissent des écoles différentes.
2. Calculer la probabilité que 2 étudiants seulement réussissent une même école et les 3 autres des écoles différentes.
3. Calculer la probabilité que les 5 étudiants réussissent les mêmes écoles.

**Solution :**

Les 5 étudiants vont accéder à 10 grandes écoles avec les mêmes probabilités pour garantir l'égalité des chances. Cette situation d'équiprobabilité nous permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (4.112)$$

La répétition est permise puisqu'on suppose que les places ne sont pas limitées et l'ordre d'accès n'a pas d'importance. Le nombre de cas possibles est donc donné par le nombre de combinaisons avec répétitions de 5 éléments parmi 10 :

$$\text{card}(\Omega) = K_{10}^5 = C_{10-1+5}^5 = \frac{14!}{5!9!} = 2002 \quad (4.113)$$

1. Probabilité que les 5 étudiants réussissent des écoles différentes :

Désignons par  $A$  l'événement : "les 5 étudiants réussissent des écoles différentes". Le nombre de cas favorables à cet événement est égal au nombre de combinaisons sans répétitions de 5 éléments parmi 10, c'est à dire :

$$\text{card}(A) = C_{10}^5 \quad (4.114)$$

La probabilité de l'événement  $A$  est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{252}{2002} = \frac{126}{1001} \quad (4.115)$$

Il y a une probabilité de 126/1001 que les 5 étudiants réussissent des écoles différentes.

2. Probabilité que 2 étudiants seulement réussissent une même école et les 3 autres des écoles différentes :

Désignons par  $B$  l'événement : "2 étudiants seulement réussissent une même école et les 3 autres des écoles différentes". Le nombre de cas favorables à cet événement est égal au nombre de combinaisons avec répétitions de 2 éléments (étudiants) parmi 1 (une grande école) multiplié par le nombre de combinaisons sans répétitions de 3

éléments (étudiants) parmi les 9 (grandes écoles) qui restent, c'est à dire :

$$\text{card}(B) = K_1^2 \times C_9^3 = C_{2-1+1}^2 \times C_9^3 = 1 \times 84 = 84 \quad (4.116)$$

La probabilité de l'événement  $B$  est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{84}{2002} = \frac{42}{1001} \quad (4.117)$$

Il y a une probabilité de  $42/1001$  que 2 étudiants seulement réussissent une même école et les 3 autres des écoles différentes.

3. Probabilité que les 5 étudiants réussissent les mêmes écoles :

Désignons par  $C$  l'événement : "les 5 étudiants réussissent les mêmes écoles". Le nombre de cas favorables à cet événement est égal au nombre de combinaisons avec répétitions de 5 éléments (étudiants) parmi 1 (une grande école) multiplié par le nombre de combinaisons avec répétitions de 0 élément (étudiant) parmi les 9 (grandes écoles) qui restent, c'est à dire :

$$\text{card}(C) = K_1^5 \times K_9^0 = C_{1-1+5}^5 \times C_{9-1+0}^0 = 1 \times 1 = 1 \quad (4.118)$$

La probabilité de l'événement  $C$  est donnée par :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{2002} = \frac{1}{1001} \quad (4.119)$$

Il y a une probabilité de  $1/1001$  que les 5 étudiants réussissent les mêmes écoles.

## 4.4 Tirage aléatoire de boules dans un sac ou une urne

### Exercice 20 :

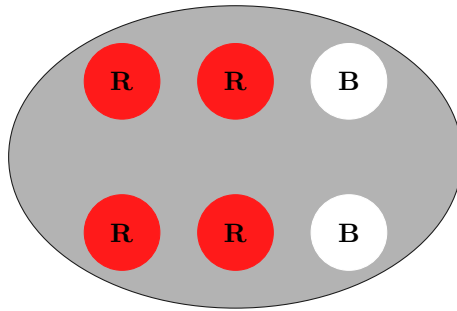
On tire au hasard une boule dans un sac contenant 4 boules rouges et 2 boules blanches. Si la boule tirée est rouge on gagne 2 points, et si elle est blanche on perd 4 points. On répète cette expérience aléatoire 3 fois **avec remise** de la boule tirée dans le sac avant de procéder au tirage suivant.

On considère la variable aléatoire  $X$  donnant la somme algébrique des points gagnés ou perdus à l'issue des 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilités de  $X$  ;
2. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  ;
3. Calculer la variance  $V(X)$ .

### Solution :

Le schéma suivant illustre un sac contenant 6 boules dont 4 rouges et 2 blanches :

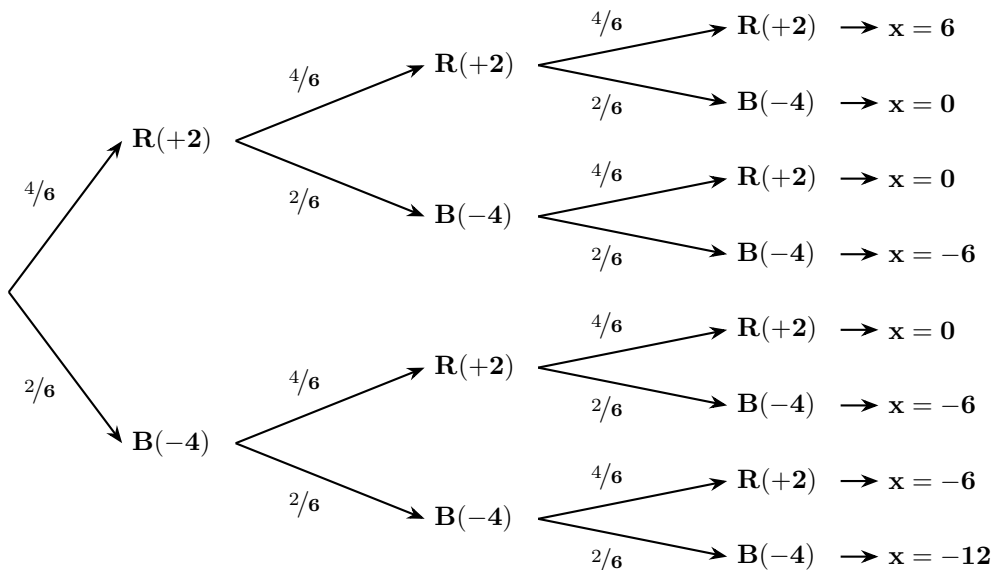


Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule dans le sac et à la remettre dans celui-ci avant de procéder à un nouveau tirage. Cette expérience aléatoire est répétée 3 fois de suite et à chaque fois le tirage d'une boule rouge fait gagner 2 points et le tirage d'une boule blanche en fait perdre 4. Le total des points gagnés ou perdus est comptabilisé par la variable aléatoire  $X$ .

Le tirage des boules étant avec remise de chaque boule tirée dans le sac avant de procéder à un nouveau tirage implique que le résultat de chaque tirage est indépendant de celui des tirages qui lui ont précédés. Dans ces conditions, la probabilité jointe de deux événements indépendants  $A$  et  $B$  est égale au produit de leurs probabilités marginales respectives (i.e.  $P(AB) = P(A)P(B)$ ). De manière équivalente, la probabilité conditionnelle d'un événement  $A$  sachant un événement  $B$  indépendant est égale à la probabilité marginale de  $A$  puisque la condition  $B$  n'a aucun effet sur la probabilité de réalisation de l'événement  $A$  dont il ne dépend pas (i.e.  $P(A|B) = P(A)$ ).

1. Loi de probabilité de  $X$  :

Afin d'établir la loi de probabilités de la variable aléatoire  $X$ , commençons par illustrer l'ensemble des possibilités à l'aide d'un arbre de décision :



Désignons par  $R_n$  (respectivement,  $B_n$ ) l'événement "obtenir une boule rouge (respectivement, blanche) lors du tirage numéro  $n$ ", avec  $n = 1, 2, 3$ . Selon cet arbre, les valeurs possibles de la variable aléatoire  $X$  sont -12, -6, 0 ou 6.

**Probabilité de  $x_1 = -12$  :**

Il n'y a qu'une seule branche qui mène vers cette première possibilité; celle qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ). Ainsi, la probabilité associée à cette possibilité est donnée par :

$$P(x_1 = -12) = P(B_1 B_2 B_3)$$

Comme les tirages sont avec remise de la boule tirée dans le sac avant le tirage suivant, les événements  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  sont indépendants. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(x_1 = -12) &= P(B_1 B_2 B_3) \\ &= P(B_1)P(B_2)P(B_3) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

De manière équivalente, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la première possibilité  $x_1 = -12$ ; cette branche consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), puis une boule blanche lors du deuxième tirage sachant qu'une boule blanche a été tirée lors du premier tirage ( $B_2|B_1$ ) et enfin une boule blanche lors du troisième tirage sachant que des boules blanches ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $B_3|B_1 B_2$ ). Mais comme les événements  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  sont indépendants, les probabilités conditionnelles sont égales aux probabilités marginales. On retrouve le même résultat que précédemment :

$$\begin{aligned} P(x_1 = -12) &= P(B_1 B_2 B_3) \\ &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 B_2) \\ &= P(B_1)P(B_2)P(B_3) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

**Probabilité de  $x_2 = -6$  :**

Il y a 3 branches qui mènent vers cette deuxième possibilité :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2B_3)$  ;
- **ou** la deuxième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2B_3)$  ;
- **ou** la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1B_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir  $x_2 = -6$  est donc donnée par :

$$P(x_2 = -6) = P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3)$$

Comme les événements sont indépendants, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned} P(y_i = -6) &= P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3) \\ &= P(R_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(R_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(R_3) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

**Probabilité de  $x_3 = 0$  :**

Il y a 3 branches qui mènent vers la troisième possibilité :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1R_2B_3)$  ;
- **ou** la deuxième branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2R_3)$  ;
- **ou** la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 0$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 0) = P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 0) &= P(R_1 R_2 B_3) + P(R_1 B_2 R_3) + P(B_1 R_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \times P(B_3 | R_1 R_2) + P(R_1) \times P(B_2 | R_1) \times P(R_3 | R_1 B_2) \cdots \\
 &\quad + P(B_1) \times P(R_2 | B_1) \times P(R_3 | B_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\
 &= \frac{185}{375}
 \end{aligned}$$

Enfin, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la dernière possibilité  $y_i = 6$  ; celle qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ). La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 6) = P(R_1 R_2 R_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), puis une boule rouge lors du deuxième tirage sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier tirage ( $R_2 | R_1$ ) et enfin une boule rouge lors du troisième tirage sachant que des boules rouges ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $R_3 | R_1 R_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 6) &= P(R_1 R_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \times P(R_3 | R_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Les résultats précédents sont récapitulés dans le tableau suivant :

$y_i$	-12	-6	0	6
$P(y_i)$	1/27	182/675	185/375	1/5

**Remarque :** Étant donné que chaque boule tirée, indépendamment de sa couleur, est remise dans le sac avant de procéder au tirage suivant, il en résulte que les événements  $R_i$  et  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) précédemment définis sont indépendants. Rappelons que dans une telle situation, la probabilité jointe d'événements indépendants  $A$  et  $B$  est égale au produit de leurs probabilités marginales (i.e.  $P(AB) = P(A)P(B)$ ).

En appliquant cette règle au cas présent, on retrouve les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -12) &= P(B_1 B_2 B_3) \\
 &= P(B_1)P(B_2)P(B_3) \\
 &= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \\
 &= \frac{1}{27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -6) &= P(R_1 B_2 B_3) + P(B_1 R_2 B_3) + P(B_1 B_2 R_3) \\
 &= P(R_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(R_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(R_3) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6}
 \end{aligned}$$

$$P(y_i = 0) = P(R_1 R_2 B_3) + P(R_1 B_2 R_3) + P(B_1 R_2 R_3)$$

$$P(y_i = 6) = P(R_1 R_2 R_3)$$

Notons au passage que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 P(y_i) &= \frac{1}{27} + \frac{182}{675} + \frac{185}{375} + \frac{1}{5} \\
 &= \frac{25}{675} + \frac{182}{675} + \frac{333}{675} + \frac{135}{675} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

Espérance mathématique  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = -\frac{282}{675} \approx -0.418$$

$y_i$	$P(y_i)$	$y_i P(y_i)$
-12	25/675	-300/675
-6	182/675	-1092/675
0	333/675	0/675
6	135/675	810/675
$\Sigma$	1	-282/675

Variance  $V(Y)$  :

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = \frac{15012}{675} = \frac{556}{25}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$= \frac{556}{25} - \left(-\frac{282}{675}\right)^2 \approx 22.064$$

$y_i$	$y_i^2$	$P(y_i)$	$y_i^2 P(y_i)$
-12	144	25/675	3600/675
-6	36	182/675	6552/675
0	0	333/675	0/675
6	36	135/675	4860/675
$\Sigma$	-	1	15012/675

**Exercice 21 :**

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 3 boules rouges et 3 boules blanches.

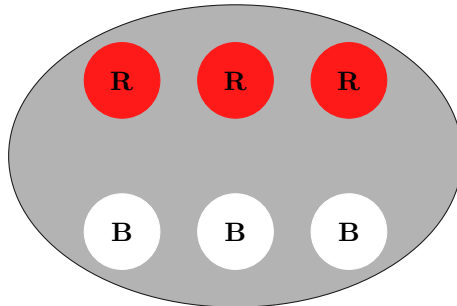
- Si la boule tirée est rouge, on gagne 5 points ;
- Si la boule tirée est blanche, on perd 2 points.

On répète cette expérience aléatoire 3 fois avec remise des boules tirées dans le sac avant de procéder à un nouveau tirage. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points gagnés ou perdus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

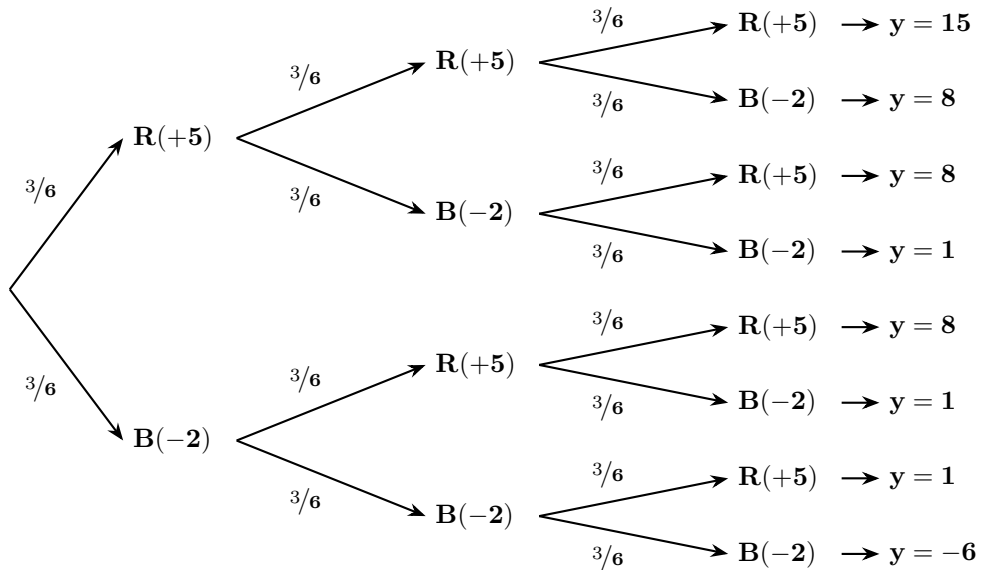
Le schéma suivant illustre un sac contenant 6 boules dont 3 rouges et 3 blanches :



Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule dans le sac et à la remettre dans celui-ci avant de procéder à un nouveau tirage. Cette expérience aléatoire est répétée 3 fois de suite et à chaque fois le tirage d'une boule rouge fait gagner 5 points et le tirage d'une boule blanche en fait perdre 2. Le total des points gagnés ou perdus est comptabilisé par la variable aléatoire  $Y$ .

1. Loi de probabilité de  $Y$  :

Afin d'établir la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$ , commençons par illustrer l'ensemble des possibilités à l'aide d'un arbre de décision :



Désignons par  $R_i$  l'événement "obtenir une boule rouge lors du tirage numéro  $i$ " et par  $B_i$  l'événement "obtenir une boule blanche lors du tirage numéro  $i$ ", avec  $i = 1, 2, 3$ . Selon cet arbre, la variable aléatoire  $Y$  peut prendre les valeurs -6, 1, 8 ou 15.

Il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la première possibilité  $y_i = -6$ ; celle qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ). Ainsi, la probabilité associée à cette possibilité est donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(B_1 B_2 B_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), puis une boule blanche lors du deuxième tirage sachant qu'une boule blanche a été tirée lors du premier tirage ( $B_2|B_1$ ) et enfin une boule blanche lors du troisième tirage sachant que des boules blanches ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $B_3|B_1 B_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -6) &= P(B_1 B_2 B_3) \\
 &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 B_2) \\
 &= \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Il y a 3 branches qui mènent vers la deuxième possibilité  $y_i = -6$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2B_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1B_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir  $y_i = -6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned} P(y_i = -6) &= P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(B_3|R_1B_2) + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(B_3|B_1R_2) \cdots \\ &\quad + P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(R_3|B_1B_2) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{182}{675} \end{aligned}$$

De la même manière, il y a 3 branches qui mènent vers la possibilité  $y_i = 0$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1R_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2R_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 0$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 0) = P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 0) &= P(R_1 R_2 B_3) + P(R_1 B_2 R_3) + P(B_1 R_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \times P(B_3 | R_1 R_2) + P(R_1) \times P(B_2 | R_1) \times P(R_3 | R_1 B_2) \cdots \\
 &\quad + P(B_1) \times P(R_2 | B_1) \times P(R_3 | B_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\
 &= \frac{185}{375}
 \end{aligned}$$

Enfin, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la dernière possibilité  $y_i = 6$  ; celle qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ). La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 6) = P(R_1 R_2 R_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), puis une boule rouge lors du deuxième tirage sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier tirage ( $R_2 | R_1$ ) et enfin une boule rouge lors du troisième tirage sachant que des boules rouges ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $R_3 | R_1 R_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 6) &= P(R_1 R_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \times P(R_3 | R_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Les résultats précédents sont récapitulés dans le tableau suivant :

$y_i$	-12	-6	0	6
$P(y_i)$	1/27	182/675	185/375	1/5

Notons au passage que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 P(y_i) &= \frac{1}{27} + \frac{182}{675} + \frac{185}{375} + \frac{1}{5} \\
 &= \frac{25}{675} + \frac{182}{675} + \frac{333}{675} + \frac{135}{675} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

Espérance mathématique  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = -\frac{282}{675} \approx -0.418$$

$y_i$	$P(y_i)$	$y_i P(y_i)$
-12	25/675	-300/675
-6	182/675	-1092/675
0	333/675	0/675
6	135/675	810/675
$\Sigma$	1	-282/675

Variance  $V(Y)$  :

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = \frac{15012}{675} = \frac{556}{25}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{556}{25} - \left(-\frac{282}{675}\right)^2 \approx 22.064$$

$y_i$	$y_i^2$	$P(y_i)$	$y_i^2 P(y_i)$
-12	144	25/675	3600/675
-6	36	182/675	6552/675
0	0	333/675	0/675
6	36	135/675	4860/675
$\Sigma$	-	1	15012/675

### Exercice 22 :

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 2 boules rouges et 4 boules blanches.

- Si la boule tirée est rouge, on gagne 4 points ;
- Si la boule tirée est blanche, on perd 2 points.

On répète cette expérience aléatoire 3 fois avec remise des boules tirées dans le sac avant de procéder à un nouveau tirage. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points gagnés ou perdus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Solution :

### Exercice 23 :

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 4 boules rouges et 2 boules blanches.

- Si la boule tirée est rouge, on gagne 2 points ;
- Si la boule tirée est blanche on perd 4 points.

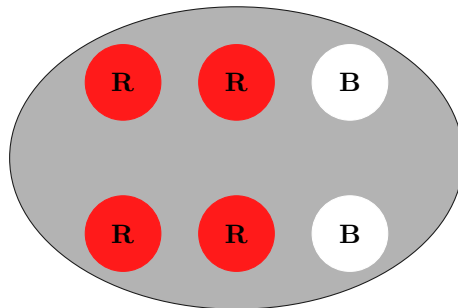
On répète cette expérience aléatoire 3 fois sans remettre les boules tirées dans le sac. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points obtenus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;

2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

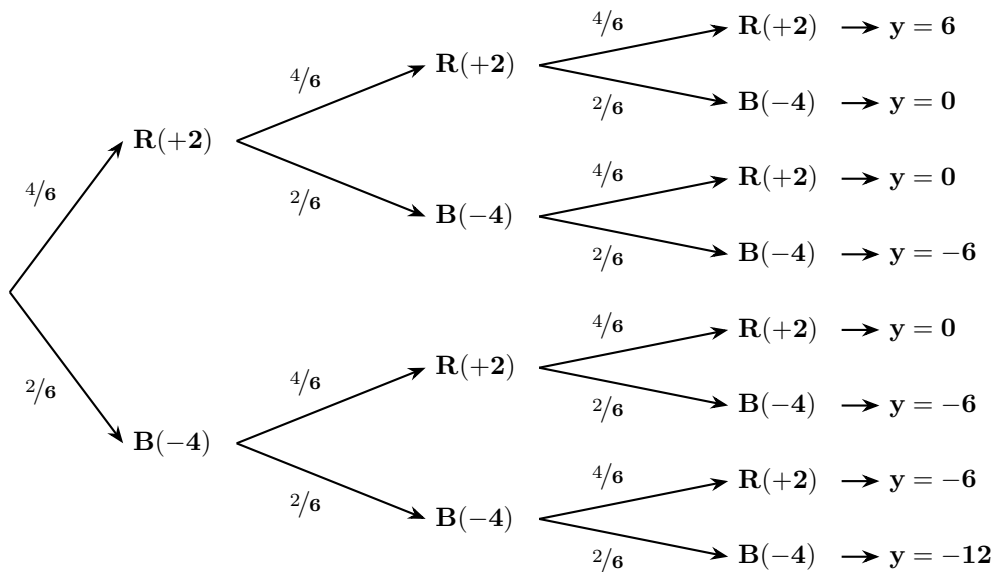
Le schéma suivant illustre un sac contenant 6 boules dont 4 rouges et 2 blanches :



Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule dans le sac et à la remettre dans celui-ci avant de procéder à un nouveau tirage. Cette expérience aléatoire est répétée 3 fois de suite et à chaque fois le tirage d'une boule rouge fait gagner 2 points et le tirage d'une boule blanche en fait perdre 4. Le total des points gagnés ou perdus est comptabilisé par la variable aléatoire  $Y$ .

1. Loi de probabilité de  $Y$  :

Afin d'établir la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$ , commençons par illustrer l'ensemble des possibilités à l'aide d'un arbre de décision :



Désignons par  $R_i$  l'événement "obtenir une boule rouge lors du tirage numéro  $i$ " et par  $B_i$  l'événement "obtenir une boule blanche lors du tirage numéro  $i$ ", avec  $i = 1, 2, 3$ . Selon cet arbre, la variable aléatoire  $Y$  peut prendre les valeurs -12, -6, 0 ou 6.

Il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la première possibilité  $y_i = -12$ ; celle qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ). Ainsi, la probabilité associée à cette possibilité est donnée par :

$$P(y_i = -12) = P(B_1 B_2 B_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), puis une boule blanche lors du deuxième tirage sachant qu'une boule blanche a été tirée lors du premier tirage ( $B_2|B_1$ ) et enfin une boule blanche lors du troisième tirage sachant que des boules blanches ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $B_3|B_1 B_2$ ) :

$$\begin{aligned} P(y_i = -12) &= P(B_1 B_2 B_3) \\ &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 B_2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Il y a 3 branches qui mènent vers la deuxième possibilité  $y_i = -6$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1 B_2 B_3)$ ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1 R_2 B_3)$ ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1 B_2 R_3)$ .

La probabilité d'obtenir  $y_i = -6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(R_1 B_2 B_3) + P(B_1 R_2 B_3) + P(B_1 B_2 R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -6) &= P(R_1 B_2 B_3) + P(B_1 R_2 B_3) + P(B_1 B_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(B_2 | R_1) \times P(B_3 | R_1 B_2) + P(B_1) \times P(R_2 | B_1) \times P(B_3 | B_1 R_2) \cdots \\
 &\quad + P(B_1) \times P(B_2 | B_1) \times P(R_3 | B_1 B_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \\
 &= \frac{182}{675}
 \end{aligned}$$

De la même manière, il y a 3 branches qui mènent vers la possibilité  $y_i = 0$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1 R_2 B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1 B_2 R_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1 R_2 R_3)$ .

La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 0$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 0) = P(R_1 R_2 B_3) + P(R_1 B_2 R_3) + P(B_1 R_2 R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 0) &= P(R_1 R_2 B_3) + P(R_1 B_2 R_3) + P(B_1 R_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \times P(B_3 | R_1 R_2) + P(R_1) \times P(B_2 | R_1) \times P(R_3 | R_1 B_2) \cdots \\
 &\quad + P(B_1) \times P(R_2 | B_1) \times P(R_3 | B_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\
 &= \frac{185}{375}
 \end{aligned}$$

Enfin, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la dernière possibilité  $y_i = 6$  ; celle qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ). La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 6) = P(R_1 R_2 R_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule rouge lors du

premier tirage ( $R_1$ ), puis une boule rouge lors du deuxième tirage sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier tirage ( $R_2|R_1$ ) et enfin une boule rouge lors du troisième tirage sachant que des boules rouges ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $R_3|R_1R_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 6) &= P(R_1R_2R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2|R_1) \times P(R_3|R_1R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Les résultats précédents sont récapitulés dans le tableau suivant :

$y_i$	-12	-6	0	6
$P(y_i)$	1/27	182/675	185/375	1/5

Notons au passage que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 P(y_i) &= \frac{1}{27} + \frac{182}{675} + \frac{185}{375} + \frac{1}{5} \\
 &= \frac{25}{675} + \frac{182}{675} + \frac{333}{675} + \frac{135}{675} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

**Remarque :** Étant donné que chaque boule tirée, indépendamment de sa couleur, est remise dans le sac avant de procéder au tirage suivant, il en résulte que les événements  $R_i$  et  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) précédemment définis sont indépendants. Rappelons que dans une telle situation, la probabilité jointe d'événements indépendants  $A$  et  $B$  est égale au produit de leurs probabilités marginales (i.e.  $P(AB) = P(A)P(B)$ ). En appliquant cette règle au cas présent, on retrouve les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -12) &= P(B_1B_2B_3) \\
 P(y_i = -6) &= P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3) \\
 P(y_i = 0) &= P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3) \\
 P(y_i = 6) &= P(R_1R_2R_3)
 \end{aligned}$$

2. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

Espérance mathématique  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = -\frac{282}{675} \approx -0.418$$

$y_i$	$P(y_i)$	$y_i P(y_i)$
-12	25/675	-300/675
-6	182/675	-1092/675
0	333/675	0/675
6	135/675	810/675
$\Sigma$	1	-282/675

Variance  $V(Y)$  :

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = \frac{15012}{675} = \frac{556}{25}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$= \frac{556}{25} - \left(-\frac{282}{675}\right)^2 \approx 22.064$$

$y_i$	$y_i^2$	$P(y_i)$	$y_i^2 P(y_i)$
-12	144	25/675	3600/675
-6	36	182/675	6552/675
0	0	333/675	0/675
6	36	135/675	4860/675
$\Sigma$	-	1	15012/675

### Exercice 24 :

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 3 boules rouges et 3 boules blanches.

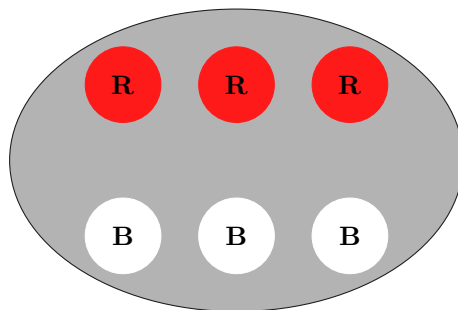
- Si la boule tirée est rouge, on gagne 5 points ;
- Si la boule tirée est blanche, on perd 2 points.

On répète cette expérience aléatoire 3 fois sans remettre les boules tirées dans le sac. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points obtenus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Solution :

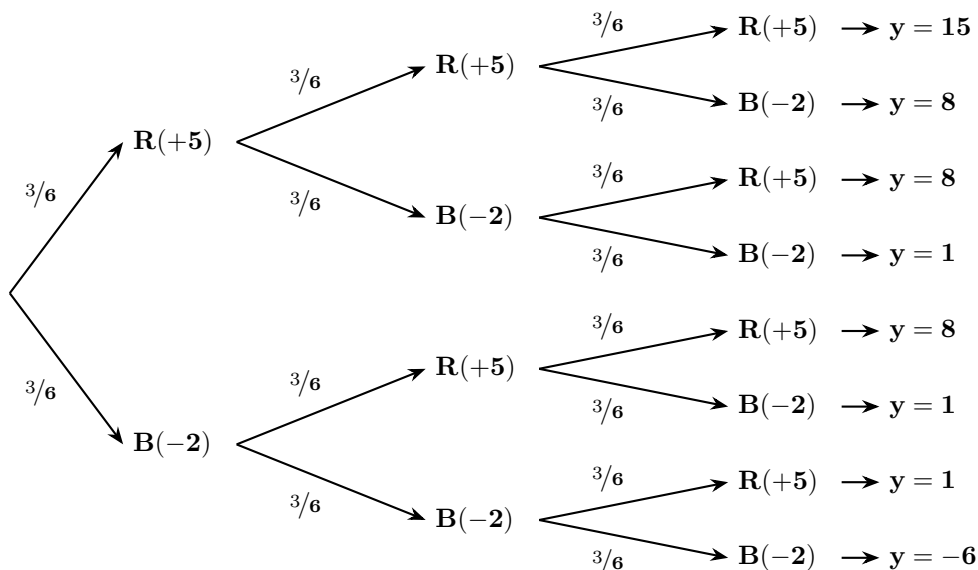
Le schéma suivant illustre un sac contenant 6 boules dont 3 rouges et 3 blanches :



Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule dans le sac et à la remettre dans celui-ci avant de procéder à un nouveau tirage. Cette expérience aléatoire est répétée 3 fois de suite et à chaque fois le tirage d'une boule rouge fait gagner 5 points et le tirage d'une boule blanche en fait perdre 2. Le total des points gagnés ou perdus est comptabilisé par la variable aléatoire  $Y$ .

1. Loi de probabilité de  $Y$  :

Afin d'établir la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$ , commençons par illustrer l'ensemble des possibilités à l'aide d'un arbre de décision :



Désignons par  $R_i$  l'événement "obtenir une boule rouge lors du tirage numéro  $i$ " et par  $B_i$  l'événement "obtenir une boule blanche lors du tirage numéro  $i$ ", avec  $i = 1, 2, 3$ . Selon cet arbre, la variable aléatoire  $Y$  peut prendre les valeurs -6, 1, 8 ou 15.

Il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la première possibilité  $y_i = -6$ ; celle qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ). Ainsi, la probabilité associée à cette possibilité est donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(B_1 B_2 B_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), puis une boule blanche lors du deuxième tirage sachant qu'une boule blanche a été tirée lors du premier tirage ( $B_2|B_1$ ) et enfin une boule blanche lors du troisième tirage sachant que des boules blanches ont été tirées lors du premier

et du deuxième tirages ( $B_3|B_1B_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -6) &= P(B_1B_2B_3) \\
 &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1B_2) \\
 &= \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Il y a 3 branches qui mènent vers la deuxième possibilité  $y_i = -6$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2B_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1B_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir  $y_i = -6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -6) &= P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(B_3|R_1B_2) + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(B_3|B_1R_2) \cdots \\
 &\quad + P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(R_3|B_1B_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \\
 &= \frac{182}{675}
 \end{aligned}$$

De la même manière, il y a 3 branches qui mènent vers la possibilité  $y_i = 0$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1R_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2R_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du

troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 0$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 0) = P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned} P(y_i = 0) &= P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(R_2|R_1) \times P(B_3|R_1R_2) + P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(R_3|R_1B_2) \cdots \\ &\quad + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(R_3|B_1R_2) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{185}{375} \end{aligned}$$

Enfin, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la dernière possibilité  $y_i = 6$  ; celle qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ). La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 6) = P(R_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), puis une boule rouge lors du deuxième tirage sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier tirage ( $R_2|R_1$ ) et enfin une boule rouge lors du troisième tirage sachant que des boules rouges ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $R_3|R_1R_2$ ) :

$$\begin{aligned} P(y_i = 6) &= P(R_1R_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(R_2|R_1) \times P(R_3|R_1R_2) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Les résultats précédents sont récapitulés dans le tableau suivant :

$y_i$	-12	-6	0	6
$P(y_i)$	1/27	182/675	185/375	1/5

Notons au passage que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 P(y_i) &= \frac{1}{27} + \frac{182}{675} + \frac{185}{375} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{25}{675} + \frac{182}{675} + \frac{333}{675} + \frac{135}{675} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

Espérance mathématique  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = -\frac{282}{675} \approx -0.418$$

$y_i$	$P(y_i)$	$y_i P(y_i)$
-12	25/675	-300/675
-6	182/675	-1092/675
0	333/675	0/675
6	135/675	810/675
$\Sigma$	1	-282/675

Variance  $V(Y)$  :

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = \frac{15012}{675} = \frac{556}{25} \\ V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \frac{556}{25} - \left(-\frac{282}{675}\right)^2 \approx 22.064\end{aligned}$$

$y_i$	$y_i^2$	$P(y_i)$	$y_i^2 P(y_i)$
-12	144	25/675	3600/675
-6	36	182/675	6552/675
0	0	333/675	0/675
6	36	135/675	4860/675
$\Sigma$	-	1	15012/675

### Exercice 25 :

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 2 boules rouges et 4 boules blanches.

- Si la boule tirée est rouge, on gagne 4 points ;
- Si la boule tirée est blanche, on perd 2 points.

On répète cette expérience aléatoire 3 fois sans remettre les boules tirées dans le sac. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points obtenus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

**Exercice 26 :**

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 4 boules rouges et 2 boules blanches.

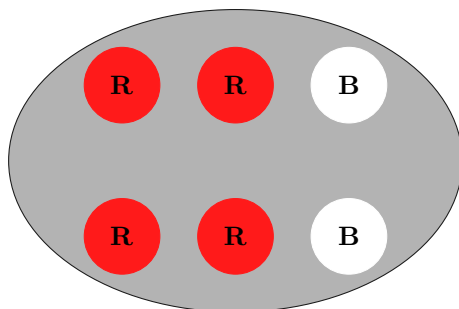
- Si la boule tirée est rouge, on gagne 2 points et on ne la remet pas dans le sac ;
- Si la boule tirée est blanche on perd 4 points puis on la replace dans le sac.

On répète cette expérience aléatoire 3 fois. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points obtenus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

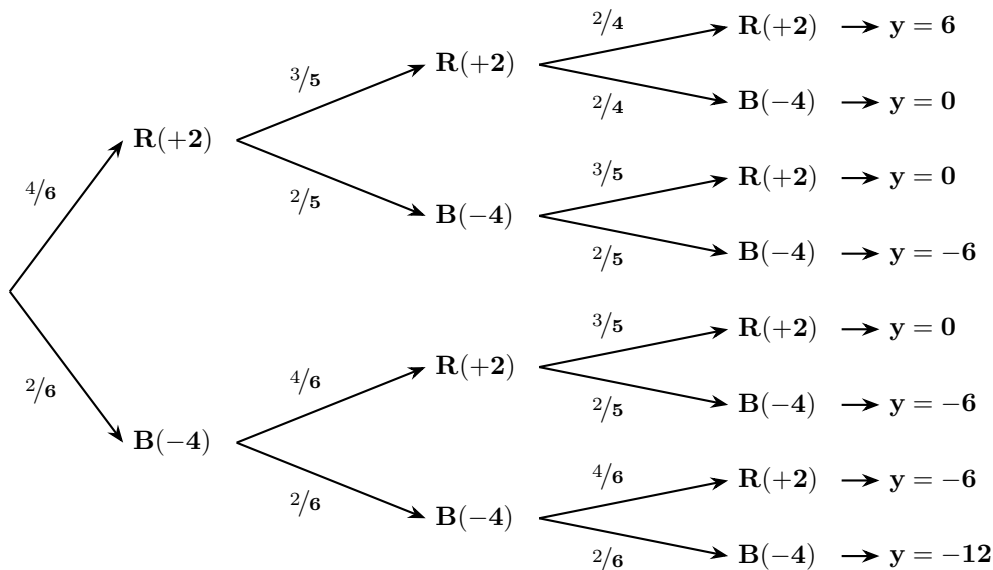
Le schéma suivant illustre un sac contenant 6 boules dont 4 rouges et 2 blanches :



Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule dans le sac et à ne la remettre dans celui-ci, avant de procéder à un nouveau tirage, que si elle est blanche. Cette expérience aléatoire est répétée 3 fois de suite et à chaque fois le tirage d'une boule rouge fait gagner 2 points et le tirage d'une boule blanche en fait perdre 4. Le total des points gagnés ou perdus est comptabilisé par la variable aléatoire  $Y$ .

1. Loi de probabilité de  $Y$  :

Afin d'établir la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$ , commençons par illustrer l'ensemble des possibilités à l'aide d'un arbre de décision :



Désignons par  $R_i$  l'événement "obtenir une boule rouge lors du tirage numéro  $i$ " et par  $B_i$  l'événement "obtenir une boule blanche lors du tirage numéro  $i$ ", avec  $i = 1, 2, 3$ . Selon cet arbre, la variable aléatoire  $Y$  peut prendre les valeurs -12, -6, 0 ou 6.

Il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la première possibilité  $y_i = -12$ ; celle qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ). Ainsi, la probabilité associée à cette possibilité est donnée par :

$$P(y_i = -12) = P(B_1 B_2 B_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), puis une boule blanche lors du deuxième tirage sachant qu'une boule blanche a été tirée lors du premier tirage ( $B_2|B_1$ ) et enfin une boule blanche lors du troisième tirage sachant que des boules blanches ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $B_3|B_1 B_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -12) &= P(B_1 B_2 B_3) \\
 &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 B_2) \\
 &= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \\
 &= \frac{1}{27}
 \end{aligned}$$

Il y a 3 branches qui mènent vers la deuxième possibilité  $y_i = -6$  :

— la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage

- ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2B_3)$  ;
  - la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1B_2R_3)$ .
- La probabilité d'obtenir  $y_i = -6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned} P(y_i = -6) &= P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(B_3|R_1B_2) + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(B_3|B_1R_2) \dots \\ &\quad + P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(R_3|B_1B_2) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{182}{675} \end{aligned}$$

De la même manière, il y a 3 branches qui mènent vers la possibilité  $y_i = 0$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1R_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2R_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 0$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 0) = P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 0) &= P(R_1 R_2 B_3) + P(R_1 B_2 R_3) + P(B_1 R_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \times P(B_3 | R_1 R_2) + P(R_1) \times P(B_2 | R_1) \times P(R_3 | R_1 B_2) \cdots \\
 &\quad + P(B_1) \times P(R_2 | B_1) \times P(R_3 | B_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\
 &= \frac{185}{375}
 \end{aligned}$$

Enfin, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la dernière possibilité  $y_i = 6$  ; celle qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ). La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 6) = P(R_1 R_2 R_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), puis une boule rouge lors du deuxième tirage sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier tirage ( $R_2 | R_1$ ) et enfin une boule rouge lors du troisième tirage sachant que des boules rouges ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $R_3 | R_1 R_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 6) &= P(R_1 R_2 R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \times P(R_3 | R_1 R_2) \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Les résultats précédents sont récapitulés dans le tableau suivant :

$y_i$	-12	-6	0	6
$P(y_i)$	1/27	182/675	185/375	1/5

Notons au passage que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 P(y_i) &= \frac{1}{27} + \frac{182}{675} + \frac{185}{375} + \frac{1}{5} \\
 &= \frac{25}{675} + \frac{182}{675} + \frac{333}{675} + \frac{135}{675} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

Espérance mathématique  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = -\frac{282}{675} \approx -0.418$$

$y_i$	$P(y_i)$	$y_i P(y_i)$
-12	25/675	-300/675
-6	182/675	-1092/675
0	333/675	0/675
6	135/675	810/675
$\Sigma$	1	-282/675

Variance  $V(Y)$  :

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = \frac{15012}{675} = \frac{556}{25}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{556}{25} - \left(-\frac{282}{675}\right)^2 \approx 22.064$$

$y_i$	$y_i^2$	$P(y_i)$	$y_i^2 P(y_i)$
-12	144	25/675	3600/675
-6	36	182/675	6552/675
0	0	333/675	0/675
6	36	135/675	4860/675
$\Sigma$	-	1	15012/675

**Exercice 27 :**

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 3 boules rouges et 3 boules blanches.

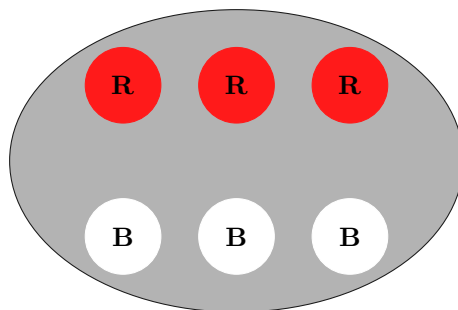
- Si la boule tirée est rouge, on gagne 5 points et on ne la remet pas dans le sac ;
- Si la boule tirée est blanche, on perd 2 points puis on la replace dans le sac.

On répète cette expérience aléatoire 3 fois. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points obtenus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

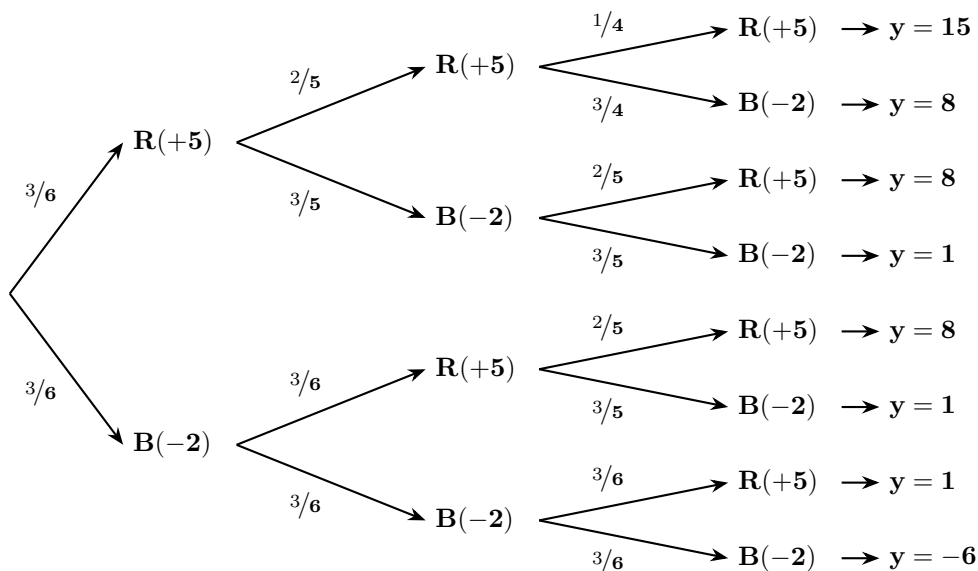
Le schéma suivant illustre un sac contenant 6 boules dont 3 rouges et 3 blanches :



Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule dans le sac et à ne la remettre dans celui-ci, avant de procéder à un nouveau tirage, que si elle est blanche. Cette expérience aléatoire est répétée 3 fois de suite et à chaque fois le tirage d'une boule rouge fait gagner 5 points et le tirage d'une boule blanche en fait perdre 2. Le total des points gagnés ou perdus est comptabilisé par la variable aléatoire  $Y$ .

1. Loi de probabilité de  $Y$  :

Afin d'établir la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$ , commençons par illustrer l'ensemble des possibilités à l'aide d'un arbre de décision :



Désignons par  $R_i$  l'événement "obtenir une boule rouge lors du tirage numéro  $i$ " et par  $B_i$  l'événement "obtenir une boule blanche lors du tirage numéro  $i$ ", avec  $i = 1, 2, 3$ . Selon cet arbre, la variable aléatoire  $Y$  peut prendre les valeurs -6, 1, 8 ou 15.

Il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la première possibilité  $y_i = -6$ ; celle qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ). Ainsi, la probabilité associée à cette possibilité est donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(B_1 B_2 B_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), puis une boule blanche lors du deuxième tirage sachant qu'une boule blanche a été tirée lors du premier tirage ( $B_2|B_1$ ) et enfin une boule blanche lors du troisième tirage sachant que des boules blanches ont été tirées lors du premier

et du deuxième tirages ( $B_3|B_1B_2$ ) :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = -6) &= P(B_1B_2B_3) \\
 &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1B_2) \\
 &= \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Il y a 3 branches qui mènent vers la deuxième possibilité  $y_i = 1$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2B_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1B_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir  $y_i = 1$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 1) = P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned}
 P(y_i = 1) &= P(R_1B_2B_3) + P(B_1R_2B_3) + P(B_1B_2R_3) \\
 &= P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(B_3|R_1B_2) + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(B_3|B_1R_2) \dots \\
 &\quad + P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(R_3|B_1B_2) \\
 &= \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \\
 &= \frac{91}{200}
 \end{aligned}$$

De la même manière, il y a 3 branches qui mènent vers la possibilité  $y_i = 8$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1R_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2R_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du

troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2R_3)$ .

La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 8$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 8) = P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned} P(y_i = 8) &= P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(R_2|R_1) \times P(B_3|R_1R_2) + P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(R_3|R_1B_2) \cdots \\ &\quad + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(R_3|B_1R_2) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{37}{100} \end{aligned}$$

Enfin, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la dernière possibilité  $y_i = 15$  ; celle qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ). La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 15$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 15) = P(R_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), puis une boule rouge lors du deuxième tirage sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier tirage ( $R_2|R_1$ ) et enfin une boule rouge lors du troisième tirage sachant que des boules rouges ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $R_3|R_1R_2$ ) :

$$\begin{aligned} P(y_i = 15) &= P(R_1R_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(R_2|R_1) \times P(R_3|R_1R_2) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Les résultats précédents sont récapitulés dans le tableau suivant :

$y_i$	-6	1	8	15
$P(y_i)$	1/8	91/200	37/100	1/20

Notons au passage que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 P(y_i) &= \frac{1}{8} + \frac{91}{200} + \frac{37}{100} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{25}{200} + \frac{91}{200} + \frac{74}{200} + \frac{10}{200} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

Espérance mathématique  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = \frac{683}{200} = 3.415$$

$y_i$	$P(y_i)$	$y_i P(y_i)$
-6	25/200	-150/200
1	91/200	91/200
8	74/200	592/200
15	10/200	150/200
$\Sigma$	1	683/200

Variance  $V(Y)$  :

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = \frac{7977}{200} \\ V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \frac{7977}{200} - \left(\frac{683}{200}\right)^2 \approx 28.223\end{aligned}$$

$y_i$	$y_i^2$	$P(y_i)$	$y_i^2 P(y_i)$
-6	36	25/200	900/200
1	1	91/200	91/200
8	64	74/200	4736/200
15	225	10/200	2250/200
$\Sigma$	-	1	7977/200

### Exercice 28 :

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 2 boules rouges et 4 boules blanches.

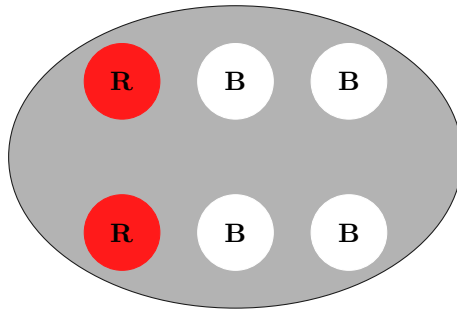
- Si la boule tirée est rouge, on gagne 4 points et on ne la remet pas dans le sac ;
- Si la boule tirée est blanche, on perd 2 points puis on la replace dans le sac.

On répète cette expérience aléatoire 3 fois. On considère la variable aléatoire  $Y$  donnant la somme algébrique des points obtenus après les 3 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Solution :

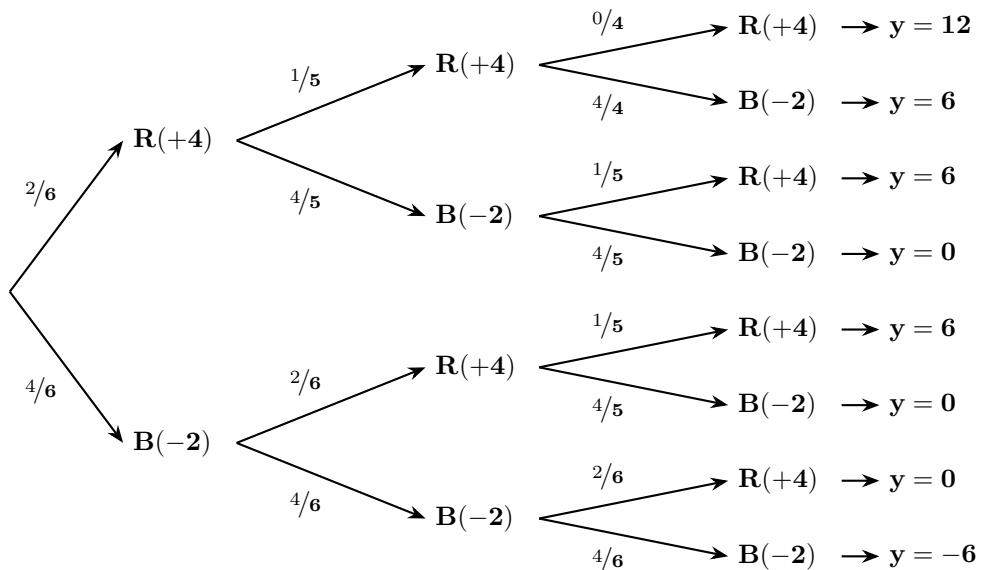
Le schéma suivant illustre un sac contenant 6 boules dont 2 rouges et 4 blanches :



Dans cet exercice, l'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule dans le sac et à ne la remettre dans celui-ci, avant de procéder à un nouveau tirage, que si elle est blanche. Cette expérience aléatoire est répétée 3 fois de suite et à chaque fois le tirage d'une boule rouge fait gagner 4 points et le tirage d'une boule blanche en fait perdre 2. Le total des points gagnés ou perdus est comptabilisé par la variable aléatoire  $Y$ .

1. Loi de probabilité de  $Y$  :

Afin d'établir la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$ , commençons par illustrer l'ensemble des possibilités à l'aide d'un arbre de décision :



Désignons par  $R_i$  l'événement "obtenir une boule rouge lors du tirage numéro  $i$ " et par  $B_i$  l'événement "obtenir une boule blanche lors du tirage numéro  $i$ ", avec  $i = 1, 2, 3$ . Selon cet arbre, la variable aléatoire  $Y$  peut prendre les valeurs -6, 0, 6 ou 12.

Il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la première possibilité  $y_i = -6$ ; celle qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ).

Ainsi, la probabilité associée à cette possibilité est donnée par :

$$P(y_i = -6) = P(B_1 B_2 B_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), puis une boule blanche lors du deuxième tirage sachant qu'une boule blanche a été tirée lors du premier tirage ( $B_2|B_1$ ) et enfin une boule blanche lors du troisième tirage sachant que des boules blanches ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $B_3|B_1 B_2$ ) :

$$\begin{aligned} P(y_i = -6) &= P(B_1 B_2 B_3) \\ &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 B_2) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Il y a 3 branches qui mènent vers la deuxième possibilité  $y_i = 0$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1 B_2 B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1 R_2 B_3)$  ;
- la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1 B_2 R_3)$ .

La probabilité d'obtenir  $y_i = 0$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 0) = P(R_1 B_2 B_3) + P(B_1 R_2 B_3) + P(B_1 B_2 R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned} P(y_i = 0) &= P(R_1 B_2 B_3) + P(B_1 R_2 B_3) + P(B_1 B_2 R_3) \\ &= P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(B_3|R_1 B_2) + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(B_3|B_1 R_2) \dots \\ &\quad + P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(R_3|B_1 B_2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{364}{675} \end{aligned}$$

De la même manière, il y a 3 branches qui mènent vers la possibilité  $y_i = 6$  :

- la première branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage

- ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule blanche lors du troisième tirage ( $B_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1R_2B_3)$  ;
- la deuxième branche qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule blanche lors du deuxième tirage ( $B_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(R_1B_2R_3)$  ;
  - la troisième branche qui consiste à tirer une boule blanche lors du premier tirage ( $B_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ), soit une probabilité  $P(B_1R_2R_3)$ .
- La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 6$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 6) = P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, on peut comme précédemment écrire :

$$\begin{aligned} P(y_i = 6) &= P(R_1R_2B_3) + P(R_1B_2R_3) + P(B_1R_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(R_2|R_1) \times P(B_3|R_1R_2) + P(R_1) \times P(B_2|R_1) \times P(R_3|R_1B_2) \dots \\ &\quad + P(B_1) \times P(R_2|B_1) \times P(R_3|B_1R_2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{37}{225} \end{aligned}$$

Enfin, il n'y a qu'une seule branche qui mène vers la dernière possibilité  $y_i = 12$  ; celle qui consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), une boule rouge lors du deuxième tirage ( $R_2$ ) et une boule rouge lors du troisième tirage ( $R_3$ ). La probabilité d'obtenir la possibilité  $y_i = 12$  est donc donnée par :

$$P(y_i = 12) = P(R_1R_2R_3)$$

De manière plus explicite, cette branche consiste à tirer une boule rouge lors du premier tirage ( $R_1$ ), puis une boule rouge lors du deuxième tirage sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier tirage ( $R_2|R_1$ ) et enfin une boule rouge lors du troisième tirage sachant que des boules rouges ont été tirées lors du premier et du deuxième tirages ( $R_3|R_1R_2$ ) :

$$\begin{aligned} P(y_i = 12) &= P(R_1R_2R_3) \\ &= P(R_1) \times P(R_2|R_1) \times P(R_3|R_1R_2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{0}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les résultats précédents sont récapitulés dans le tableau suivant :

$y_i$	-6	0	6	12
$P(y_i)$	8/27	364/675	37/225	0

Notons au passage que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 P(y_i) &= \frac{8}{27} + \frac{364}{675} + \frac{37}{225} + 0 \\ &= \frac{200}{675} + \frac{364}{675} + \frac{111}{675} + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

Espérance mathématique  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = -\frac{534}{675} \approx -0.791$$

$y_i$	$P(y_i)$	$y_i P(y_i)$
-6	200/675	-1200/675
0	364/675	0
6	111/675	666/675
12	0	0
$\Sigma$	1	-534/675

Variance  $V(Y)$  :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = \frac{11196}{675} \\ V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \frac{11196}{675} - \left(-\frac{534}{675}\right)^2 \approx 15.961 \end{aligned}$$

$y_i$	$y_i^2$	$P(y_i)$	$y_i^2 P(y_i)$
-6	36	200/675	7200/675
0	0	364/675	0
6	36	111/675	3996/675
12	144	0	0
$\Sigma$	-	1	11196/675

### Exercice 29 :

Une urne contient des boules : 2 jaunes, 4 rouges et 4 vertes. Un jeu consiste à tirer au hasard une boule. Si elle est rouge on gagne 10 dirhams, si elle est jaune on perd 5 dirhams, Si elle est verte on tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est rouge on gagne 8 dirhams, sinon on perd 4 dirhams. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de de la variable aléatoire X ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

**Exercice 30 :**

Une urne contient des boules : 2 jaunes, 2 rouges et 6 vertes. Un jeu consiste à tirer au hasard une boule. Si elle est verte on gagne 12 dirhams, si elle est jaune on perd 6 dirhams, Si elle est rouge on tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est verte on gagne 8 dirhams, sinon on perd 4 dirhams. Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de de la variable aléatoire  $X$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

**Exercice 31 :**

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules noires et 5 boules jaunes. On tire au hasard une boule. On considère comme succès "obtenir une boule noire".

1. Déterminer la loi de probabilité de de la variable aléatoire  $X$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

On répète cette expérience 3 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes. On s'intéresse à l'apparition des boules noires ou jaunes.

1. Déterminer la loi de probabilité de de la variable aléatoire  $X$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

**Exercice 32 :**

Une urne contient 5 boules blanches, 2 boules noires et 1 boule jaune. On tire au hasard une boule. On considère comme succès "obtenir une boule jaune ou noire".

1. Déterminer la loi de probabilité de de la variable aléatoire  $X$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

On répète cette expérience 3 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes. On s'intéresse à l'apparition des boules blanches.

1. Déterminer la loi de probabilité de de la variable aléatoire  $X$  ;
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

## 4.5 Exercice de synthèse

### Exercice 33 :

On tire au hasard une boule dans urne contenant 10 boules identiques numérotées de 1 à 10. On appelle résultat : « le numéro de la boule tirée ».

Soient les événements suivants :

- $E_1$  : « Le résultat est au plus égal à 5 » ;
- $E_2$  : « Le résultat est un nombre pair » ;
- $E_3$  : « Le résultat est un nombre impair ».

1. Écrire et représenter en termes de résultats de l'expérience les événements suivants :
  - a.  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et  $\Omega$ .
  - b.  $E_1 \cap E_2$ ,  $E_1 \cap E_3$ ,  $E_2 \cap E_3$  et  $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ .
  - c.  $E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cup E_3$ ,  $E_2 \cup E_3$  et  $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ .
  - d.  $(E_1 \cap E_2) \cup E_3$  et  $(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$ .
  - e.  $\overline{E_1 \cup E_2}$  et  $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$ .
  - f.  $\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}$ . Proposer une autre forme pour cet événement.
2. Représenter en termes d'opérations sur les événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ , les événements décrits ci-après :
  - a. Au moins un de ces événements se réalise.
  - b. Exactement un de ces événements se réalise.
  - c. Au plus deux de ces événements se réalisent.
  - d. Tous les événements se réalisent.
  - e. Aucun de ces événements ne se réalise.
3. Si chaque boule dans l'urne a la même probabilité d'être tirée, calculer la probabilité de chacun des événements décrits dans la question 1.
4. Si chaque boule a une probabilité d'être tirée proportionnelle au numéro qu'elle porte, calculer la probabilité de chacun des événements décrits dans la question 1.

### Solution :

1. Écriture et représentation en termes de résultats de l'expérience les événements suivants :
  - a.  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et  $\Omega$  :
    - $E_1 =$  " le résultat est au plus égal à 5", c'est à dire le résultat est égal à 1, 2, 3, 4 ou 5 :

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- $E_2 =$  " le résultat est un nombre pair", c'est à dire le résultat est égal à 2, 4, 6, 8 ou 10 :

$$E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

- $E_3 =$  " le résultat est un nombre impair", c'est à dire le résultat est égal à 1, 3, 5, 7 ou 9 :

$$E_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- $\Omega =$  " le résultat est un nombre de l'ensemble des possibilités", c'est à dire le résultat est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

b.  $E_1 \cap E_2$ ,  $E_1 \cap E_3$ ,  $E_2 \cap E_3$  et  $E_1 \cap E_2 \cap E_3$  :

- $E_1 \cap E_2 =$  " le résultat est un nombre pair ( $E_2$ ) et au plus égal à 5 ( $E_1$ )", c'est à dire le résultat est égal à 2 ou 4 :

$$E_1 \cap E_2 = \{2, 4\}$$

- $E_1 \cap E_3 =$  " le résultat est un nombre impair ( $E_3$ ) et au plus égal à 5 ( $E_1$ )", c'est à dire le résultat est égal à 1, 3 ou 5 :

$$E_1 \cap E_3 = \{1, 3, 5\}$$

- $E_2 \cap E_3 =$  " le résultat est un nombre pair ( $E_2$ ) et impair ( $E_3$ )", ceci est **impossible** puisqu'un nombre ne peut être en même temps pair et impair :

$$E_2 \cap E_3 = \emptyset$$

- $E_1 \cap E_2 \cap E_3 =$  " le résultat est un nombre pair ( $E_2$ ) et impair ( $E_3$ ) et au plus égal à 5 ( $E_1$ )", ceci est **impossible** puisqu'un nombre (au plus égal à 5) ne peut être en même temps pair et impair :

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = E_1 \cap \emptyset = \emptyset$$

c.  $E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cup E_3$ ,  $E_2 \cup E_3$  et  $E_1 \cup E_2 \cup E_3$  :

- $E_1 \cup E_2 =$  " le résultat est un nombre pair ( $E_2$ ) ou au plus égal à 5 ( $E_1$ )", c'est à dire le résultat est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 10 :

$$E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

- $E_1 \cup E_3 =$  " le résultat est un nombre impair ( $E_3$ ) ou au plus égal à 5 ( $E_1$ )",

c'est à dire le résultat est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 7, ou 9 :

$$E_1 \cup E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

- $E_2 \cup E_3 =$  " le résultat est un nombre pair ( $E_2$ ) **ou** impair ( $E_3$ )", c'est à dire le résultat est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 :

$$E_2 \cup E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \Omega$$

- $E_1 \cup E_2 \cup E_3 =$  " le résultat est un nombre pair ( $E_2$ ) **ou** impair ( $E_3$ ) **ou** au plus égal à 5 ( $E_1$ )", c'est à dire le résultat est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 :

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = E_1 \cup \Omega = \Omega$$

d.  $(E_1 \cap E_2) \cup E_3$  et  $(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$  :

- $(E_1 \cap E_2) \cup E_3$  :

L'union des ensembles étant distributive par rapport à l'intersection, il en résulte :

$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3) \quad (4.120)$$

Or,  $E_2 \cup E_3 = \Omega$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} (E_1 \cap E_2) \cup E_3 &= (E_1 \cup E_3) \cap \Omega \\ &= E_1 \cup E_3 \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

- $(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$  :

D'après (4.120), on conclut :

$$(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

e.  $\overline{E_1 \cup E_2}$  et  $\overline{E_1 \cap E_2}$  :

- $\overline{E_1 \cup E_2}$  : En vertu des lois de Morgan, on a :

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

Or,  $\overline{E_2} = E_3$ , on a alors :

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap E_3$$

Comme  $\overline{E_1} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ , on en déduit que  $\overline{E_1 \cup E_2}$  est l'ensemble des

résultats impairs au moins égaux à 6, c'est à dire 7 ou 9 :

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \{7, 9\}$$

- $\overline{E_1 \cap E_2}$  : De la même manière, en vertu des lois de Morgan, on a :

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$

Or,  $\overline{E_2} = E_3$ , on a alors :

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup E_3$$

Comme  $\overline{E_1} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ , on en déduit que  $\overline{E_1 \cap E_2}$  est l'ensemble des résultats impairs ou des résultats au moins égaux à 6, c'est à dire 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 :

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

f.  $\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}$  :

En vertu des lois de Morgan, on peut écrire :

$$\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3} = \overline{E_1 \cap E_2 \cap E_3}$$

Or, d'après la question 1.b, on a  $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \emptyset$ , d'où :

$$\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3} = \overline{\emptyset} = \Omega$$

Alternativement, on a :

$$\begin{aligned} \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3} &= \overline{E_1} \cup (\overline{E_2} \cup \overline{E_3}) \\ &= \overline{E_1} \cup (E_3 \cup E_2) \\ &= \overline{E_1} \cup \Omega \\ &= \Omega \end{aligned}$$

2. Représentation en termes d'opérations sur les événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ , les événements décrits ci-après :

a. Au moins un des événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  se réalise signifie que :

— Ou bien un seul événement se réalise sans que les deux autres se réalisent :

- Ou bien l'événement  $E_1$  se réalise et les événements  $E_2$  et  $E_3$  ne se réalisent

pas :  $E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$

$$\begin{aligned} E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} &= E_1 \cap (\overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \\ &= E_1 \cap \overline{(E_2 \cup E_3)} \\ &= E_1 \cap \overline{\Omega} \\ &= E_1 \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

- Ou bien l'événement  $E_2$  se réalise et les événements  $E_1$  et  $E_3$  ne se réalisent pas :  $E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3}$

$$\begin{aligned} E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3} &= E_2 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \\ &= E_2 \cap E_2 \cap \overline{E_1} \\ &= (E_2 \cap E_2) \cap \overline{E_1} \\ &= E_2 \cap \overline{E_1} \end{aligned}$$

- Ou bien l'événement  $E_3$  se réalise et les événements  $E_1$  et  $E_2$  ne se réalisent pas :  $E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

$$\begin{aligned} E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} &= E_3 \cap \overline{E_1} \cap E_3 \\ &= E_3 \cap E_3 \cap \overline{E_1} \\ &= (E_3 \cap E_3) \cap \overline{E_1} \\ &= E_3 \cap \overline{E_1} \end{aligned}$$

— Ou bien deux événements se réalisent sans que le troisième se réalise :

- Ou bien les événements  $E_1$  et  $E_2$  se réalisent et l'événement  $E_3$  ne se réalise pas :  $E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3} &= E_1 \cap E_2 \cap E_2 \\ &= E_1 \cap (E_2 \cap E_2) \\ &= E_1 \cap E_2 \end{aligned}$$

- Ou bien les événements  $E_1$  et  $E_3$  se réalisent et l'événement  $E_2$  ne se réalise pas :  $E_1 \cap E_3 \cap \overline{E_2}$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_3 \cap \overline{E_2} &= E_1 \cap E_3 \cap E_3 \\ &= E_1 \cap (E_3 \cap E_3) \\ &= E_1 \cap E_3 \end{aligned}$$

- Ou bien les événements  $E_2$  et  $E_3$  se réalisent et l'événement  $E_1$  ne se réalise pas :  $E_2 \cap E_3 \cap \overline{E_1}$

$$\begin{aligned} E_2 \cap E_3 \cap \overline{E_1} &= (E_2 \cap E_3) \cap \overline{E_1} \\ &= \emptyset \cap \overline{E_1} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

- Ou bien les trois événements se réalisent en même temps :  $E_1 \cap E_2 \cap E_3$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 \cap E_3 &= E_1 \cap (E_2 \cap E_3) \\ &= E_1 \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} [(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})] \cup [(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (E_1 \cap E_3 \cap \overline{E_2}) \cup (E_2 \cap E_3 \cap \overline{E_1})] \\ = [\emptyset \cup (E_2 \cap \overline{E_1}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1})] \cup [(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \cup \emptyset] \cup \emptyset \\ = [(E_2 \cap \overline{E_1}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1})] \cup [(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)] \\ = [(E_2 \cup E_3) \cap \overline{E_1}] \cup [E_1 \cap (E_2 \cup E_3)] \\ = [\Omega \cap \overline{E_1}] \cup [E_1 \cap \Omega] \\ = \overline{E_1} \cup E_1 \\ = \Omega \end{aligned}$$

Vérification :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

- Le tirage de la boule numéro 1 réalise les événements  $E_1$  et  $E_3$  ;
- Le tirage de la boule numéro 2 réalise les événements  $E_1$  et  $E_2$  ;
- Le tirage de la boule numéro 3 réalise les événements  $E_1$  et  $E_3$  ;
- Le tirage de la boule numéro 4 réalise les événements  $E_1$  et  $E_2$  ;
- Le tirage de la boule numéro 5 réalise les événements  $E_1$  et  $E_3$  ;
- Le tirage de la boule numéro 6 réalise l'événement  $E_2$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 7 réalise l'événement  $E_3$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 8 réalise l'événement  $E_2$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 9 réalise l'événement  $E_3$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 10 réalise l'événement  $E_2$  uniquement.

Ainsi, le tirage d'une boule prenant un numéro dans  $\Omega$  réalise au moins un des événements  $E_1$ ,  $E_2$  ou  $E_3$ .

b. Exactement un de ces événements se réalise :

- Ou bien l'événement  $E_1$  se réalise et les événements  $E_2$  et  $E_3$  ne se réalisent

pas :  $E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$

$$\begin{aligned} E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} &= E_1 \cap (\overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \\ &= E_1 \cap \overline{(E_2 \cup E_3)} \\ &= E_1 \cap \overline{\Omega} \\ &= E_1 \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

— Ou bien l'événement  $E_2$  se réalise et les événements  $E_1$  et  $E_3$  ne se réalisent

pas :  $E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3}$

$$\begin{aligned} E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3} &= E_2 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \\ &= E_2 \cap E_2 \cap \overline{E_1} \\ &= (E_2 \cap E_2) \cap \overline{E_1} \\ &= E_2 \cap \overline{E_1} \end{aligned}$$

— Ou bien l'événement  $E_3$  se réalise et les événements  $E_1$  et  $E_2$  ne se réalisent

pas :  $E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

$$\begin{aligned} E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} &= E_3 \cap \overline{E_1} \cap E_3 \\ &= E_3 \cap E_3 \cap \overline{E_1} \\ &= (E_3 \cap E_3) \cap \overline{E_1} \\ &= E_3 \cap \overline{E_1} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} (E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) &= \emptyset \cup (E_2 \cap \overline{E_1}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1}) \\ &= (E_2 \cap \overline{E_1}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1}) \\ &= (E_2 \cup E_3) \cap \overline{E_1} \\ &= \Omega \cap \overline{E_1} \\ &= \overline{E_1} \end{aligned}$$

Vérification :  $\overline{E_1} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

- Le tirage de la boule numéro 6 réalise l'événement  $E_2$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 7 réalise l'événement  $E_3$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 8 réalise l'événement  $E_2$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 9 réalise l'événement  $E_3$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 10 réalise l'événement  $E_2$  uniquement.

Ainsi, le tirage d'une boule prenant un numéro dans  $\overline{E_1}$  réalise exactement un des événements  $E_1$ ,  $E_2$  ou  $E_3$ .

c. Au plus deux de ces événements se réalisent :

— Ou bien aucun événement ne se réalise :  $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$

$$\begin{aligned}\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} &= \overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3} \\ &= \overline{E_1 \cup (E_2 \cup E_3)} \\ &= \overline{E_1} \cap \overline{\Omega} \\ &= \overline{\Omega} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

— Ou bien un seul événement se réalise :

• L'événement  $E_1$  réalise et les événements  $E_2$  et  $E_3$  ne se réalisent pas :

$$E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$$

$$\begin{aligned}E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} &= E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_2 \\ &= E_1 \cap (\overline{E_2} \cap E_2) \\ &= E_1 \cap \emptyset \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

• L'événement  $E_2$  réalise et les événements  $E_1$  et  $E_3$  ne se réalisent pas :

$$E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3}$$

$$\begin{aligned}E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3} &= E_2 \cap \overline{E_1} \cap E_2 \\ &= E_2 \cap E_2 \cap \overline{E_1} \\ &= (E_2 \cap E_2) \cap \overline{E_1} \\ &= E_2 \cap \overline{E_1}\end{aligned}$$

• L'événement  $E_3$  réalise et les événements  $E_1$  et  $E_2$  ne se réalisent pas :

$$E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

$$\begin{aligned}E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2} &= E_3 \cap \overline{E_1} \cap E_3 \\ &= E_3 \cap E_3 \cap \overline{E_1} \\ &= (E_3 \cap E_3) \cap \overline{E_1} \\ &= E_3 \cap \overline{E_1}\end{aligned}$$

— Ou bien deux événements se réalisent :

• Les événements  $E_1$  et  $E_2$  se réalisent et l'événement  $E_3$  ne se réalise pas :

$$E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}$$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3} &= E_1 \cap E_2 \cap E_2 \\ &= E_1 \cap (E_2 \cap E_2) \\ &= E_1 \cap E_2 \end{aligned}$$

- Les événements  $E_1$  et  $E_3$  se réalisent et l'événement  $E_2$  ne se réalise pas :  
 $E_1 \cap E_3 \cap \overline{E_2}$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_3 \cap \overline{E_2} &= E_1 \cap E_3 \cap E_3 \\ &= E_1 \cap (E_3 \cap E_3) \\ &= E_1 \cap E_3 \end{aligned}$$

- Les événements  $E_2$  et  $E_3$  se réalisent et l'événement  $E_1$  ne se réalise pas :  
 $E_2 \cap E_3 \cap \overline{E_1}$

$$\begin{aligned} E_2 \cap E_3 \cap \overline{E_1} &= (E_2 \cap E_3) \cap \overline{E_1} \\ &= \emptyset \cap \overline{E_1} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} &[\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}] \cup [(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (E_2 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_3}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})] \cup [(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (E_1 \cap E_3 \cap \overline{E_2})] \\ &= \emptyset \cup [\emptyset \cup (E_2 \cap \overline{E_1}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1})] \cup [(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \cup \emptyset] \\ &= [(E_2 \cap \overline{E_1}) \cup (E_3 \cap \overline{E_1})] \cup [(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)] \\ &= [(E_2 \cup E_3) \cap \overline{E_1}] \cup [E_1 \cap (E_2 \cup E_3)] \\ &= [\Omega \cap \overline{E_1}] \cup [E_1 \cap \Omega] \\ &= \overline{E_1} \cup E_1 \\ &= \Omega \end{aligned}$$

Vérification :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

- Le tirage de la boule numéro 1 réalise les événements  $E_1$  et  $E_3$  ;
- Le tirage de la boule numéro 2 réalise les événements  $E_1$  et  $E_2$  ;
- Le tirage de la boule numéro 3 réalise les événements  $E_1$  et  $E_3$  ;
- Le tirage de la boule numéro 4 réalise les événements  $E_1$  et  $E_2$  ;
- Le tirage de la boule numéro 5 réalise les événements  $E_1$  et  $E_3$  ;
- Le tirage de la boule numéro 6 réalise l'événement  $E_2$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 7 réalise l'événement  $E_3$  uniquement ;
- Le tirage de la boule numéro 8 réalise l'événement  $E_2$  uniquement ;

- Le tirage de la boule numéro 9 réalise l'événement  $E_3$  uniquement ;
  - Le tirage de la boule numéro 10 réalise l'événement  $E_2$  uniquement.
- Ainsi, le tirage d'une boule prenant un numéro dans  $\Omega$  réalise au plus deux des événements  $E_1$ ,  $E_2$  ou  $E_3$ .

d. Tous les événements se réalisent :  $E_1 \cap E_2 \cap E_3$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 \cap E_3 &= E_1 \cap (E_2 \cap E_3) \\ &= E_1 \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Conclusion : Il n'y a aucun numéro pouvant être en même temps pair (événement  $E_2$ ), impair (événement  $E_3$ ) et au plus égal à 5 (événement  $E_1$ ).

e. Aucun de ces événements ne se réalise :  $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$

$$\begin{aligned} \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} &= \overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3} \\ &= \overline{E_1 \cup (E_2 \cup E_3)} \\ &= \overline{E_1 \cup \Omega} \\ &= \overline{\Omega} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Conclusion : Il n'y a pas de numéro ne pouvant être pair (événement  $E_2$ ) ou impair (événement  $E_3$ ) ou au plus égal à 5 (événement  $E_1$ ).

3. Probabilité de chacun des événements décrits dans la question 1 si chaque boule dans l'urne a la même probabilité d'être tirée :

a.  $P(E_1)$ ,  $P(E_2)$ ,  $P(E_3)$  et  $P(\Omega)$  :

- $P(E_1)$  avec  $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  :

$$P(E_1) = \frac{\text{card}(E_1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- $P(E_2)$  avec  $E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  :

$$P(E_2) = \frac{\text{card}(E_2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- $P(E_3)$  avec  $E_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  :

$$P(E_3) = \frac{\text{card}(E_3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- $P(\Omega)$  avec  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  :

$$P(\Omega) = \frac{\text{card}(\Omega)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{10} = 1$$

$\Omega$  est un événement certain.

- b.  $P(E_1 \cap E_2)$ ,  $P(E_1 \cap E_3)$ ,  $P(E_2 \cap E_3)$  et  $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$  :

- $P(E_1 \cap E_2)$  avec  $E_1 \cap E_2 = \{2, 4\}$  :

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{card}(E_1 \cap E_2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

- $P(E_1 \cap E_3)$  avec  $E_1 \cap E_3 = \{1, 3, 5\}$  :

$$P(E_1 \cap E_3) = \frac{\text{card}(E_1 \cap E_3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{10}$$

- $P(E_2 \cap E_3)$  avec  $E_2 \cap E_3 = \emptyset$  :

$$P(E_2 \cap E_3) = \frac{\text{card}(E_2 \cap E_3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{0}{10} = 0$$

$E_2 \cap E_3$  est un événement impossible puisqu'un nombre ne peut être en même temps pair (événement  $E_2$ ) et impair (événement  $E_3$ ).

- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$  avec  $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \emptyset$  :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\text{card}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{0}{10} = 0$$

$E_1 \cap E_2 \cap E_3$  est un événement impossible puisqu'un nombre ne peut être en même temps pair (événement  $E_2$ ), impair (événement  $E_3$ ) et au plus égal à 5 (événement  $E_1$ ).

- c.  $P(E_1 \cup E_2)$ ,  $P(E_1 \cup E_3)$ ,  $P(E_2 \cup E_3)$  et  $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  :

- $P(E_1 \cup E_2)$  :

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

- $P(E_1 \cup E_3)$  :

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_3) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

- $P(E_2 \cup E_3)$  :

$$P(E_2 \cup E_3) = P(E_2) + P(E_3) - P(E_2 \cap E_3) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - 0 = \frac{10}{10} = 1$$

Alternativement,

$$P(E_2 \cup E_3) = P(\Omega) = 1$$

- $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  :

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + \\ &= \frac{5}{10} + \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} - \frac{3}{10} - \frac{0}{10} + \frac{0}{10} = \frac{10}{10} = 1 \end{aligned}$$

Alternativement,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(\Omega) = 1$$

- d.  $P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3]$  et  $P[(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)]$  :

- $P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3]$  :

$$P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3] = P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} + 0 = \frac{7}{10}$$

- $P[(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)]$  :

$$P[(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)] = P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3] = \frac{7}{10}$$

- e.  $P(\overline{E_1 \cup E_2})$  et  $P(\overline{E_1 \cap E_2})$  :

- $P(\overline{E_1 \cup E_2})$  :

$$P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

- $P(\overline{E_1 \cap E_2})$  :

$$P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - P(E_1 \cap E_2) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

- f.  $P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3})$  :

$$\begin{aligned} P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}) &= P(\overline{E_1}) + P(\overline{E_2}) + P(\overline{E_3}) - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_3}) - P(\overline{E_2} \cap \overline{E_3}) + P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \\ &= [1 - P(E_1)] + [1 - P(E_2)] + [1 - P(E_3)] - P(\overline{E_1 \cup E_2}) - P(\overline{E_1 \cup E_3}) - P(\overline{E_2 \cup E_3}) + P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3}) \\ &= [1 - P(E_1)] + [1 - P(E_2)] + [1 - P(E_3)] - [1 - P(E_1 \cup E_2)] - [1 - P(E_1 \cup E_3)] - [1 - P(E_2 \cup E_3)] \\ &\quad + [1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)] \\ &= \left[1 - \frac{5}{10}\right] + \left[1 - \frac{5}{10}\right] + \left[1 - \frac{5}{10}\right] - \left[1 - \frac{8}{10}\right] - \left[1 - \frac{7}{10}\right] - [1 - 1] + [1 - 1] \\ &= \frac{5}{10} + \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} - \frac{3}{10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alternativement,

$$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}) = P(\overline{E_1 \cap E_2 \cap E_3}) = 1 - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1 - P(\emptyset) = 1 - 0 = 1$$

4. Probabilité de chacun des événements décrits dans la question 1 si chaque boule a une probabilité d'être tirée proportionnelle au numéro qu'elle porte :

Soit l'événement  $B_i$  = "tirer la boule numéro  $i$ ", avec  $i = 1, 2, \dots, 10$  et  $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$ . La probabilité de tirer la boule numéro  $i$  est proportionnelle au numéro qu'elle porte signifie qu'il existe un nombre réel  $a$  tel que  $P(B_i) = i.a$ . Ainsi,  $P(B_1) = a, P(B_2) = 2a, \dots, P(B_{10}) = 10a$ .

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_{10}) = 1$$

$$a + 2a + \dots + 10a = 1$$

$$a(1 + 2 + \dots + 10) = 1$$

$$55a = 1$$

$$a = \frac{1}{55}$$

Ainsi,  $P(B_1) = \frac{1}{55}, P(B_2) = \frac{2}{55}, \dots, P(B_{10}) = \frac{10}{55}$ .

Ainsi, les ensembles  $E_1, E_2, E_3$  et  $\Omega$  peuvent être partitionnés comme suit :

$$- E_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$$

$$- E_2 = B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup B_8 \cup B_{10}$$

$$- E_3 = B_1 \cup B_3 \cup B_5 \cup B_7 \cup B_9$$

$$- \Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_9 \cup B_{10}$$

a.  $P(E_1), P(E_2), P(E_3)$  et  $P(\Omega)$  :

- $P(E_1)$  :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) \\ &= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} + \frac{5}{55} \\ &= \frac{15}{55} \\ &= \frac{3}{11} \end{aligned}$$

- $P(E_2)$  :

$$\begin{aligned}
 P(E_2) &= P(B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup B_8 \cup B_{10}) \\
 &= P(B_2) + P(B_4) + P(B_6) + P(B_8) + P(B_{10}) \\
 &= \frac{2}{55} + \frac{4}{55} + \frac{6}{55} + \frac{8}{55} + \frac{10}{55} \\
 &= \frac{30}{55} \\
 &= \frac{6}{11}
 \end{aligned}$$

- $P(E_3)$  :

$$\begin{aligned}
 P(E_3) &= P(B_1 \cup B_3 \cup B_5 \cup B_7 \cup B_9) \\
 &= P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) + P(B_7) + P(B_9) \\
 &= \frac{1}{55} + \frac{3}{55} + \frac{5}{55} + \frac{7}{55} + \frac{9}{55} \\
 &= \frac{25}{55} \\
 &= \frac{5}{11}
 \end{aligned}$$

- $P(\Omega)$  :

$$\begin{aligned}
 P(\Omega) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_9 \cup B_{10}) \\
 &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) + P(B_7) + P(B_8) + P(B_9) + P(B_{10}) \\
 &= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} + \frac{5}{55} + \frac{6}{55} + \frac{7}{55} + \frac{8}{55} + \frac{9}{55} + \frac{10}{55} \\
 &= \frac{55}{55} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

b.  $P(E_1 \cap E_2)$ ,  $P(E_1 \cap E_3)$ ,  $P(E_2 \cap E_3)$  et  $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$  :

- $P(E_1 \cap E_2)$  :

$$P(E_1 \cap E_2) = P(B_2 \cup B_4) = P(B_2) + P(B_4) = \frac{2}{55} + \frac{4}{55} = \frac{6}{55}$$

- $P(E_1 \cap E_3)$  :

$$P(E_1 \cap E_3) = P(B_1 \cup B_3 \cup B_5) = P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) = \frac{1}{55} + \frac{3}{55} + \frac{5}{55} = \frac{9}{55}$$

- $P(E_2 \cap E_3)$  :

$$P(E_2 \cap E_3) = P(\emptyset) = 0$$

- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$  :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\emptyset) = 0$$

c.  $P(E_1 \cup E_2)$ ,  $P(E_1 \cup E_3)$ ,  $P(E_2 \cup E_3)$  et  $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  :

- $P(E_1 \cup E_2)$  :

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_8 \cup B_{10}) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) + P(B_8) + P(B_{10}) \\ &= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} + \frac{5}{55} + \frac{6}{55} + \frac{8}{55} + \frac{10}{55} \\ &= \frac{39}{55} \end{aligned}$$

- $P(E_1 \cup E_3)$  :

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_3) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_7 \cup B_9) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_7) + P(B_9) \\ &= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} + \frac{5}{55} + \frac{7}{55} + \frac{9}{55} \\ &= \frac{31}{55} \end{aligned}$$

- $P(E_2 \cup E_3)$  :

$$\begin{aligned} P(E_2 \cup E_3) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_9 \cup B_{10}) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) + P(B_7) + P(B_8) + P(B_9) + P(B_{10}) \\ &= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} + \frac{5}{55} + \frac{6}{55} + \frac{7}{55} + \frac{8}{55} + \frac{9}{55} + \frac{10}{55} \\ &= \frac{55}{55} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alternativement,

$$P(E_2 \cup E_3) = P(\Omega) = 1$$

- $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  :

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_9 \cup B_{10}) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) + P(B_7) + P(B_8) + P(B_9) + P(B_{10}) \\ &= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} + \frac{5}{55} + \frac{6}{55} + \frac{7}{55} + \frac{8}{55} + \frac{9}{55} + \frac{10}{55} \\ &= \frac{55}{55} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alternativement,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(\Omega) = 1$$

d.  $P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3]$  et  $P[(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)]$  :

- $P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3]$  :

$$P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3] = P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{6}{55} + \frac{25}{55} - 0 = \frac{31}{55}$$

- $P[(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)]$  :

$$P[(E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)] = P[(E_1 \cap E_2) \cup E_3] = \frac{31}{55}$$

e.  $P(\overline{E_1 \cup E_2})$  et  $P(\overline{E_1 \cap E_2})$  :

- $P(\overline{E_1 \cup E_2})$  :

$$P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \frac{39}{55} = \frac{16}{55}$$

- $P(\overline{E_1 \cap E_2})$  :

$$P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - P(E_1 \cap E_2) = 1 - \frac{6}{55} = \frac{49}{55}$$

f.  $P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3})$  :

$$P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3}) = P(\overline{E_1 \cap E_2 \cap E_3}) = 1 - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1 - P(\emptyset) = 1 - 0 = 1$$

## 4.6 Divers

### Exercice 34 :

Les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  sont déterminés par trois jets d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. L'équation admet deux racines réelles distinctes.
2. L'équation admet une racine réelle double.
3. L'équation n'admet pas de racines réelles.

### Solution :

Le nombre de racines réelles de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  dépend du signe du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Si  $\Delta > 0$  alors l'équation admet deux racines réelles distinctes, si  $\Delta = 0$  alors elle admet une racine réelle double et si  $\Delta < 0$  alors elle n'admet pas de racines réelles mais elle admet des racines complexes. Or, le signe de  $\Delta$  dépend des valeurs des

coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  déterminées par trois lancers d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soit les événements suivants :

- $S_0$  : l'équation n'admet pas de racines réelles (i.e.  $\Delta < 0$ ) ;
- $S_1$  : l'équation admet une racine réelle double (i.e.  $\Delta = 0$ ) ;
- $S_2$  : l'équation admet deux racines réelles distinctes (i.e.  $\Delta > 0$ ).

On suppose que le dé est équilibré et que toutes ses faces ont la même probabilité d'apparaître. Dans cette situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement  $A$  est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des triplets  $(a, b, c)$  possibles que l'on peut obtenir par les trois lancers du dé. Le triplet  $(a, b, c)$  est une disposition ordonnée de trois chiffres puisqu'un changement dans l'ordre de ses éléments conduit à un triplet différent et subséquemment à une valeur différente du discriminant  $\Delta$ . Comme les trois lancers du dé sont indépendants, le résultat d'un lancer du dé n'influence par les résultats des autres lancers et une face peut en conséquence apparaître plusieurs fois dans le même triplet. On conclut que le triplet  $(a, b, c)$  est une disposition ordonnée avec répétitions de trois chiffres tirés aléatoirement dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Le nombre de triplets  $(a, b, c)$  possibles est donc donné par le nombre d'arrangements avec répétitions de 3 éléments parmi 6, soit  $\text{Card}(\Omega) = 6^3 = 216$ .

1. Probabilité de  $S_2$  (l'équation admet deux racines réelles distinctes) :

L'équation admet deux racines réelles distinctes si et seulement si le discriminant  $\Delta$  est strictement positif, ou de façon équivalente si  $b^2 > 4bc$  ou encore  $b > 2\sqrt{bc}$ .

Cette condition est remplie par l'ensemble des triplets suivants :

$$\begin{aligned} S_2 = \{ & (1, 3, 2); (1, 5, 6); (2, 3, 1); (2, 5, 3); (3, 5, 2); (6, 5, 1); (1, 4, 3); (2, 6, 4); (3, 4, 1); (4, 6, 2); (1, 3, 1); \\ & (1, 4, 2); (2, 4, 1); (1, 5, 4); (2, 5, 2); (4, 5, 1); (1, 4, 1); (1, 6, 6); (2, 6, 3); (3, 6, 2); (6, 6, 1); (1, 5, 3); \\ & (5, 6, 1); (1, 5, 2); (2, 5, 1); (1, 6, 4); (2, 6, 2); (4, 6, 1); (1, 5, 1); (1, 6, 3); (3, 6, 1); (1, 6, 2); (2, 6, 1) \} \end{aligned}$$

Le nombre de ces triplets est  $\text{Card}(S_2) = 38$ . La probabilité que l'équation admette deux racines réelles distinctes est donnée par :

$$\begin{aligned} P(S_2) &= \frac{\text{Card}(S_2)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{38}{216} \\ &\approx 0.18 \end{aligned}$$

2. Probabilité de  $S_1$  (l'équation admet une racine réelle double) :

L'équation admet une racine réelle double si et seulement si le discriminant  $\Delta$  est

nul ou, de manière équivalente, si  $b^2 = 4bc$  ou encore  $b = 2\sqrt{bc}$ . Ceci est vérifié par les triplets suivants :

$$S_1 = \{(1, 2, 1); (1, 4, 4); (2, 4, 2); (3, 6, 3); (4, 4, 1)\}$$

Le nombre de ces triplets est  $Card(S_1) = 5$ . La probabilité que l'équation admette une racine réelle double est donnée par :

$$\begin{aligned} P(S_1) &= \frac{Card(S_1)}{Card(\Omega)} \\ &= \frac{5}{216} \\ &\approx 0.02 \end{aligned}$$

3. Probabilité de  $S_0$  (l'équation n'admet pas de racines réelles) :

L'équation n'admet pas de racines réelles si et seulement si le discriminant  $\Delta$  est strictement négatif, c'est à dire dans tous les autres cas dans lesquels  $\Delta$  n'est ni nul (i.e.  $S_1$ ) ni strictement positif (i.e.  $S_2$ ). Ceci est vérifié par le complémentaire de  $S_1 \cup S_2$  :

$$S_0 = \overline{S_1 \cup S_2}$$

La probabilité que l'équation n'admette pas de racines réelles est donnée par :

$$\begin{aligned} P(S_0) &= P(\overline{S_1 \cup S_2}) \\ &= 1 - P(S_1 \cup S_2) \\ &= 1 - [P(S_1) + P(S_2)] \\ &= 1 - [0.02 + 0.18] \\ &\approx 0.80 \end{aligned}$$

# Chapitre 5

## Variables aléatoires continues

### Exercice 35 :

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Démontrer qu'en tout point où elle est continue,  $f$  est une densité de probabilités ;
2. Déterminer la fonction de répartition ;
3. Calculer les probabilités  $P(0.25 \leq X \leq 0.50)$ ,  $P(0.25 \leq X \leq 5)$  et interpréter.

### Solution :

1.  $f$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} 0 dx \\ &= 0 + [\sqrt{x}]_0^1 + 0 \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On conclut que  $f$  est bien une densité de probabilités.

2. La fonction de répartition  $F(x)$  de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Comme la fonction  $f$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle. On distingue 3 cas :

- $x \in ]-\infty, 0]$ , dans ce cas, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- $x \in ]0, 1]$ , dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= 0 + \left[ \sqrt{t} \right]_0^x \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{0} \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

- $x \in ]1, +\infty[$ , dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} 0 dt \\ &= 0 + \left[ \sqrt{t} \right]_0^1 + 0 \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Calcul des probabilités  $P(0.25 \leq X \leq 0.50)$ ,  $P(0.25 \leq X \leq 5)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(0.25 \leq X \leq 0.50) = F(0.50) - F(0.25) = \sqrt{0.50} - \sqrt{0.25} \approx 0.2071$$

$$P(0.25 \leq X \leq 5) = F(5) - F(0.25) = 1 - \sqrt{0.25} = 0.5$$

**Interprétation :** Il y a une probabilité d'environ 0.2071 que la variable aléatoire  $X$  prenne ses valeurs dans l'intervalle  $[0.25, 0.50]$  et une probabilité de 0.5 qu'elle prenne ses valeurs dans l'intervalle  $[0.25, 5]$ .

**Exercice 36 :**

Soit  $X$  une variable aléatoire et soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = ke^{-|x|} \text{ pour } x \in ]-\infty, +\infty[$$

1. Déterminer  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités ;
2. Calculer  $E(X)$ ,  $F(x)$  et  $P(-1 < X < 1)$ .

**Solution :**

La fonction  $f(x)$  peut s'écrire par morceaux comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} ke^x & \text{si } x < 0 \\ ke^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Valeur de  $k$  assurant que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Calculons dans un premier temps le membre gauche de (1) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 ke^x dx + \int_0^{+\infty} ke^{-x} dx \\ &= [ke^x]_{-\infty}^0 + [-ke^{-x}]_0^{+\infty} \\ &= (ke^0 - \lim_{-\infty} ke^x) + (-\lim_{+\infty} ke^{-x} + ke^0) \\ &= (k - 0) + (0 + k) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2k$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si  $k = 1/2$ , elle s'écrit alors :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Calcul de  $E(X)$ ,  $F(x)$  et  $P(-1 < X < 1)$  :

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx + \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x}}{2} dx \end{aligned}$$

Notons qu'en effectuant le changement de variable  $y = -x$ , on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x}}{2} dx = \int_0^{-\infty} y \frac{e^y}{2} dy = - \int_{-\infty}^0 y \frac{e^y}{2} dy$$

La variable d'intégration  $y$  n'est qu'une variable muette, elle peut être remplacée par  $x$ ,  $t$  ou d'autres variables sans que cela n'affecte le résultat final. On peut alors écrire :

$$- \int_{-\infty}^0 y \frac{e^y}{2} dy = - \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx$$

En substituant dans (??), on obtient :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx + \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x}}{2} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx - \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

— Calcul de  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux, la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux :

— Si  $x \in ]-\infty, 0[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{2} dt \\ &= \left[ \frac{e^t}{2} \right]_{-\infty}^x \\ &= \frac{e^x}{2} - \lim_{-\infty} \frac{e^t}{2} \\ &= \frac{e^x}{2} - 0 \\ &= \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

— Si  $x \in [0, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt \\ &= \left[ \frac{e^t}{2} \right]_{-\infty}^0 + \left[ -\frac{e^{-t}}{2} \right]_0^x \\ &= \left( \frac{e^0}{2} - \lim_{-\infty} \frac{e^t}{2} \right) + \left( -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^0}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left( -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

— Calcul de  $P(-1 < X < 1)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Ainsi,

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} = 1 - e^{-1}$$

**Exercice 37 :**

Soit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la constante  $a$  pour que  $F(x)$  soit une fonction de répartition ;
2. Calculer la densité  $f(x)$  ;
3. Calculer les probabilités  $P(0.25 \leq X \leq 0.50)$  et  $P(-1 \leq X \leq 1)$ .

**Solution :**

1. La constante  $a$  qui assure que  $F(x)$  soit une fonction de répartition :

**Rappel :** Une fonction de répartition  $F(x)$  vérifie les propriétés suivantes :

- (a)  $F(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0; 1]$  ;
- (b)  $\lim_{-\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{+\infty} F(x) = 1$  ;
- (c)  $F(x)$  est une fonction non-décroissante, c'est à dire  $dF(x)/dx \geq 0$  ;
- (d)  $F(x)$  est continue (à gauche), c'est à dire  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(x - \epsilon) = F(x)$ .

Selon la dernière propriété, on a :

$$\lim_{1^-} F(x) = F(1) \Leftrightarrow \lim_{1^-} ax^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Ainsi,  $F(x)$  est une fonction de répartition si et seulement si  $a = 1$ .

2. Calcul de la densité  $f(x)$  :

La densité  $f(x)$  est obtenue en dérivant la fonction de répartition  $F(x)$  par rapport à  $x$  :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{d0}{dx} = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{dx^2}{dx} = 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{d1}{dx} = 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3. Calcul des probabilités  $P(0.25 \leq X \leq 0.50)$  et  $P(-1 \leq X \leq 1)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(0.25 \leq X \leq 0.50)$  :

$$P(0.25 \leq X \leq 0.50) = F(0.50) - F(0.25) = (0.5)^2 - (0.25)^2 = 0.1875$$

— Calcul de  $P(-1 \leq X \leq 1)$  :

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = 1 - 0 = 1$$

**Exercice 38 :**

Soit  $X$  une variable aléatoire et soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = Ae^{-|x|} \text{ si } x \in ]-\infty, +\infty[$$

1. Déterminer  $A$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités ;
2. Calculer  $F(x)$ .

**Solution :**

La fonction  $f(x)$  peut s'écrire par morceaux comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} Ae^x & \text{si } x < 0 \\ Ae^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Valeur de  $A$  assurant que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Calculons dans un premier temps le membre gauche de (1) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 Ae^x dx + \int_0^{+\infty} Ae^{-x} dx \\ &= [Ae^x]_{-\infty}^0 + [-Ae^{-x}]_0^{+\infty} \\ &= (Ae^0 - \lim_{-\infty} Ae^x) + (-\lim_{+\infty} Ae^{-x} + Ae^0) \\ &= (A - 0) + (0 + A) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= 2A \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si  $A = 1/2$ , elle s'écrit alors :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Calcul de la fonction de répartition  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux, la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux :

— Si  $x \in ]-\infty, 0[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{2} dt \\ &= \left[ \frac{e^t}{2} \right]_{-\infty}^x \\ &= \frac{e^x}{2} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{2} \\ &= \frac{e^x}{2} - 0 \\ &= \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

— Si  $x \in [0, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt \\ &= \left[ \frac{e^t}{2} \right]_{-\infty}^0 + \left[ -\frac{e^{-t}}{2} \right]_0^x \\ &= \left( \frac{e^0}{2} - \lim_{-\infty} \frac{e^t}{2} \right) + \left( -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^0}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left( -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

### Exercice 39 :

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ k \frac{1}{\sqrt{x}} + k\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités ;
2. Etablir la fonction de répartition de  $X$  ;
3. Calculer  $P(-4 \leq X \leq 4)$ ,  $P(1 \leq X \leq 5)$  et  $P(X \leq 0)$ .

### Solution :

1. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Commençons par calculer le membre gauche de (1) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^4 \left( k\frac{1}{\sqrt{x}} + k\sqrt{x} \right) dx + \int_4^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + k \left[ 2\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^4 + 0 \\ &= k \left( 2\sqrt{4} + \frac{2\sqrt{4^3}}{3} - 2\sqrt{0} - \frac{2\sqrt{0^3}}{3} \right) \\ &= k \left( \frac{28}{3} \right)\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k \left( \frac{28}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{28}$$

2. Fonction de répartition de  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle comme suit :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

— Si  $x \in ]-\infty, 0[$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

— Si  $x \in [0, 4]$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \left( \frac{3}{28\sqrt{t}} + \frac{3\sqrt{t}}{28} \right) dt \\
 &= 0 + \frac{3}{28} \int_0^x \left( \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) dt \\
 &= \frac{3}{28} \left[ 2\sqrt{t} + \frac{2\sqrt{t^3}}{3} \right]_0^x \\
 &= \frac{3}{28} \left( 2\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2\sqrt{0} - \frac{2\sqrt{0^3}}{3} \right) \\
 &= \frac{3\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{14}
 \end{aligned}$$

— Si  $x \in ]4, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^4 \left( \frac{3}{28\sqrt{t}} + \frac{3\sqrt{t}}{28} \right) dt + \int_4^x 0 dt \\
 &= 0 + \frac{3}{28} \int_0^4 \left( \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) dt + 0 \\
 &= \frac{3}{28} \left[ 2\sqrt{t} + \frac{2\sqrt{t^3}}{3} \right]_0^4 \\
 &= \frac{3}{28} \left( 2\sqrt{4} + \frac{2\sqrt{4^3}}{3} - 2\sqrt{0} - \frac{2\sqrt{0^3}}{3} \right) \\
 &= \frac{3}{28} \left( 2\sqrt{4} + \frac{2\sqrt{4^3}}{3} \right) \\
 &= \frac{3}{28} \left( \frac{28}{3} \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{14} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

3. Calcul de  $P(-4 \leq X \leq 4)$ ,  $P(1 \leq X \leq 5)$  et  $P(X \leq 0)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(-4 \leq X \leq 4)$  :

$$P(-4 \leq X \leq 4) = F(4) - F(-4) = 1 - 0 = 1$$

— Calcul de  $P(1 \leq X \leq 5)$  :

$$P(1 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

— Calcul de  $P(X \leq 0)$  :

$$P(X \leq 0) = F(0) = 0$$

**Exercice 40 :**

La densité de probabilités de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 50k + kx^2 & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités ;
2. Représenter graphiquement  $f$  ;
3. Établir la fonction de répartition de  $X$  ;
4. Calculer  $P(-4 \leq X \leq 4)$ ,  $P(1 \leq X \leq 5)$  et  $P(X \leq 0)$ .

**Solution :**

1. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Calculons le membre gauche de (1) :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-5} 0dx + \int_{-5}^{+5} (50k + kx^2) dx + \int_5^{+\infty} 0dx \\
 &= 0 + k \int_{-5}^{+5} (50 + x^2) dx + 0 \\
 &= k \left[ 50x + \frac{x^3}{3} \right]_{-5}^5 \\
 &= k \left( 50 \times 5 + \frac{5^3}{3} - 50 \times (-5) - \frac{(-5)^3}{3} \right) \\
 &= k \left( 250 + \frac{125}{3} + 250 + \frac{125}{3} \right) \\
 &= k \left( \frac{1750}{3} \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k \left( \frac{1750}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{1750}$$

On peut alors écrire :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{1750}x^2 + \frac{3}{35} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2. Représentation graphique  $f(x)$  :

3. Fonction de répartition  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité de probabilités  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -5]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

— Si  $x \in ]-5, 5[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^x \left( \frac{3}{1750} t^2 + \frac{3}{35} \right) dt \\
 &= 0 + \left[ \frac{t^3}{1750} + \frac{3t}{35} \right]_{-5}^x \\
 &= \frac{x^3}{1750} + \frac{3x}{35} + \frac{125}{1750} + \frac{15}{35} \\
 &= \frac{x^3 + 150x + 875}{1750}
 \end{aligned}$$

— Si  $x \in [5, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^5 \left( \frac{3}{1750} t^2 + \frac{3}{35} \right) dt + \int_5^{+\infty} 0 dt \\
 &= 0 + \left[ \frac{t^3}{1750} + \frac{3t}{35} \right]_{-5}^5 + 0 \\
 &= \frac{5^3}{1750} + \frac{3 \times 5}{35} - \frac{(-5)^3}{1750} - \frac{3 \times (-5)}{35} \\
 &= \frac{250}{1750} + \frac{30}{35} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -5 \\ \frac{x^3 + 150x + 875}{1750} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

4. Calcul de  $P(-4 \leq X \leq 4)$ ,  $P(1 \leq X \leq 5)$  et  $P(X \leq 0)$  :

**Rappel :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(-4 \leq X \leq 4)$  :

$$P(-4 \leq X \leq 4) = F(4) - F(-4) = \frac{1539}{1750} - \frac{211}{1750} = \frac{664}{875}$$

— Calcul de  $P(1 \leq X \leq 5)$  :

$$P(1 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = 1 - \frac{1026}{1750} = \frac{362}{875}$$

— Calcul de  $P(X \leq 0)$  :

$$P(X \leq 0) = F(0) = \frac{875}{1750} = \frac{1}{2}$$

### Exercice 41 :

La densité de probabilités de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} + ke^x & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités ;
2. Établir la fonction de répartition de  $X$  ;
3. Calculer  $E(X)$ ,  $P(-2 \leq X \leq 4)$ ,  $P(1 \leq X \leq 5)$  et  $P(X \leq -10)$ .

### Solution :

1. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilité si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Calculons le membre gauche de (6.252) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dx + \int_{-5}^5 (ke^{-x} + ke^x) dx + \int_5^{+\infty} 0 dx \\ &= 0 + k \int_{-5}^5 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= k [-e^{-x} + e^x]_{-5}^5 \\ &= k (-e^{-5} + e^5 + e^5 - e^{-5}) \\ &= 2k (e^5 - e^{-5}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow 2k (e^5 - e^{-5}) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})}$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^5 - e^{-5})} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2. Fonction de répartition de  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -5]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

— Si  $x \in ]-5, 5[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^x \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^5 - e^{-5})} dt \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^x (e^{-t} + e^t) dt \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} [-e^{-t} + e^t]_{-5}^x \\ &= \frac{-e^{-x} + e^x + e^5 - e^{-5}}{2(e^5 - e^{-5})} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^5 - e^{-5})} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

— Si  $x \in [5, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^5 \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^5 - e^{-5})} dt + \int_5^{+\infty} 0 dt \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 (e^{-t} + e^t) dt + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} [-e^{-t} + e^t]_{-5}^5 \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} (-e^{-5} + e^5 + e^5 - e^{-5}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -5 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^5 - e^{-5})} + \frac{1}{2} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

3. Calcul de  $E(X)$ ,  $P(-2 \leq X \leq 4)$ ,  $P(1 \leq X \leq 5)$  et  $P(X \leq -10)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-5} (x \times 0) dx + \int_{-5}^5 x \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^5 - e^{-5})} dx + \int_5^{+\infty} (x \times 0) dx \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 x (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 g(x) dx \end{aligned}$$

avec  $g(x) = x(e^{-x} + e^x)$ . Notons que la fonction  $g(x)$  est impaire car :

$$g(-x) = -x(e^x + e^{-x}) = -g(x)$$

Il en résulte :

$$\int_{-5}^5 g(x) dx = 0$$

Par conséquent

$$E(X) = \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \times 0 = 0$$

**Rappels :**

- $g(x)$  est une fonction impaire si et seulement si  $g(-x) = -g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport au point  $(0, 0)$ . Par conséquent :

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

- $g(x)$  est une fonction paire si et seulement si  $g(-x) = g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport à la droite  $x = 0$ . Par

conséquent :

$$\int_{-a}^0 g(x)dx = \int_0^a g(x)dx$$

— Calcul de  $P(-2 \leq X \leq 4)$  :

$$P(-2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(-2) = \frac{e^4 - e^{-4} - e^{-2} + e^2}{2(e^5 - e^{-5})}$$

— Calcul de  $P(1 \leq X \leq 5)$  :

$$P(1 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = 1 - \left( \frac{e^1 - e^{-1}}{2(e^5 - e^{-5})} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{e^1 - e^{-1}}{2(e^5 - e^{-5})}$$

— Calcul de  $P(X \leq -10)$  :

$$P(X \leq -10) = F(-10) = 0$$

### Exercice 42 :

La densité de probabilités de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} + ke^x & \text{si } -4 < x < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités ;
2. Établir la fonction de répartition de  $X$  ;
3. Calculer  $P(-4 \leq X \leq 4)$ ,  $P(2 \leq X \leq 5)$ ,  $P(X \leq -8)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Solution :

1. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :

$f(x)$  est une densité de probabilité si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Calculons le membre gauche de (6.252) :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-4} 0dx + \int_{-4}^4 (ke^{-x} + ke^x) dx + \int_4^{+\infty} 0dx \\
 &= 0 + k \int_{-4}^4 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\
 &= k [-e^{-x} + e^x]_{-4}^4 \\
 &= k (-e^{-4} + e^4 + e^4 - e^{-4}) \\
 &= 2k (e^4 - e^{-4})
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 2k (e^4 - e^{-4}) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})}$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^4 - e^{-4})} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2. Fonction de répartition de  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -4]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

— Si  $x \in ]-4, 4[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-4} 0dt + \int_{-4}^x \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^4 - e^{-4})} dt \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} \int_{-4}^x (e^{-t} + e^t) dt \\
 &= \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} [-e^{-t} + e^t]_{-4}^x \\
 &= \frac{-e^{-x} + e^x + e^4 - e^{-4}}{2(e^4 - e^{-4})} \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^4 - e^{-4})} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

— Si  $x \in [4, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-4} 0 dt + \int_{-4}^4 \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^4 - e^{-4})} dt + \int_4^{+\infty} 0 dt \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} \int_{-4}^4 (e^{-t} + e^t) dt + 0 \\
 &= \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} [-e^{-t} + e^t]_{-4}^4 \\
 &= \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} (-e^{-4} + e^4 + e^4 - e^{-4}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -4 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^4 - e^{-4})} + \frac{1}{2} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

3. Calcul de  $P(-4 \leq X \leq 4)$ ,  $P(2 \leq X \leq 5)$ ,  $P(X \leq -8)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(-4 \leq X \leq 4)$  :

$$P(-4 \leq X \leq 4) = F(4) - F(-4) = 1 - 0 = 1$$

— Calcul de  $P(1 \leq X \leq 5)$  :

$$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = 1 - \left( \frac{e^2 - e^{-2}}{2(e^4 - e^{-4})} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{e^2 - e^{-2}}{2(e^4 - e^{-4})}$$

— Calcul de  $P(X \leq -10)$  :

$$P(X \leq -10) = F(-10) = 0$$

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-4} (x \times 0) dx + \int_{-4}^4 x \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^4 - e^{-4})} dx + \int_4^{+\infty} (x \times 0) dx \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} \int_{-4}^4 x (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\
 &= \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} \int_{-4}^4 g(x) dx
 \end{aligned}$$

avec  $g(x) = x(e^{-x} + e^x)$ . Notons que la fonction  $g(x)$  est impaire car :

$$g(-x) = -x(e^x + e^{-x}) = -g(x)$$

**Rappel :**  $g(x)$  est une fonction impaire si et seulement si  $g(-x) = -g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport au point  $(0, 0)$ .

Par conséquent :

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

Il en résulte :

$$\int_{-4}^4 g(x) dx = 0$$

Par conséquent

$$E(X) = \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} \times 0 = 0$$

— Calcul de  $V(X)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Comme  $E(X) = 0$  alors :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-4} x^2 0 dx + \int_{-4}^4 x^2 \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^4 - e^{-4})} dx + \int_4^{+\infty} x^2 0 dx \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} \int_{-4}^4 x^2 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\
 &= \frac{1}{2(e^4 - e^{-4})} \underbrace{\int_{-4}^4 x^2 (e^{-x} + e^x) dx}_{\text{Intégrale I}}
 \end{aligned}$$

Calculons d'abord l'intégrale  $I$  :

$$I = \int_{-4}^4 x^2 (e^{-x} + e^x) dx$$

La méthode d'intégration la plus appropriée dans ce cas est l'intégration par parties.

**Rappel :**

Soit  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions dérivables. On a le résultat suivant :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Dans le cas présent, on pose :

$$u(x) = x^2 \qquad v'(x) = e^{-x} + e^x$$

On en déduit :

$$u'(x) = 2x \qquad v(x) = e^x - e^{-x}$$

L'intégration par parties de l'intégrale  $I$  donne :

$$I = [u(x)v(x)]_{-4}^4 - \int_{-4}^4 u'(x)v(x)dx \tag{5.1}$$

$$= [x^2(e^x - e^{-x})]_{-4}^4 - \int_{-4}^4 2x(e^x - e^{-x})dx \tag{5.2}$$

$$= [4^2(e^4 - e^{-4}) - (-4)^2(e^{-4} - e^4)] - 2 \int_{-4}^4 x(e^x - e^{-x})dx \tag{5.3}$$

$$= 32(e^4 - e^{-4}) - 2 \underbrace{\int_{-4}^4 x(e^x - e^{-x})dx}_{\text{Intégrale } J} \tag{5.4}$$

Calculons ensuite l'intégrale  $J$  :

$$J = \int_{-4}^4 x(e^x - e^{-x})dx$$

Posons :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = e^x - e^{-x}$$

Les fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  ici sont différentes des fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  dans

(5.15). On en déduit :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^x + e^{-x}$$

L'intégration par parties de  $J$  produit :

$$\begin{aligned} J &= [u(x)v(x)]_{-4}^4 - \int_{-4}^4 u'(x)v(x)dx \\ &= [x(e^x + e^{-x})]_{-4}^4 - \int_{-4}^4 e^x + e^{-x}dx \\ &= [x(e^x + e^{-x})]_{-4}^4 - [e^x - e^{-x}]_{-4}^4 \\ &= [4(e^4 + e^{-4}) - (-4)(e^{-4} + e^4)] - [(e^4 - e^{-4}) - (e^{-4} - e^4)] \\ &= 6e^4 - 10e^{-4} \end{aligned}$$

Substituons le résultat (5.32) dans (5.28), on obtient :

$$I = 32(e^4 - e^{-4}) - 2(6e^4 - 10e^{-4}) \tag{5.5}$$

$$= 20e^4 - 12e^{-4} \tag{5.6}$$

$$= 4(5e^4 - 3e^{-4}) \tag{5.7}$$

Substituons (5.21) dans (?). On obtient :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{4(5e^4 - 3e^{-4})}{2(e^4 - e^{-4})} \\ &= \frac{2(5e^4 - 3e^{-4})}{e^4 - e^{-4}} \\ &= 10.00134 \end{aligned}$$

### Exercice 43 :

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} + ke^x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.
2. Établir la fonction de répartition de  $X$ .
3. Calculer  $P(-2 \leq X \leq 2)$ ,  $P(1 \leq X \leq 3)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $f(-2)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Solution :

1. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :

$f(x)$  est une densité de probabilité si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Calculons le membre gauche de (6.252) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^2 (ke^{-x} + ke^x) dx + \int_2^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + k \int_{-2}^2 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= k [-e^{-x} + e^x]_{-2}^2 \\ &= k (-e^{-2} + e^2 + e^2 - e^{-2}) \\ &= 2k (e^2 - e^{-2})\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 2k (e^2 - e^{-2}) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})}$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^2 - e^{-2})} & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

## 2. Fonction de répartition de $F(x)$ :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -2]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

— Si  $x \in ]-2, 2[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^x \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^2 - e^{-2})} dt \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} \int_{-2}^x (e^{-t} + e^t) dt \\
 &= \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} [-e^{-t} + e^t]_{-2}^x \\
 &= \frac{-e^{-x} + e^x + e^2 - e^{-2}}{2(e^2 - e^{-2})} \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^2 - e^{-2})} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

— Si  $x \in [2, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^2 \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^2 - e^{-2})} dt + \int_2^{+\infty} 0 dt \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} \int_{-2}^2 (e^{-t} + e^t) dt + 0 \\
 &= \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} [-e^{-t} + e^t]_{-2}^2 \\
 &= \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} (-e^{-2} + e^2 + e^2 - e^{-2}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^2 - e^{-2})} + \frac{1}{2} & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. Calcul de  $P(-2 \leq X \leq 2)$ ,  $P(1 \leq X \leq 3)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $F(-2)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(-2 \leq X \leq 2)$  :

$$P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) = 1 - 0 = 1$$

— Calcul de  $P(1 \leq X \leq 3)$  :

$$P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = 1 - \left( \frac{e^1 - e^{-1}}{2(e^2 - e^{-2})} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{e^1 - e^{-1}}{2(e^2 - e^{-2})}$$

— Calcul de  $F(0)$  :

$$F(0) = \frac{e^0 - e^0}{2(e^2 - e^{-2})} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

— Calcul de  $F(-1)$  :

$$F(-1) = \frac{e^{-1} - e^1}{2(e^2 - e^{-2})} + \frac{1}{2}$$

— Calcul de  $F(-2)$  :

$$F(-2) = 0$$

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} (x \times 0) dx + \int_{-2}^2 x \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^2 - e^{-2})} dx + \int_2^{+\infty} (x \times 0) dx \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} \int_{-2}^2 x (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} \int_{-2}^2 g(x) dx \end{aligned}$$

avec  $g(x) = x(e^{-x} + e^x)$ . Notons que la fonction  $g(x)$  est impaire car :

$$g(-x) = -x(e^x + e^{-x}) = -g(x)$$

**Rappel :**  $g(x)$  est une fonction impaire si et seulement si  $g(-x) = -g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport au point  $(0, 0)$ .

Par conséquent :

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

Il en résulte :

$$\int_{-2}^2 g(x) dx = 0$$

Par conséquent

$$E(X) = \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} \times 0 = 0$$

— Calcul de  $V(X)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Comme  $E(X) = 0$  alors :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} x^2 0 dx + \int_{-2}^2 x^2 \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^2 - e^{-2})} dx + \int_2^{+\infty} x^2 0 dx \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} \int_{-2}^2 x^2 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^2 - e^{-2})} \underbrace{\int_{-2}^2 x^2 (e^{-x} + e^x) dx}_{\text{Intégrale } I} \end{aligned}$$

Calculons d'abord l'intégrale  $I$  :

$$I = \int_{-2}^2 x^2 (e^{-x} + e^x) dx$$

La méthode d'intégration la plus appropriée dans ce cas est l'intégration par parties.

**Rappel :**

Soit  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions dérivables. On a le résultat suivant :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Dans le cas présent, on pose :

$$u(x) = x^2 \qquad v'(x) = e^{-x} + e^x$$

On en déduit :

$$u'(x) = 2x \qquad v(x) = e^x - e^{-x}$$

L'intégration par parties de l'intégrale  $I$  donne :

$$I = [u(x)v(x)]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 u'(x)v(x)dx \quad (5.8)$$

$$= [x^2(e^x - e^{-x})]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 2x(e^x - e^{-x})dx \quad (5.9)$$

$$= [2^2(e^2 - e^{-2}) - (-2)^2(e^{-2} - e^2)] - 2 \int_{-2}^2 x(e^x - e^{-x})dx \quad (5.10)$$

$$= 8(e^2 - e^{-2}) - 2 \underbrace{\int_{-2}^2 x(e^x - e^{-x})dx}_{\text{Intégrale } J} \quad (5.11)$$

Calculons ensuite l'intégrale  $J$  :

$$J = \int_{-2}^2 x(e^x - e^{-x})dx$$

Posons :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = e^x - e^{-x}$$

Les fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  ici sont différentes des fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  dans (5.15). On en déduit :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^x + e^{-x}$$

L'intégration par parties de  $J$  produit :

$$\begin{aligned} J &= [u(x)v(x)]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 u'(x)v(x)dx \\ &= [x(e^x + e^{-x})]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 e^x + e^{-x}dx \\ &= [x(e^x + e^{-x})]_{-2}^2 - [e^x - e^{-x}]_{-2}^2 \\ &= [2(e^2 + e^{-2}) - (-2)(e^{-2} + e^2)] - [(e^2 - e^{-2}) - (e^{-2} - e^2)] \\ &= 2e^2 + 6e^{-2} \end{aligned}$$

Substituons le résultat (5.32) dans (5.28), on obtient :

$$I = 8(e^2 - e^{-2}) - 2(2e^2 + 6e^{-2}) \quad (5.12)$$

$$= 4e^2 - 20e^{-2} \quad (5.13)$$

$$= 4(e^2 - 5e^{-2}) \quad (5.14)$$

Substituons (5.21) dans (?). On obtient :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{4(e^2 - 5e^{-2})}{2(e^2 - e^{-2})} \\ &= \frac{2(e^2 - 5e^{-2})}{e^2 - e^{-2}} \\ &= 1.850741 \end{aligned}$$

#### Exercice 44 :

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} + ke^x & \text{si } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Définir une densité de probabilité et la fonction de répartition.
2. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.
3. Établir la fonction de répartition de  $X$ .
4. Calculer  $P(-1 \leq X \leq 1)$ ,  $P(0 \leq X \leq 3)$ ,  $F(10)$ ,  $F(-5)$ ,  $f(-2)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$ .

#### Solution :

1. Notions de densité de probabilités et de fonction de répartition :
  - Une densité de probabilités est une fonction  $f(x)$  définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  telle que :

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

- Une fonction de répartition est une fonction  $F(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[0, 1]$ , continue (à gauche) et non décroissante, telle que :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\lim_{-\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{+\infty} F(x) = 1$$

2. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilité si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Calculons le membre gauche de (6.252) :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-3} 0dx + \int_{-3}^3 (ke^{-x} + ke^x) dx + \int_3^{+\infty} 0dx \\
 &= 0 + k \int_{-3}^3 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\
 &= k [-e^{-x} + e^x]_{-3}^3 \\
 &= k (-e^{-3} + e^3 + e^3 - e^{-3}) \\
 &= 2k (e^3 - e^{-3})
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 2k (e^3 - e^{-3}) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})}$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^3 - e^{-3})} & \text{si } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

### 3. Fonction de répartition de $F(x)$ :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -3]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

— Si  $x \in ]-3, 3[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-3} 0dt + \int_{-3}^x \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^3 - e^{-3})} dt \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} \int_{-3}^x (e^{-t} + e^t) dt \\
 &= \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} [-e^{-t} + e^t]_{-3}^x \\
 &= \frac{-e^{-x} + e^x + e^3 - e^{-3}}{2(e^3 - e^{-3})} \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^3 - e^{-3})} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

— Si  $x \in [3, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-3} 0 dt + \int_{-3}^3 \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^3 - e^{-3})} dt + \int_3^{+\infty} 0 dt \\
 &= 0 + \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} \int_{-3}^3 (e^{-t} + e^t) dt + 0 \\
 &= \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} [-e^{-t} + e^t]_{-3}^3 \\
 &= \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} (-e^{-3} + e^3 + e^3 - e^{-3}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^3 - e^{-3})} + \frac{1}{2} & \text{si } -3 < x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

4. Calcul de  $P(-1 \leq X \leq 1)$ ,  $P(0 \leq X \leq 3)$ ,  $F(10)$ ,  $F(-5)$ ,  $F(-2)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b) \qquad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(-1 \leq X \leq 1)$  :

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2(e^3 - e^{-3})} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-1} - e^1}{2(e^3 - e^{-3})} - \frac{1}{2} = \frac{e^1 - e^{-1}}{e^3 - e^{-3}}$$

— Calcul de  $P(0 \leq X \leq 3)$  :

$$P(0 \leq X \leq 3) = F(3) - F(0) = 1 - \frac{e^0 - e^0}{2(e^3 - e^{-3})} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

— Calcul de  $F(10)$  :

$$F(10) = 1$$

— Calcul de  $F(-5)$  :

$$F(-5) = 0$$

— Calcul de  $F(-2)$  :

$$F(-2) = \frac{e^{-2} - e^2}{2(e^3 - e^{-3})} + \frac{1}{2}$$

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-3} (x \times 0) dx + \int_{-3}^3 x \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^3 - e^{-3})} dx + \int_3^{+\infty} (x \times 0) dx \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} \int_{-3}^3 x (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} \int_{-3}^3 g(x) dx \end{aligned}$$

avec  $g(x) = x(e^{-x} + e^x)$ . Notons que la fonction  $g(x)$  est impaire car :

$$g(-x) = -x(e^x + e^{-x}) = -g(x)$$

Il en résulte :

$$\int_{-3}^3 g(x) dx = 0$$

Par conséquent

$$E(X) = \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} \times 0 = 0$$

**Rappels :**

- $g(x)$  est une fonction impaire si et seulement si  $g(-x) = -g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport au point  $(0, 0)$ .

Par conséquent :

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

- $g(x)$  est une fonction paire si et seulement si  $g(-x) = g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport à la droite  $x = 0$ . Par conséquent :

$$\int_{-a}^0 g(x) dx = \int_0^a g(x) dx$$

— Calcul de  $V(X)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Comme  $E(X) = 0$  alors :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-3} x^2 0 dx + \int_{-3}^3 x^2 \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^3 - e^{-3})} dx + \int_3^{+\infty} x^2 0 dx \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} \int_{-3}^3 x^2 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^3 - e^{-3})} \underbrace{\int_{-3}^3 x^2 (e^{-x} + e^x) dx}_{\text{Intégrale } I} \end{aligned}$$

Calculons d'abord l'intégrale  $I$  :

$$I = \int_{-3}^3 x^2 (e^{-x} + e^x) dx$$

La méthode d'intégration la plus appropriée dans ce cas est l'intégration par parties.

**Rappel :**

Soit  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions dérivables. On a le résultat suivant :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Dans le cas présent, on pose :

$$u(x) = x^2 \qquad v'(x) = e^{-x} + e^x$$

On en déduit :

$$u'(x) = 2x \qquad v(x) = e^x - e^{-x}$$

L'intégration par parties de l'intégrale  $I$  donne :

$$I = [u(x)v(x)]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 u'(x)v(x)dx \quad (5.15)$$

$$= [x^2(e^x - e^{-x})]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 2x(e^x - e^{-x})dx \quad (5.16)$$

$$= [3^2(e^3 - e^{-3}) - (-3)^2(e^{-3} - e^3)] - 2 \int_{-3}^3 x(e^x - e^{-x})dx \quad (5.17)$$

$$= 18(e^3 - e^{-3}) - 2 \underbrace{\int_{-3}^3 x(e^x - e^{-x})dx}_{\text{Intégrale } J} \quad (5.18)$$

Calculons ensuite l'intégrale  $J$  :

$$J = \int_{-3}^3 x(e^x - e^{-x})dx$$

Posons :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = e^x - e^{-x}$$

Les fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  ici sont différentes des fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  dans (5.15). On en déduit :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^x + e^{-x}$$

L'intégration par parties de  $J$  produit :

$$\begin{aligned} J &= [u(x)v(x)]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 u'(x)v(x)dx \\ &= [x(e^x + e^{-x})]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 e^x + e^{-x}dx \\ &= [x(e^x + e^{-x})]_{-3}^3 - [e^x - e^{-x}]_{-3}^3 \\ &= [3(e^3 + e^{-3}) - (-3)(e^{-3} + e^3)] - [(e^3 - e^{-3}) - (e^{-3} - e^3)] \\ &= 4e^3 + 8e^{-3} \end{aligned}$$

Substituons le résultat (5.32) dans (5.28), on obtient :

$$I = 18(e^3 - e^{-3}) - 2(4e^3 + 8e^{-3}) \quad (5.19)$$

$$= 10e^3 - 34e^{-3} \quad (5.20)$$

$$= 2(5e^3 - 17e^{-3}) \quad (5.21)$$

Substituons (5.21) dans (?). On obtient :

$$\begin{aligned}V(X) &= \frac{2(5e^3 - 17e^{-3})}{2(e^3 - e^{-3})} \\ &= \frac{5e^3 - 17e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} \\ &= 4.970181\end{aligned}$$

**Exercice 45 :**

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} + kx^2 & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Définir une densité de probabilité et la fonction de répartition.
2. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.
3. Établir la fonction de répartition de  $X$ .
4. Calculer  $P(-2 \leq X \leq 2)$ ,  $P(1 \leq X \leq 3)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $f(-2)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

1. Notions de densité de probabilités et de fonction de répartition :
  - Une densité de probabilités est une fonction  $f(x)$  définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  telle que :

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

- Une fonction de répartition est une fonction  $F(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[0, 1]$ , continue (à gauche) et non décroissante, telle que :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\lim_{-\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{+\infty} F(x) = 1$$

2. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Calculons le membre gauche de (6.252) :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-5} 0dx + \int_{-5}^5 (ke^{-x} + kx^2) dx + \int_5^{+\infty} 0dx \\
 &= 0 + k \int_{-5}^5 (e^{-x} + x^2) dx + 0 \\
 &= k \left[ -e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right]_{-5}^5 \\
 &= k \left( -e^{-5} + \frac{5^3}{3} + e^5 - \frac{(-5)^3}{3} \right) \\
 &= k \left( \frac{3e^5 - 3e^{-5} + 250}{3} \right)
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k \left( \frac{3e^5 - 3e^{-5} + 250}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow k = \left( \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \right)$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3(e^{-x} + x^2)}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

### 3. Fonction de répartition de $F(x)$ :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -5]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

— Si  $x \in ]-5, 5[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^x \frac{3(e^{-t} + t^2)}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} dt \\
 &= 0 + \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \int_{-5}^x (e^{-t} + t^2) dt \\
 &= \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \left[ -e^{-t} + \frac{t^3}{3} \right]_{-5}^x \\
 &= \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \left( -e^{-x} + \frac{x^3}{3} + e^5 - \frac{(-5)^3}{3} \right) \\
 &= \frac{3e^5 - 3e^{-x} + x^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250}
 \end{aligned}$$

— Si  $x \in [5, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^5 \frac{3(e^{-t} + t^2)}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} dt + \int_5^{+\infty} 0 dt \\
 &= 0 + \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \int_{-5}^5 (e^{-t} + t^2) dt + 0 \\
 &= \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \left[ -e^{-t} + \frac{t^3}{3} \right]_{-5}^5 \\
 &= \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \left( -e^{-5} + \frac{125}{3} + e^5 + \frac{125}{3} \right) \\
 &= \frac{3e^5 - 3e^{-5} + 250}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -5 \\ \frac{3e^5 - 3e^{-x} + x^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

4. Calcul de  $P(-2 \leq X \leq 2)$ ,  $P(1 \leq X \leq 3)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $F(-2)$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(-2 \leq X \leq 2)$  :

$$\begin{aligned}
 P(-2 \leq X \leq 2) &= F(2) - F(-2) \\
 &= \frac{3e^5 - 3e^{-2} + 2^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} - \frac{3e^5 - 3e^2 + (-2)^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \\
 &= \frac{3e^2 - 3e^{-2} + 16}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \\
 &= 0.05431547
 \end{aligned}$$

— Calcul de  $P(1 \leq X \leq 3)$  :

$$\begin{aligned}
 P(1 \leq X \leq 3) &= F(3) - F(1) \\
 &= \frac{3e^5 - 3e^{-3} + 3^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} - \frac{3e^5 - 3e^{-1} + 1^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \\
 &= \frac{3e^{-1} - 3e^{-3} + 8}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \\
 &= 0.01287979
 \end{aligned}$$

— Calcul de  $F(0)$  :

$$F(0) = \frac{3e^5 - 3e^0 + 0^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} = \frac{3e^5 + 122}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} = 0.8159145$$

— Calcul de  $F(-1)$  :

$$F(-1) = \frac{3e^5 - 3e^1 + (-1)^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} = \frac{3e^5 - 3e^1 + 124}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} = 0.8070614$$

— Calcul de  $F(-2)$  :

$$F(-2) = \frac{3e^5 - 3e^2 + (-2)^3 + 125}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} = \frac{3e^5 - 3e^2 + 117}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} = 0.7768374$$

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-5} x \times 0 dx + \int_{-5}^5 x \frac{3(e^{-x} + x^2)}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} dx + \int_5^{+\infty} x \times 0 dx \\
 &= 0 + \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \int_{-5}^5 x(e^{-x} + x^2) dx + 0 \\
 &= \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \times I
 \end{aligned}$$

avec

$$I = \int_{-5}^5 x (e^{-x} + x^2) dx$$

Afin d'intégrer  $I$  par parties, posons :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = e^{-x} + x^2$$

on en déduit :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = -e^{-x} + \frac{x^3}{3}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \left[ x \left( -e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-5}^5 - \int_{-5}^5 -e^{-x} + \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left[ x \left( -e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-5}^5 - \left[ e^{-x} + \frac{x^4}{12} \right]_{-5}^5 \\ &= \left[ 5 \left( -e^{-5} + \frac{5^3}{3} \right) - (-5) \left( -e^5 + \frac{(-5)^3}{3} \right) \right] - \left[ e^{-5} + \frac{5^4}{12} - \left( e^5 + \frac{(-5)^4}{12} \right) \right] \\ &= -2(2e^5 + 3e^{-5}) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \times (-2)(2e^5 + 3e^{-5}) \\ &= \frac{-12e^5 - 18e^{-5}}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \\ &= -2.561896 \end{aligned}$$

— Calcul de  $V(X)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \tag{5.22}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X) \tag{5.23}$$

Calculons d'abord la première partie du membre droit de (5.23) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{-5} x^2 \times 0 dx + \int_{-5}^5 x^2 \frac{3(e^{-x} + x^2)}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} dx + \int_5^{+\infty} x^2 \times 0 dx \quad (5.24)$$

$$= 0 + \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \int_{-5}^5 x^2 (e^{-x} + x^2) dx + 0 \quad (5.25)$$

$$= \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \underbrace{\int_{-5}^5 x^2 (e^{-x} + x^2) dx}_I \quad (5.26)$$

Calculons l'intégrale  $I$  par une intégration par parties, pour cela posons :

$$u(x) = x^2 \qquad v'(x) = e^{-x} + x^2$$

On en déduit :

$$u'(x) = 2x \qquad v(x) = -e^{-x} + \frac{x^3}{3}$$

Ainsi,

$$I = \left[ x^2 \left( -e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-5}^5 - \int_{-5}^5 2x \left( -e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right) dx \quad (5.27)$$

$$= 25e^5 - 25e^{-5} + \frac{6250}{3} - 2 \underbrace{\int_{-5}^5 x \left( -e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right) dx}_J \quad (5.28)$$

Calculons l'intégrale  $J$  par une intégration par parties, pour cela posons :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = -e^{-x} + \frac{x^3}{3}$$

On en déduit,

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^{-x} + \frac{x^4}{12}$$

Ainsi,

$$J = \left[ x \left( e^{-x} + \frac{x^4}{12} \right) \right]_{-5}^5 - \int_{-5}^5 e^{-x} + \frac{x^4}{12} dx \quad (5.29)$$

$$= \left[ x \left( e^{-x} + \frac{x^4}{12} \right) \right]_{-5}^5 - \left[ -e^{-x} + \frac{x^5}{60} \right]_{-5}^5 \quad (5.30)$$

$$= \left[ 5 \left( e^{-5} + \frac{5^4}{12} \right) - (-5) \left( e^5 + \frac{(-5)^4}{12} \right) \right] - \left[ -e^{-5} + \frac{5^5}{60} - \left( -e^5 + \frac{(-5)^5}{60} \right) \right] \quad (5.31)$$

$$= 6e^{-5} + 4e^5 - \frac{625}{6} \quad (5.32)$$

En substituant (5.32) dans (5.28), on obtient :

$$I = 25e^5 - 25e^{-5} + \frac{6250}{3} - 2 \times \left( 6e^{-5} + 4e^5 - \frac{625}{6} \right) \quad (5.33)$$

$$= 17e^5 - 37e^{-5} + \frac{6875}{3} \quad (5.34)$$

En substituant (5.34) dans (5.26), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{3}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \times \left( 17e^5 - 37e^{-5} + \frac{6875}{3} \right) = \frac{51e^5 - 111e^{-5} + 6875}{3e^5 - 3e^{-5} + 250}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X) \\ &= \frac{51e^5 - 111e^{-5} + 6875}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} - \left( \frac{-12e^5 - 18e^{-5}}{3e^5 - 3e^{-5} + 250} \right)^2 \\ &= 14.2119 \end{aligned}$$

#### Exercice 46 :

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} + kx^2 & \text{si } -3 < x < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités ;
2. Établir la fonction de répartition de  $X$  ;
3. Calculer  $P(-2 \leq X \leq 2)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $f(-2)$  et  $E(X)$ .

**Solution :**

1. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :  
 $f(x)$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Calculons le membre gauche de (6.252) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-3} 0dx + \int_{-3}^4 (ke^{-x} + kx^2) dx + \int_4^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + k \int_{-3}^4 (e^{-x} + x^2) dx + 0 \\ &= k \left[ -e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^4 \\ &= k \left( -e^{-4} + \frac{4^3}{3} + e^3 - \frac{(-3)^3}{3} \right) \\ &= k \left( \frac{3e^3 - 3e^{-4} + 91}{3} \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k \left( \frac{3e^3 - 3e^{-4} + 91}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91}$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3(e^{-x} + x^2)}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} & \text{si } -3 < x < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2. Fonction de répartition de  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -3]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

— Si  $x \in ]-3, 4[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-3} 0 dt + \int_{-3}^x \frac{3(e^{-t} + t^2)}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} dt \\
 &= 0 + \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \int_{-3}^x (e^{-t} + t^2) dt \\
 &= \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \left[ -e^{-t} + \frac{t^3}{3} \right]_{-3}^x \\
 &= \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \left( -e^{-x} + \frac{x^3}{3} + e^3 + \frac{27}{3} \right) \\
 &= \frac{3e^3 - 3e^{-x} + x^3 + 27}{3e^3 - 3e^{-4} + 91}
 \end{aligned}$$

— Si  $x \in [4, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-3} 0 dt + \int_{-3}^4 \frac{3(e^{-t} + t^2)}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} dt + \int_4^{+\infty} 0 dt \\
 &= 0 + \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \int_{-3}^4 (e^{-t} + t^2) dt + 0 \\
 &= \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \left[ -e^{-t} + \frac{t^3}{3} \right]_{-3}^4 \\
 &= \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \left( -e^{-4} + \frac{64}{3} + e^3 + \frac{27}{3} \right) \\
 &= \frac{3e^3 - 3e^{-4} + 91}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{3e^3 - 3e^{-x} + x^3 + 27}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} & \text{si } -3 < x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

3. Calcul de  $P(-2 \leq X \leq 2)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $F(-2)$  et  $E(X)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

— Calcul de  $P(-2 \leq X \leq 2)$  :

$$\begin{aligned} P(-2 \leq X \leq 2) &= F(2) - F(-2) \\ &= \frac{3e^3 - 3e^{-2} + 2^3 + 27}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} - \frac{3e^3 - 3e^2 + (-2)^3 + 27}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \\ &= \frac{3e^2 - 3e^{-2} + 16}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \\ &= 0.2497404 \end{aligned}$$

— Calcul de  $F(0)$  :

$$F(0) = \frac{3e^3 - 3e^0 + 0^3 + 27}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} = \frac{3e^3 + 24}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} = 0.5572466$$

— Calcul de  $F(-1)$  :

$$F(-1) = \frac{3e^3 - 3e^1 + (-1)^3 + 27}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} = \frac{3e^3 - 3e^1 + 26}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} = 0.5165404$$

— Calcul de  $F(-2)$  :

$$F(-2) = \frac{3e^3 - 3e^2 + (-2)^3 + 27}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} = \frac{3e^3 - 3e^2 + 19}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} = 0.3775715$$

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-3} x \times 0 dx + \int_{-3}^4 x \frac{3(e^{-x} + x^2)}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} dx + \int_4^{+\infty} x \times 0 dx \\ &= 0 + \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \int_{-3}^4 x (e^{-x} + x^2) dx + 0 \\ &= \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \times I \end{aligned}$$

avec

$$I = \int_{-3}^4 x (e^{-x} + x^2) dx$$

Afin d'intégrer  $I$  par parties, posons :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = e^{-x} + x^2$$

on en déduit :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = -e^{-x} + \frac{x^3}{3}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 I &= \left[ x(-e^{-x} + \frac{x^3}{3}) \right]_{-3}^4 - \int_{-3}^4 -e^{-x} + \frac{x^3}{3} dx \\
 &= \left[ x(-e^{-x} + \frac{x^3}{3}) \right]_{-3}^4 - \left[ e^{-x} + \frac{x^4}{12} \right]_{-3}^4 \\
 &= \left[ 4 \left( -e^{-4} + \frac{4^3}{3} \right) - (-3) \left( -e^3 + \frac{(-3)^3}{3} \right) \right] - \left[ e^{-4} + \frac{4^4}{12} - \left( e^3 + \frac{3^4}{12} \right) \right] \\
 &= \frac{363 - 60e^{-4} - 24e^3}{12}
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{3}{3e^3 - 3e^{-4} + 91} \times \frac{363 - 60e^{-4} - 24e^3}{12} \\
 &= \frac{363 - 60e^{-4} - 24e^3}{364 + 12e^3 - 12e^{-4}} \\
 &= -0.1986615
 \end{aligned}$$

### Exercice 47 :

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} k \frac{1}{\sqrt{x}} + kx^2 & \text{si } 1 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités ;
2. Établir la fonction de répartition de  $X$  ;
3. Calculer  $P(-3 \leq X \leq 3)$ ,  $P(1 \leq X \leq 2)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $F(-2)$  et  $E(X)$ .

### Solution :

1. Valeur de  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités :  
 $f$  est une densité de probabilités si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Comme la fonction  $f$  est définie par morceaux, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^1 f(x) \, dx + \int_1^5 f(x) \, dx + \int_5^{+\infty} f(x) \, dx \\
 &= \int_{-\infty}^1 0 \, dx + \int_1^5 k \frac{1}{\sqrt{x}} + kx^2 \, dx + \int_5^{+\infty} 0 \, dx \\
 &= k \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \, dx \\
 &= k \left[ 2\sqrt{x} + \frac{x^3}{3} \right]_1^5 \\
 &= k \left( 2\sqrt{5} + \frac{5^3}{3} - 2\sqrt{1} - \frac{1^3}{3} \right) \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx &= k \frac{6\sqrt{5} + 118}{3}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1 \iff k \frac{6\sqrt{5} + 118}{3} = 1$$

D'où,

$$k = \frac{3}{6\sqrt{5} + 118}$$

## 2. Fonction de répartition de $X$ :

La fonction de répartition  $F(x)$  de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$$

Comme la densité de probabilités  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $] -\infty, +\infty[$ , la fonction de répartition est également définie par morceaux sur le même intervalle. On distingue 3 cas :

- $x \in ] -\infty, 1]$ , dans ce cas  $f(x) = 0$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^x 0 \, dt = 0$$

- $x \in [1, 5]$ , dans ce cas  $f(x) = \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \right)$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} + t^2 \right) dt \\
 &= 0 + \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} + t^2 dt \\
 &= \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \left[ 2\sqrt{t} + \frac{t^3}{3} \right]_1^x \\
 &= \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \left( 2\sqrt{x} + \frac{x^3}{3} - 2 - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{6\sqrt{x} + x^3 - 7}{6\sqrt{5} + 118}
 \end{aligned}$$

- $x \in [5, +\infty[$ , dans ce cas  $f(x) = 0$  :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^5 f(t) dt + \int_5^x f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^5 \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} + t^2 \right) dt + \int_5^x 0 dt \\
 &= \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \int_1^5 \left( \frac{1}{\sqrt{t}} + t^2 \right) dt \\
 &= \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \left[ 2\sqrt{t} + \frac{t^3}{3} \right]_1^5 \\
 &= \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \left( 2\sqrt{5} + \frac{5^3}{3} - 2 - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \left( \frac{3}{6\sqrt{5}+118} \right) \left( \frac{6\sqrt{5}+118}{3} \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Finalement, la fonction de répartition  $F(x)$  de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{6\sqrt{x}+x^3-7}{6\sqrt{5}+118} & \text{si } 1 < x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

3. Calcul de  $P(-3 \leq X \leq 3)$ ,  $P(1 \leq X \leq 2)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-1)$ ,  $F(-2)$  et  $E(X)$  :

**Rappels :**

$$P(X \leq b) = F(b)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} P(-3 \leq X \leq 3) &= F(3) - F(-3) \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 3^3 - 7}{6\sqrt{5} + 118} - 0 \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 20}{6\sqrt{5} + 118} \\ &\approx 0.23127 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= F(2) - F(1) \\ &= \frac{6\sqrt{2} + 2^3 - 7}{6\sqrt{5} + 118} - 0 \\ &= \frac{6\sqrt{2} + 1}{6\sqrt{5} + 118} \\ &\approx 0.07218 \end{aligned}$$

$$F(0) = 0$$

$$F(-1) = 0$$

$$F(-2) = 0$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^5 x \frac{3}{6\sqrt{5} + 118} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \right) dx + \int_5^{+\infty} 0 dx \\ &= 0 + \frac{3}{6\sqrt{5} + 118} \int_1^5 x \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \right) dx + 0 \\ &= \frac{3}{6\sqrt{5} + 118} \int_1^5 \left( \frac{x}{\sqrt{x}} + x^3 \right) dx \\ &= \frac{3}{6\sqrt{5} + 118} \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^5 \\ &= \frac{3}{6\sqrt{5} + 118} \left( \frac{5\sqrt{5}}{3/2} + \frac{625}{4} - \frac{1}{3/2} - \frac{1}{4} \right) \\ E(X) &= \frac{40\sqrt{5} + 1864}{24\sqrt{5} + 472} \end{aligned}$$

# Chapitre 6

## Couples de variables aléatoires discrètes

### Exercice 48 :

On veut former un comité de 3 étudiants. Les candidats à ce comité sont : 2 garçons, 2 filles et 2 étrangers.

$X$  : "variable aléatoire : nombre de garçons dans le comité".

$Y$  : "variable aléatoire : nombre de filles dans le comité".

1. Calculer la loi du couple  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  ;
3. Calculer la distribution de  $X|Y = 1$  ;
4.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
5. Calculer le coefficient de corrélation et interpréter.

### Solution :

Pour former un comité de 3 étudiants, on doit les choisir parmi 2 garçons, 2 filles et 2 étrangers qui ont tous la même probabilité d'être sélectionné :

Garçon	Fille	Étranger
Garçon	Fille	Étranger

Cette situation d'équiprobabilité nous autorise à calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.1)$$

où  $\Omega$  désigne l'univers des possibilités. Un candidat ne peut être sélectionné qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, un comité est une

disposition non ordonnée et sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$ , il s'agit donc de combinaisons dont le nombre est donné par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (6.2)$$

Ainsi, le nombre de comités possibles de 3 individus choisis au hasard parmi 6 (2 garçons + 2 filles + 2 étrangers) est donné par :

$$\text{card}(\Omega) = C_6^3 = 20 \quad (6.3)$$

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de garçons dans le comité et  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de filles dans le comité. Ces deux variables peuvent prendre les valeurs  $\{0, 1, 2\}$  chacune.

Désignons par  $C_{n,m}$  un comité comportant  $n$  garçons et  $m$  filles. Cela correspond au couple  $(X = n, Y = m)$ .

1. Loi du couple  $(X, Y)$  :

La probabilité du couple  $(X = n, Y = m)$  est donnée par :

$$P(C_{n,m}) = \frac{\text{card}(C_{n,m})}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.4)$$

Nous avons déjà calculé  $\text{card}(\Omega)$  dans (6.64). Il reste à calculer  $\text{card}(C_{n,m})$  pour  $n, m \in \{0, 1, 2\}$  comme suit :

$$\text{card}(C_{0,1}) = C_2^0 C_2^1 C_2^2 = 1 \times 2 \times 1 = 2 \quad (6.5)$$

$$\text{card}(C_{0,2}) = C_2^0 C_2^2 C_2^1 = 1 \times 1 \times 2 = 2 \quad (6.6)$$

$$\text{card}(C_{1,0}) = C_2^1 C_2^0 C_2^2 = 2 \times 1 \times 1 = 2 \quad (6.7)$$

$$\text{card}(C_{1,1}) = C_2^1 C_2^1 C_2^1 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad (6.8)$$

$$\text{card}(C_{1,2}) = C_2^1 C_2^2 C_2^0 = 2 \times 1 \times 1 = 2 \quad (6.9)$$

$$\text{card}(C_{2,0}) = C_2^2 C_2^0 C_2^1 = 1 \times 1 \times 2 = 2 \quad (6.10)$$

$$\text{card}(C_{2,1}) = C_2^2 C_2^1 C_2^0 = 1 \times 2 \times 1 = 2 \quad (6.11)$$

**Exemple :**  $C_{0,1}$  est un comité ne comportant aucun garçon parmi les deux candidats masculins ( $C_2^0$ ) **ET** une fille parmi les deux candidates féminines ( $C_2^1$ ) **ET** pour compléter le comité, il faut choisir les 2 candidats qui manquent parmi les deux candidats étrangers ( $C_2^2$ ), soit  $C_2^0 C_2^1 C_2^2 = 1 \times 2 \times 1 = 2$  possibilités.

L'application de (6.65) pour  $n, m \in \{0, 1, 2\}$  donne la loi du couple  $(X, Y)$  suivante :

X \ Y	0	1	2	$\Sigma$
0	0	2/20	2/20	1/5
1	2/20	8/20	2/20	3/5
2	2/20	2/20	0	1/5
$\Sigma$	1/5	3/5	1/5	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  sont lues dans les marges du tableau ci-dessus :

$x$	$P(X = x)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\Sigma$	1

$y$	$P(Y = y)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\Sigma$	1

3. Distribution conditionnelle de  $X|Y = 1$  :

**Rappel :** Formule de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (6.12)$$

La probabilité d'un événement  $A$  conditionnellement à un événement  $B$  est le rapport entre la probabilité du couple  $(A, B)$  et la probabilité marginale de la condition  $B$ . Ainsi,

$$P(X|Y = 1) = \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} \quad (6.13)$$

On sait, d'une part, que  $P(Y = 1) = 3/5$  selon la distribution marginale de  $Y$ . D'autre part, la probabilité  $P(X = x, Y = 1)$  est à lire dans la colonne  $Y = 1$  pour différentes valeurs de  $x$  dans la tableau ci-dessus donnant la loi du couple  $(X, Y)$ .

On obtient la distribution conditionnelle suivante :

$x$	$P(X = x Y = 1) = P(X = x, Y = 1)/P(Y = 1)$
0	$(2/20)/(3/5) = 1/6$
1	$(8/20)/(3/5) = 4/6$
2	$(2/20)/(3/5) = 1/6$
$\Sigma$	1

4. Dépendance des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :

Comparons la distribution marginale de  $X$  et la distribution conditionnelle  $X|Y = 1$  :

$x$	$P(X)$	$P(X Y = 1)$
0	1/5	1/6
1	3/5	4/6
2	1/5	1/6
$\Sigma$	1	1

La distribution marginale  $X$  étant différente de la distribution conditionnelle  $X|Y = 1$ , on conclut que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dépendantes.

5. Coefficient de corrélation linéaire :

Le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  entre les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-1/5}{\sqrt{2/5}\sqrt{2/5}} = -1/2 \quad (6.14)$$

avec

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4/5 - 1 \times 1 = -1/5 \quad (6.15)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(x_i) = 1 \quad (6.16)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^3 y_j P(y_j) = 1 \quad (6.17)$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 P(x_i) = 11/5 \quad (6.18)$$

$$E(Y^2) = \sum_{j=1}^3 y_j^2 P(y_j) = 11/5 \quad (6.19)$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j P(x_i, y_j) = 4/5 \quad (6.20)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.21)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.22)$$

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	$\Sigma$
0	0	0	0	-
1	0	8/20	4/20	-
2	0	4/20	0	-
$\Sigma$	-	-	-	4/5

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i P(x_i)$	$x_i^2 P(x_i)$
0	1/5	0	0
1	3/5	3/5	3/5
2	1/5	2/5	4/5
$\Sigma$	1	1	7/5

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j P(y_j)$	$y_j^2 P(y_j)$
0	1/5	0	0
1	3/5	3/5	3/5
2	1/5	2/5	4/5
$\Sigma$	1	1	7/5

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire négatif ( $\rho(X, Y) = -1/2$ ) signifie qu'il y a une relation linéaire inverse entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Si le nombre de garçons dans le comité augmente, le nombre de filles baisse et vice versa.

#### Exercice 49 :

On veut former un comité de 3 étudiants. Les candidats à ce comité sont : 2 garçons, 2 filles et 2 étudiants étrangers.

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de garçons dans le comité et  $Y$  le nombre de filles dans le comité.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  et les distributions marginales de  $X$  et  $Y$ .
2. Calculer  $cov(X, Y)$  et le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

#### Solution :

Pour former un comité de 3 étudiants, on doit les choisir parmi 2 garçons, 2 filles et 2 étrangers qui ont tous la même probabilité d'être sélectionné :

Garçon	Fille	Étranger
Garçon	Fille	Étranger

Cette situation d'équiprobabilité nous autorise à calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.23)$$

où  $\Omega$  désigne l'univers des possibilités. Un candidat ne peut être sélectionné qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, un comité est une

disposition non ordonnée et sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$ , il s'agit donc de combinaisons dont le nombre est donné par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (6.24)$$

Ainsi, le nombre de comités possibles de 3 individus choisis au hasard parmi 6 (2 garçons + 2 filles + 2 étrangers) est donné par :

$$\text{card}(\Omega) = C_6^3 = 20 \quad (6.25)$$

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de garçons dans le comité et  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de filles dans le comité. Ces deux variables peuvent prendre les valeurs  $\{0, 1, 2\}$  chacune.

Désignons par  $C_{n,m}$  un comité comportant  $n$  garçons et  $m$  filles. Cela correspond au couple  $(X = n, Y = m)$ .

1. Distribution du couple  $(X, Y)$  et distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

La probabilité du couple  $(X = n, Y = m)$  est donnée par :

$$P(C_{n,m}) = \frac{\text{card}(C_{n,m})}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.26)$$

Nous avons déjà calculé  $\text{card}(\Omega)$  dans (6.64). Il reste à calculer  $\text{card}(C_{n,m})$  pour  $n, m \in \{0, 1, 2\}$  comme suit :

$$\text{card}(C_{0,1}) = C_2^0 C_2^1 C_2^2 = 1 \times 2 \times 1 = 2 \quad (6.27)$$

$$\text{card}(C_{0,2}) = C_2^0 C_2^2 C_2^1 = 1 \times 1 \times 2 = 2 \quad (6.28)$$

$$\text{card}(C_{1,0}) = C_2^1 C_2^0 C_2^2 = 2 \times 1 \times 1 = 2 \quad (6.29)$$

$$\text{card}(C_{1,1}) = C_2^1 C_2^1 C_2^1 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad (6.30)$$

$$\text{card}(C_{1,2}) = C_2^1 C_2^2 C_2^0 = 2 \times 1 \times 1 = 2 \quad (6.31)$$

$$\text{card}(C_{2,0}) = C_2^2 C_2^0 C_2^1 = 1 \times 1 \times 2 = 2 \quad (6.32)$$

$$\text{card}(C_{2,1}) = C_2^2 C_2^1 C_2^0 = 1 \times 2 \times 1 = 2 \quad (6.33)$$

**Exemple :**  $C_{0,1}$  est un comité ne comportant aucun garçon parmi les deux candidats masculins ( $C_2^0$ ) **ET** une fille parmi les deux candidates féminines ( $C_2^1$ ) **ET** pour compléter le comité, il faut choisir les 2 candidats qui manquent parmi les deux candidats étrangers ( $C_2^2$ ), soit  $C_2^0 C_2^1 C_2^2 = 1 \times 2 \times 1 = 2$  possibilités.

L'application de (6.65) pour  $n, m \in \{0, 1, 2\}$  donne la distribution du couple  $(X, Y)$  :

X \ Y	0	1	2	$\Sigma$
0	0	2/20	2/20	1/5
1	2/20	8/20	2/20	3/5
2	2/20	2/20	0	1/5
$\Sigma$	1/5	3/5	1/5	1

Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  sont lues dans les marges du tableau ci-dessus :

$x$	$P(X = x)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\Sigma$	1

$y$	$P(Y = y)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\Sigma$	1

2. Covariance  $cov(X, Y)$  et coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4/5 - 1 \times 1 = -1/5 \quad (6.34)$$

avec

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(x_i) = 1 \quad (6.35)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^3 y_j P(y_j) = 1 \quad (6.36)$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j P(x_i, y_j) = 4/5 \quad (6.37)$$

Le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  entre les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-1/5}{\sqrt{2/5}\sqrt{2/5}} = -1/2 \quad (6.38)$$

avec

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 P(x_i) = 7/5 \quad (6.39)$$

$$E(Y^2) = \sum_{j=1}^3 y_j^2 P(y_j) = 7/5 \quad (6.40)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.41)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.42)$$

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	$\Sigma$
0	0	0	0	-
1	0	8/20	4/20	-
2	0	4/20	0	-
$\Sigma$	-	-	-	4/5

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i P(x_i)$	$x_i^2 P(x_i)$
0	1/5	0	0
1	3/5	3/5	3/5
2	1/5	2/5	4/5
$\Sigma$	1	1	7/5

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j P(y_j)$	$y_j^2 P(y_j)$
0	1/5	0	0
1	3/5	3/5	3/5
2	1/5	2/5	4/5
$\Sigma$	1	1	7/5

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire négatif ( $\rho(X, Y) = -1/2$ ) signifie qu'il y a une relation linéaire inverse entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Si le nombre de garçons dans le comité augmente, le nombre de filles baisse et vice versa.

### Exercice 50 :

On veut former un comité de 2 étudiants. Les candidats à ce comité sont : 2 garçons, 2 filles et 2 étudiants étrangers.

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de garçons dans le comité et  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de filles dans le comité.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  et les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  ;
2. Calculer  $cov(X, Y)$  et le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

### Solution :

Pour former un comité de 2 étudiants, on doit les choisir parmi 2 garçons, 2 filles et 2 étrangers qui ont tous la même probabilité d'être sélectionné :

Garçon	Fille	Étranger
Garçon	Fille	Étranger

Cette situation d'équiprobabilité nous autorise à calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.43)$$

où  $\Omega$  désigne l'univers des possibilités. Un candidat ne peut être sélectionné qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, un comité est une disposition non ordonnée et sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$ , il s'agit donc de combinaisons dont le nombre est donné par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (6.44)$$

Ainsi, le nombre de comités possibles de 2 individus choisis au hasard parmi 6 (2 garçons + 2 filles + 2 étrangers) est donné par :

$$\text{card}(\Omega) = C_6^2 = 15 \quad (6.45)$$

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de garçons dans le comité et  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de filles dans le comité. Ces deux variables peuvent prendre les valeurs  $\{0, 1, 2\}$  chacune.

Désignons par  $C_{n,m}$  un comité comportant  $n$  garçons et  $m$  filles. Cela correspond au couple  $(X = n, Y = m)$ .

1. Distribution du couple  $(X, Y)$  et distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

La probabilité du couple  $(X = n, Y = m)$  est donnée par :

$$P(C_{n,m}) = \frac{\text{card}(C_{n,m})}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.46)$$

Nous avons déjà calculé  $\text{card}(\Omega)$  dans (6.64). Il reste à calculer  $\text{card}(C_{n,m})$  pour  $n, m \in \{0, 1, 2\}$  comme suit :

$$\text{card}(C_{0,0}) = C_2^0 C_2^0 C_2^2 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.47)$$

$$\text{card}(C_{0,1}) = C_2^0 C_2^1 C_2^1 = 1 \times 2 \times 2 = 4 \quad (6.48)$$

$$\text{card}(C_{0,2}) = C_2^0 C_2^2 C_2^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.49)$$

$$\text{card}(C_{1,0}) = C_2^1 C_2^0 C_2^1 = 2 \times 1 \times 2 = 4 \quad (6.50)$$

$$\text{card}(C_{1,1}) = C_2^1 C_2^1 C_2^0 = 2 \times 2 \times 1 = 4 \quad (6.51)$$

$$\text{card}(C_{2,0}) = C_2^2 C_2^0 C_2^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.52)$$

**Exemple :**  $C_{0,1}$  est un comité ne comportant aucun garçon parmi les deux candidats

masculins ( $C_2^0$ ) **ET** une fille parmi les deux candidates féminines ( $C_2^1$ ) **ET** pour compléter le comité, il faut choisir les 2 candidats qui manquent parmi les deux candidats étrangers ( $C_2^2$ ), soit  $C_2^0 C_2^1 C_2^2 = 1 \times 2 \times 1 = 2$  possibilités.

L'application de (6.65) pour  $n, m \in \{0, 1, 2\}$  donne la distribution du couple  $(X, Y)$  :

$X \setminus Y$	0	1	2	$\Sigma$
0	1/15	4/15	1/15	6/15
1	4/15	4/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
$\Sigma$	6/15	8/15	1/15	1

Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  sont lues dans les marges du tableau ci-dessus :

$x$	$P(X = x)$
0	6/15
1	8/15
2	1/15
$\Sigma$	1

$y$	$P(Y = y)$
0	6/15
1	8/15
2	1/15
$\Sigma$	1

2. Covariance  $cov(X, Y)$  et coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4/5 - 1 \times 1 = -1/5 \quad (6.53)$$

avec

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(x_i) = 1 \quad (6.54)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^3 y_j P(y_j) = 1 \quad (6.55)$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j P(x_i, y_j) = 4/5 \quad (6.56)$$

Le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  entre les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-1/5}{\sqrt{2/5}\sqrt{2/5}} = -1/2 \quad (6.57)$$

avec

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 P(x_i) = 7/5 \quad (6.58)$$

$$E(Y^2) = \sum_{j=1}^3 y_j^2 P(y_j) = 7/5 \quad (6.59)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.60)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.61)$$

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	$\Sigma$
0	0	0	0	-
1	0	4/15	0	-
2	0	0	0	-
$\Sigma$	-	-	-	4/15

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i P(x_i)$	$x_i^2 P(x_i)$
0	6/15	0	0
1	8/15	8/15	8/15
2	1/15	2/15	4/15
$\Sigma$	1	1	12/15

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j P(y_j)$	$y_j^2 P(y_j)$
0	6/15	0	0
1	8/15	8/15	8/15
2	1/15	2/15	4/15
$\Sigma$	1	1	12/15

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire négatif ( $\rho(X, Y) = -1/2$ ) signifie qu'il y a une relation linéaire inverse entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Si le nombre de garçons dans le comité augmente, le nombre de filles baisse et vice versa.

**Exercice 51 :**

On veut désigner un groupe de 2 représentants des étudiants à un forum international. Les candidats sont : 2 filles, 2 garçons et 2 étrangers. Soit :

$X$  : variable aléatoire désignant le nombre de garçons retenus dans le groupe.  $Y$  : variable aléatoire désignant le nombre d'étrangers retenus dans le groupe.

1. Calculer la loi du couple aléatoire  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$ .
3. Calculer les distributions conditionnelles suivantes :  $X|Y = 2$  et  $Y|X = 1$  ;
4. Calculer  $cov(X, Y)$  et  $\rho(X, Y)$ . Interpréter ;
5.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Solution :**

Pour former un groupe de 2 représentants des étudiants, on doit les choisir parmi 2 garçons, 2 filles et 2 étrangers qui ont tous la même probabilité d'être sélectionné :

Garçon	Fille	Étranger
Garçon	Fille	Étranger

Cette situation d'équiprobabilité nous autorise à calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.62)$$

où  $\Omega$  désigne l'univers des possibilités. Un représentant ne peut être sélectionné qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, un groupe de représentants est une disposition non ordonnée et sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$ , il s'agit donc de combinaisons dont le nombre est donné par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (6.63)$$

Ainsi, le nombre de groupes possibles de 2 étudiants choisis au hasard parmi 6 (2 garçons + 2 filles + 2 étrangers) est donné par :

$$\text{card}(\Omega) = C_6^2 = 15 \quad (6.64)$$

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de garçons dans le groupe et  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre d'étrangers dans le groupe. Ces deux variables peuvent prendre les valeurs  $\{0, 1, 2\}$  chacune.

Désignons par  $G_{n,m}$  un groupe comportant  $n$  garçons et  $m$  étrangers. Cela correspond au couple  $(X = n, Y = m)$ .

1. Loi du couple aléatoire  $(X, Y)$  :

La probabilité du couple  $(X = n, Y = m)$  est donnée par :

$$P(G_{n,m}) = \frac{\text{card}(G_{n,m})}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.65)$$

Nous avons déjà calculé  $\text{card}(\Omega)$  dans (6.64). Il reste à calculer  $\text{card}(G_{n,m})$  pour

$n, m \in \{0, 1, 2\}$  comme suit :

$$\text{card}(G_{0,0}) = C_2^0 C_2^0 C_2^2 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.66)$$

$$\text{card}(G_{0,1}) = C_2^0 C_2^1 C_2^1 = 1 \times 2 \times 2 = 4 \quad (6.67)$$

$$\text{card}(G_{0,2}) = C_2^0 C_2^2 C_2^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.68)$$

$$\text{card}(G_{1,0}) = C_2^1 C_2^0 C_2^1 = 2 \times 1 \times 2 = 4 \quad (6.69)$$

$$\text{card}(G_{1,1}) = C_2^1 C_2^1 C_2^0 = 2 \times 2 \times 1 = 4 \quad (6.70)$$

$$\text{card}(G_{2,0}) = C_2^2 C_2^0 C_2^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.71)$$

**Exemple :**  $G_{0,1}$  est un groupe ne comportant aucun garçon parmi les deux étudiants masculins ( $C_2^0$ ) **ET** un étranger parmi les deux étrangers ( $C_2^1$ ) **ET** pour compléter le groupe, il faut choisir les 2 représentants qui manquent parmi les deux filles ( $C_2^2$ ), soit  $C_2^0 C_2^1 C_2^2 = 1 \times 2 \times 1 = 2$  possibilités.

L'application de (6.65) pour  $n, m \in \{0, 1, 2\}$  donne la distribution du couple  $(X, Y)$  :

X \ Y	0	1	2	$\Sigma$
0	1/15	4/15	1/15	6/15
1	4/15	4/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
$\Sigma$	6/15	8/15	1/15	1

## 2. Distributions marginales de $X$ et de $Y$ :

Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  sont lues dans les marges du tableau ci-dessus :

$x$	$P(X = x)$
0	6/15
1	8/15
2	1/15
$\Sigma$	1

$y$	$P(Y = y)$
0	6/15
1	8/15
2	1/15
$\Sigma$	1

## 3. Distributions conditionnelles de $X|Y = 2$ et de $Y|X = 1$ :

— Distribution conditionnelle  $X|Y = 2$  :

La probabilité conditionnelle  $P(X|Y = 2)$  est donnée par la formule de Bayes suivante :

$$P(X|Y = 2) = \frac{P(X = x_i, Y = 2)}{P(Y = 2)}, \quad \forall x_i \in \{0, 1, 2\} \quad (6.72)$$

où  $P(X = x_i, Y = 2)$  est la probabilité du couple  $(X = x_i, Y = 2)$ ,  $\forall x_i \in \{0, 1, 2\}$  et  $P(Y = 2)$  la probabilité marginale de  $Y = 2$ . L'application de cette

formule donne la distribution conditionnelle de  $X|Y = 2$  suivante :

$x_i$	$P(X = x_i Y = 2) = P(X = x_i, Y = 2)/P(Y = 2)$
0	$(1/15)/(1/15)=1$
1	$0/(1/15)=0$
2	$0/(1/15)=0$
$\Sigma$	1

— Distribution conditionnelle  $Y|X = 1$  :

La probabilité conditionnelle  $P(Y|X = 1)$  est donnée par la formule de Bayes suivante :

$$P(Y|X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = y_j)}{P(X = 1)}, \quad \forall y_j \in \{0, 1, 2\} \quad (6.73)$$

où  $P(X = 1, Y = y_j)$  est la probabilité du couple  $(X = 1, Y = y_j)$ ,  $\forall y_j \in \{0, 1, 2\}$  et  $P(X = 1)$  la probabilité marginale de  $X = 1$ . L'application de cette formule donne la distribution conditionnelle de  $Y|X = 1$  suivante :

$y_j$	$P(Y = y_j X = 1) = P(X = 1, Y = y_j)/P(X = 1)$
0	$(4/15)/(8/15)=1/2$
1	$(4/15)/(8/15)=1/2$
2	$0/(8/15)=0$
$\Sigma$	1

4. Covariance  $cov(X, Y)$  et coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4/5 - 1 \times 1 = -1/5 \quad (6.74)$$

avec

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(x_i) = 1 \quad (6.75)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^3 y_j P(y_j) = 1 \quad (6.76)$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j P(x_i, y_j) = 4/5 \quad (6.77)$$

Le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  entre les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-1/5}{\sqrt{2/5}\sqrt{2/5}} = -1/2 \quad (6.78)$$

avec

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 P(x_i) = 7/5 \quad (6.79)$$

$$E(Y^2) = \sum_{j=1}^3 y_j^2 P(y_j) = 7/5 \quad (6.80)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.81)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 7/5 - 1^2 = 2/5 \quad (6.82)$$

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	$\Sigma$
0	0	0	0	-
1	0	4/15	0	-
2	0	0	0	-
$\Sigma$	-	-	-	4/15

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i P(x_i)$	$x_i^2 P(x_i)$
0	6/15	0	0
1	8/15	8/15	8/15
2	1/15	2/15	4/15
$\Sigma$	1	1	12/15

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j P(y_j)$	$y_j^2 P(y_j)$
0	6/15	0	0
1	8/15	8/15	8/15
2	1/15	2/15	4/15
$\Sigma$	1	1	12/15

5. Dépendance de  $X$  et  $Y$  :

Un coefficient de corrélation linéaire négatif ( $\rho(X, Y) = -1/2$ ) signifie qu'il y a une relation linéaire inverse entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Si le nombre de garçons dans le comité augmente, le nombre d'étrangers baisse et vice versa. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont donc dépendantes.

### Exercice 52 :

On veut désigner deux représentants des étudiants à un forum international. Les candidats sont : deux filles, deux garçons et un étranger. Soit :

$X$  : variable aléatoire désignant le nombre de garçons retenus dans le groupe.  $Y$  : variable aléatoire désignant le nombre de filles retenues dans le groupe.

1. Calculer la loi du couple aléatoire  $(X, Y)$  ?
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  ;
3. Calculer les distributions conditionnelles suivantes :  $X|Y = 2$  et  $Y|X = 1$  ;
4. Calculer  $cov(X, Y)$  et  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

5.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Solution :**

Les 2 représentants des étudiants à un forum international sont choisis au hasard dans un groupe d'étudiants comportant 2 filles, 2 garçons et 1 étranger. Ils ont tous la même probabilité d'être sélectionné :

File	File	Garçon	Garçon	Étranger
------	------	--------	--------	----------

Cette situation d'équiprobabilité nous permet de calculer la probabilité d'un événement  $E$  selon la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.83)$$

où  $\Omega$  désigne l'univers des possibilités. Un candidat ne peut être sélectionné qu'une seule fois et peu importe l'ordre dans lequel il est choisi. Par conséquent, les candidats désignés constituent une disposition non ordonnée et sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$ , il s'agit de combinaisons dont le nombre est donné par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (6.84)$$

Ainsi, le nombre de dispositions possibles de 2 éléments parmi 5 (2 filles + 2 garçons + 1 étranger) est donné par :

$$\text{card}(\Omega) = C_5^2 = 10 \quad (6.85)$$

Notons respectivement  $X$  et  $Y$  le nombre de garçons et le nombre de filles retenues dans le groupe. Ces deux variables peuvent prendre les valeurs  $\{0, 1, 2\}$  chacune.

Désignons par  $G_{x_i, y_j}$  un groupe comportant  $n$  garçons et  $m$  filles. Cela correspond au couple  $(X = x_i, Y = y_j)$ .

1. Loi du couple aléatoire  $(X, Y)$  :

La probabilité du couple  $(X = x_i, Y = y_j)$  est donnée par :

$$P(G_{x_i, y_j}) = \frac{\text{card}(G_{x_i, y_j})}{\text{card}(\Omega)} \quad (6.86)$$

Nous avons déjà calculé  $\text{card}(\Omega)$  dans (6.85). Il reste à calculer  $\text{card}(G_{x_i, y_j})$  pour  $x_i, y_j \in \{0, 1, 2\}$  comme suit :

$$\text{card}(G_{0,1}) = C_2^0 C_2^1 C_1^1 = 1 \times 2 \times 1 = 2 \quad (6.87)$$

$$\text{card}(G_{0,2}) = C_2^0 C_2^2 C_1^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.88)$$

$$\text{card}(G_{1,0}) = C_2^1 C_2^0 C_1^1 = 2 \times 1 \times 1 = 2 \quad (6.89)$$

$$\text{card}(G_{1,1}) = C_2^1 C_2^1 C_1^0 = 2 \times 2 \times 1 = 4 \quad (6.90)$$

$$\text{card}(G_{2,0}) = C_2^2 C_2^0 C_1^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (6.91)$$

**Exemple :**  $\text{card}(G_{0,1})$  est un groupe ne comportant aucun garçon parmi les deux candidats masculins ( $C_2^0$ ) **ET** une fille parmi les deux candidates féminines ( $C_2^1$ ) **ET** pour compléter le groupe, il faut choisir l'individu qui manque parmi l'unique étranger disponible ( $C_1^1$ ), soit  $C_2^0 C_2^1 C_1^1 = 1 \times 2 \times 1 = 2$  possibilités.

En appliquant (6.86), on obtient la probabilité du couple  $(X = x_i, Y = y_j)$ ,  $\forall x_i, y_j \in \{0, 1, 2\}$  :

$x_i \setminus y_j$	0	1	2	$\Sigma$
0	0	2/10	1/10	3/10
1	2/10	4/10	0	6/10
2	1/10	0	0	1/10
$\Sigma$	3/10	6/10	1/10	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  sont lues dans les marges du tableau précédent :

$x_i$	$P(X = x_i)$
0	3/10
1	6/10
2	1/10
$\Sigma$	1

$y_j$	$P(Y = y_j)$
0	3/10
1	6/10
2	1/10
$\Sigma$	1

3. Distributions conditionnelles  $X|Y = 2$  et  $Y|X = 1$  :

— Distribution conditionnelle  $X|Y = 2$  :

La probabilité conditionnelle  $P(X|Y = 2)$  est donnée par la formule de Bayes suivante :

$$P(X|Y = 2) = \frac{P(X = x_i, Y = 2)}{P(Y = 2)}, \forall x_i \in \{0, 1, 2\} \quad (6.92)$$

où  $P(X = x_i, Y = 2)$  est la probabilité du couple  $(X = x_i, Y = 2)$ ,  $\forall x_i \in \{0, 1, 2\}$  et  $P(Y = 2)$  la probabilité marginale de  $Y = 2$ . L'application de cette formule donne la distribution conditionnelle de  $X|Y = 2$  suivante :

$x_i$	$P(X = x_i Y = 2) = P(X = x_i, Y = 2)/P(Y = 2)$
0	$(1/10)/(1/10)=1$
1	$0/(1/10)=0$
2	$0/(1/10)=0$
$\Sigma$	1

— Distribution conditionnelle  $Y|X = 1$  :

La probabilité conditionnelle  $P(Y|X = 1)$  est donnée par la formule de Bayes suivante :

$$P(Y|X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = y_j)}{P(X = 1)}, \quad \forall y_j \in \{0, 1, 2\} \quad (6.93)$$

où  $P(X = 1, Y = y_j)$  est la probabilité du couple  $(X = 1, Y = y_j)$ ,  $\forall y_j \in \{0, 1, 2\}$  et  $P(X = 1)$  la probabilité marginale de  $X = 1$ . L'application de cette formule donne la distribution conditionnelle de  $Y|X = 1$  suivante :

$y_j$	$P(Y = y_j X = 1) = P(X = 1, Y = y_j)/P(X = 1)$
0	$(2/10)/(6/10)=1/3$
1	$(4/10)/(6/10)=2/3$
2	$0/(6/10)=0$
$\Sigma$	1

4. Covariance et coefficient de corrélation linéaire :

- Covariance  $cov(X, Y)$  :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = -\frac{6}{25} \quad (6.94)$$

avec

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i) = 4/5 \quad (6.95)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^3 y_j P(Y = y_j) = 4/5 \quad (6.96)$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = 2/5 \quad (6.97)$$

$x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)$	0	1	2	$\Sigma$
0	0	0	0	-
1	0	4/10	0	-
2	0	0	0	-
$\Sigma$	-	-	-	2/5

$x_i$	$P(X = x_i)$	$x_i P(X = x_i)$	$x_i^2 P(X = x_i)$	$y_j$	$P(Y = y_j)$	$y_j P(Y = y_j)$	$y_j^2 P(Y = y_j)$
0	3/10	0	0	0	3/10	0	0
1	6/10	6/10	6/10	1	6/10	6/10	6/10
2	1/10	2/10	8/10	2	1/10	2/10	8/10
$\Sigma$	1	4/5	7/5	$\Sigma$	1	4/5	7/5

- Coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = -\frac{6/25}{\sqrt{19/25}\sqrt{19/25}} = -\frac{6}{19} \quad (6.98)$$

avec

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{7}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{19}{25} \quad (6.99)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{7}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{19}{25} \quad (6.100)$$

#### 5. Dépendance de $X$ et $Y$ :

Le coefficient de corrélation linéaire étant différent de zéro, on conclut que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dépendantes. Plus précisément, il y a une corrélation linéaire décroissante entre ces deux variables aléatoires. Si l'une augmente, l'autre baisse et vice versa.

#### Exercice 53 :

On distribue quatre étudiants inscrits en retard dans deux groupes de TD (A et B). On note  $X$  le nombre d'étudiants affectés au groupe A et  $Y$  le nombre d'étudiants affectés au groupe B.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  ;
3. Calculer  $\text{cov}(X, Y)$  et le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

#### Solution :

On veut affecter les 4 étudiants inscrits en retard à deux groupes de TD : le groupe A et le groupe B. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre d'étudiants affectés au groupe A, elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4 et  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre d'étudiants affectés au groupe B, elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4. On note au passage que  $X + Y = 4$  puisque la somme des étudiants affectés au groupe A et ceux affectés au groupe B est égale au nombre total des étudiants inscrits en retard, 4 en l'occurrence.

Dans un premier temps, on commence par tirer au hasard le groupe auquel on va affecter le premier étudiant, il y a une probabilité de  $1/2$  de choisir le groupe A et une probabilité de  $1/2$  de choisir le groupe B. Ensuite, on choisit au hasard un étudiant parmi les 4 qu'on affectera au groupe qu'on a tiré au hasard. Dans un deuxième temps, on tire au hasard une deuxième fois le groupe auquel on va affecter le deuxième étudiant, on a toujours la même probabilité  $1/2$  de tirer un groupe de TD ou l'autre. Puis, on choisit au hasard un étudiant parmi les 3 qui restent et qu'on va affecter au groupe qu'on vient de tirer au hasard et ainsi de suite jusqu'au dernier étudiant.

Formellement, supposons par exemple que les deux premiers étudiants seront affectés au groupe A et les 2 qui restent au groupe B. Cela correspond au couple  $(X = 2, Y = 2)$ . On peut procéder comme suit :

1. Tirer le groupe A la première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter 1 étudiant parmi les 4 disponibles, soit  $C_4^1 = 4$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_4^1)$  ;
2. **ET** tirer le groupe A une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter 1 étudiant parmi les 3 qui restent, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_3^1)$  ;
3. **ET** tirer le groupe B une première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter 1 étudiant parmi les 2 qui restent, soit  $C_2^1 = 2$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_2^1)$  ;
4. **ET** tirer le groupe B une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter le seul étudiant qui reste, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité  $(\frac{1}{2} \times C_1^1)$ .

Attention ! Procéder de cette manière peut laisser entendre que les étudiants sont numérotés auquel cas affecter l'étudiant numéro 1 en premier et l'étudiant numéro 2 en deuxième est une disposition différente d'affecter l'étudiant numéro 2 en premier et l'étudiant numéro 1 en deuxième. Or, rien dans l'énoncé n'indique que les étudiants sont numérotés et peu importe quel étudiant est affecté en premier ou en deuxième lieu. Il faut donc en tenir compte dans le calcul des probabilités.

La probabilité du couple  $(X = 2, Y = 2)$  peut donc s'écrire :

$$P(X = 2, Y = 2) = \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_4^1 \times \frac{1}{2} \times C_3^1}{2!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times C_1^1}{2!} \right] \quad (6.101)$$

$$= \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{C_4^1 C_3^1}{2!} \right] \times \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{C_2^1 C_1^1}{2!} \right] \quad (6.102)$$

Les dénominateurs  $2!$  et  $2!$  sont respectivement le nombre de permutations de 2 et de 2 éléments discernables. Ils sont introduits pour omettre l'ordre dans l'affectation des 2 étudiants au groupe A (premiers crochets) et dans l'affectation des 2 étudiants au groupe B (derniers crochets).

Notons que l'on peut aisément vérifier les résultats suivants :

$$\frac{C_4^1 C_3^1}{2!} = C_4^2 \qquad \frac{C_2^1 C_1^1}{2!} = C_2^2 \quad (6.103)$$

On peut donc écrire :

$$P(X = 2, Y = 2) = \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 C_4^2 \right] \times \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 C_2^2 \right] \quad (6.104)$$

ou encore :

$$P(X = 2, Y = 2) = \left( \frac{1}{2} \right)^2 C_4^2 \left( \frac{1}{2} \right)^{4-2} C_{4-2}^2 \quad (6.105)$$

Plus généralement, si l'on affecte au groupe A un nombre  $n \leq 4$  d'étudiants, alors on a :

$$P(X = n, Y = 4 - n) = \left( \frac{1}{2} \right)^n C_4^n \left( \frac{1}{2} \right)^{4-n} C_{4-n}^{4-n} \quad (6.106)$$

1. En utilisant cette formule générale, on peut calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .  
Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	$\Sigma$
0	0	0	0	0	1/16	1/16
1	0	0	0	4/16	0	4/16
2	0	0	6/16	0	0	6/16
3	0	4/16	0	0	0	4/16
4	1/16	0	0	0	0	1/16
$\Sigma$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales sont lues sur les marges du tableau précédent :

$x$	$P(X = x)$	$y$	$P(Y = y)$
0	1/16	0	1/16
1	4/16	1	4/16
2	6/16	2	6/16
3	4/16	3	4/16
4	1/16	4	1/16
$\Sigma$	1	$\Sigma$	1

3. Calcul de la covariance  $cov(X, Y)$  et du coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (6.107)$$

avec :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i y_j P(x_i, y_j) \quad (6.108)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P(x_i) \quad (6.109)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j P(y_j) \quad (6.110)$$

**Espérances mathématiques  $E(X)$  et  $E(Y)$  :**

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
0	1/16	0	0
1	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16
3	4/16	12/16	36/16
4	1/16	4/16	16/16
$\Sigma$	1	2	5

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j \cdot P(y_j)$	$y_j^2 \cdot P(y_j)$
0	1/16	0	0
1	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16
3	4/16	12/16	36/16
4	1/16	4/16	16/16
$\Sigma$	1	2	5

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P(x_i) = 2 \quad E(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j \cdot P(y_j) = 2 \quad (6.111)$$

Il reste à calculer  $E(XY)$  dans le tableau suivant :

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	3	4	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	-
1	0	0	0	12/16	0	-
2	0	0	24/16	0	0	-
3	0	12/16	0	0	0	-
4	0	0	0	0	0	-
$\Sigma$	-	-	-	-	-	3

Ainsi,  $E(XY) = 3$  et subséquemment :

$$cov(X, Y) = 3 - 2 \times 2 \quad (6.112)$$

$$= -1 \quad (6.113)$$

Enfin, le coefficient de corrélation linéaire entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.114)$$

Or, les variances  $V(X)$  et  $V(Y)$  sont :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot P(x_i) - 2^2 = 5 - 4 = 1 \quad (6.115)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j^2 \cdot P(y_j) - 2^2 = 5 - 4 = 1 \quad (6.116)$$

Il en résulte :

$$\rho(X, Y) = \frac{-1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}} \quad (6.117)$$

$$= -1 \quad (6.118)$$

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire égal à -1 signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont parfaitement inversement corrélées, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse dans les mêmes proportions et vice versa.

**Exercice 54 :**

On distribue 5 étudiants inscrits en retard dans deux groupes A et C. On note  $X$  le nombre d'étudiants affectés au groupe A et  $Y$  le nombre d'étudiants affectés au groupe C.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  ;
3. Montrer qu'on peut calculer ces distributions marginales sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$ .
4. Calculer  $\text{cov}(X, Y)$  et le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

**Solution :**

On veut affecter les 5 étudiants inscrits en retard à deux groupes A et B. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre d'étudiants affectés au groupe A, elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 et  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre d'étudiants affectés au groupe C, elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. On note au passage que  $X + Y = 5$  puisque la somme des étudiants affectés au groupe A et ceux affectés au groupe C est égale au nombre total des étudiants inscrits en retard, 5 en l'occurrence.

Dans un premier temps, on commence par tirer au hasard le groupe auquel on va affecter le premier étudiant, il y a une probabilité de 1/2 de choisir le groupe A et une probabilité

de  $1/2$  de choisir le groupe C. Ensuite, on choisit au hasard un étudiant parmi les 5 qu'on affectera au groupe qu'on a tiré au hasard. Dans un deuxième temps, on tire au hasard une deuxième fois le groupe auquel on va affecter le deuxième étudiant, on a toujours la même probabilité  $1/2$  de tirer le groupe A ou le groupe C. Puis, on choisit au hasard un étudiant parmi les 4 qui restent et qu'on va affecter au groupe qu'on vient de tirer au hasard et ainsi de suite jusqu'au dernier étudiant.

Formellement, supposons par exemple que les deux premiers étudiants seront affectés au groupe A et les 3 qui restent au groupe C. Cela correspond au couple  $(X = 2, Y = 3)$ . On peut procéder comme suit :

1. Tirer le groupe A la première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter 1 étudiant parmi les 5 disponibles, soit  $C_5^1 = 5$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_5^1)$ ;
2. **ET** tirer le groupe A une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter 1 étudiant parmi les 4 qui restent, soit  $C_4^1 = 4$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_4^1)$ ;
3. **ET** tirer le groupe C une première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter 1 étudiant parmi les 3 qui restent, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_3^1)$ ;
4. **ET** tirer le groupe C une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter 1 étudiant parmi les 2 qui restent, soit  $C_2^1 = 2$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_2^1)$ ;
5. **ET** tirer le groupe C une troisième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** lui affecter le seul étudiant qui reste, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité  $(\frac{1}{2} \times C_1^1)$ .

Attention ! Procéder de cette manière peut laisser entendre que les étudiants sont numérotés auquel cas affecter l'étudiant numéro 1 en premier et l'étudiant numéro 2 en deuxième est une disposition différente d'affecter l'étudiant numéro 2 en premier et l'étudiant numéro 1 en deuxième. Or, rien dans l'énoncé n'indique que les étudiants sont numérotés et peu importe quel étudiant est affecté en premier ou en deuxième lieu. Il faut donc en tenir compte dans le calcul des probabilités.

La probabilité du couple  $(X = 2, Y = 3)$  peut donc s'écrire :

$$P(X = 2, Y = 3) = \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_5^1 \times \frac{1}{2} \times C_4^1}{2!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_3^1 \times \frac{1}{2} \times C_2^1 \times C_1^1}{3!} \right] \quad (6.119)$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{C_5^1 C_4^1}{2!} \right] \times \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{3!} \right] \quad (6.120)$$

Les dénominateurs  $2!$  et  $3!$  sont respectivement le nombre de permutations de 2 et de 3 éléments discernables. Ils sont introduits pour omettre l'ordre dans l'affectation des 2 étudiants au groupe A (premiers crochets) et dans l'affectation des 3 étudiants au groupe C (derniers crochets).

Notons que l'on peut aisément vérifier les résultats suivants :

$$\frac{C_5^1 C_4^1}{2!} = C_5^2 \qquad \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{3!} = C_3^3 \quad (6.121)$$

On peut donc écrire :

$$P(X = 2, Y = 3) = \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 C_5^2 \right] \times \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 C_3^3 \right] \quad (6.122)$$

ou encore :

$$P(X = 2, Y = 3) = \left( \frac{1}{2} \right)^2 C_5^2 \left( \frac{1}{2} \right)^{5-2} C_{5-2}^{5-2} \quad (6.123)$$

Plus généralement, si l'on affecte au groupe A un nombre  $n \leq 5$  d'étudiants, alors on a :

$$P(X = n, Y = 5 - n) = \left( \frac{1}{2} \right)^n C_5^n \left( \frac{1}{2} \right)^{5-n} C_{5-n}^{5-n} \quad (6.124)$$

1. En utilisant cette formule générale, on peut calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .  
Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	5	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	1/32	1/32
1	0	0	0	0	5/32	0	5/32
2	0	0	0	10/32	0	0	10/32
3	0	0	10/32	0	0	0	10/32
4	0	5/32	0	0	0	0	5/32
5	1/32	0	0	0	0	0	1/32
$\Sigma$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales sont lues sur les marges du tableau précédent :

$x$	$P(X = x)$	$y$	$P(Y = y)$
0	1/32	0	1/32
1	5/32	1	5/32
2	10/32	2	10/32
3	10/32	3	10/32
4	5/32	4	5/32
5	1/32	5	1/32
$\Sigma$	1	$\Sigma$	1

3. Les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  peuvent se calculer sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$  car selon la formule (6.225) la probabilité du couple  $(X, Y)$

est entièrement déterminée par le nombre  $n$  d'étudiants affectés au groupe A tandis que le nombre  $5 - n$  d'étudiants affectés au groupe C n'intervient qu'indirectement. On peut donc écrire :

$$P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_5^n \left(\frac{1}{2}\right)^{5-n} C_{5-n}^{5-n} \quad (6.125)$$

De la même manière, comme  $X + Y = 5$ , on en déduit que  $Y = 5 - X$ . Si  $X = n$  alors  $Y = 5 - n = m$ . D'où :

$$P(Y = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-m} C_5^{5-m} \left(\frac{1}{2}\right)^m C_m^m \quad (6.126)$$

4. Calcul de la covariance  $cov(X, Y)$  et du coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (6.127)$$

avec :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 x_i y_j P(x_i, y_j) \quad (6.128)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i P(x_i) \quad (6.129)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^6 y_j P(y_j) \quad (6.130)$$

**Espérances mathématiques  $E(X)$  et  $E(Y)$  :**

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
0	1/32	0	0
1	5/32	5/32	5/32
2	10/32	20/32	40/32
3	10/32	30/32	90/32
4	5/32	20/32	80/32
5	1/32	5/32	25/32
$\Sigma$	1	2.5	7.5

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j \cdot P(y_j)$	$y_j^2 \cdot P(y_j)$
0	1/32	0	0
1	5/32	5/32	5/32
2	10/32	20/32	40/32
3	10/32	30/32	90/32
4	5/32	20/32	80/32
5	1/32	5/32	25/32
$\Sigma$	1	2.5	7.5

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot P(x_i) = 2.5 \quad E(Y) = \sum_{j=1}^6 y_j \cdot P(y_j) = 2.5 \quad (6.131)$$

Il reste à calculer  $E(XY)$  dans le tableau suivant :

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	3	4	5	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	0	-
1	0	0	0	0	20/32	0	-
2	0	0	0	60/32	0	0	-
3	0	0	60/32	0	0	0	-
4	0	20/32	0	0	0	0	-
5	0	0	0	0	0	0	-
$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	5

Ainsi,  $E(XY) = 5$  et subséquemment :

$$cov(X, Y) = 5 - 2.5 \times 2.5 \quad (6.132)$$

$$= -1.25 \quad (6.133)$$

Enfin, le coefficient de corrélation linéaire entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.134)$$

Or, les variances  $V(X)$  et  $V(Y)$  sont :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 \cdot P(x_i) - (2.5)^2 = 7.5 - 6.25 = 1.25 \quad (6.135)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \sum_{j=1}^6 y_j^2 \cdot P(y_j) - (2.5)^2 = 7.5 - 6.25 = 1.25 \quad (6.136)$$

Il en résulte :

$$\rho(X, Y) = \frac{-1.25}{\sqrt{1.25} \cdot \sqrt{1.25}} \quad (6.137)$$

$$= -1 \quad (6.138)$$

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire égal à -1 signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont parfaitement inversement corrélées, c'est à dire si

l'une augmente l'autre baisse dans les mêmes proportions et vice versa.

**Exercice 55 :**

Un fournisseur veut vendre six voitures à deux sociétés de transport A et B. On note  $X$  le nombre de voitures achetées par A et  $Y$  le nombre de voitures achetées par B.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  ;
3. Montrer qu'on peut calculer ces distributions marginales sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$  ;
4. Calculer  $cov(X, Y)$  et le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

**Solution :**

Le fournisseur veut vendre ses 6 voitures à deux sociétés de transport A et B. Il ne peut donc vendre plus de voitures que ce qu'il en a à sa disposition, c'est à dire 6. On suppose qu'il les vend toutes et qu'il n'en garde aucune.

$X$  est la variable aléatoire représentant le nombre de voitures achetées par la société A. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.  $Y$  est la variable aléatoire représentant le nombre de voitures achetées par la société B. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. On note au passage que  $X + Y = 6$  puisque la somme des voitures achetées par la société A et celles achetées par la société B est égale au nombre de voitures disponibles chez le fournisseur, 6 en l'occurrence.

Dans un premier temps, le fournisseur commence par tirer au hasard la société à laquelle il va vendre la première voiture, il a une probabilité de 1/2 de choisir la société A et une probabilité de 1/2 de choisir la société B. Ensuite, il choisit au hasard une voiture parmi les 6 qu'il vendra à la société qu'il a tirée au hasard. Dans un deuxième temps, le fournisseur tire au hasard une deuxième fois la société à laquelle il va vendre la deuxième voiture, il a toujours la même probabilité 1/2 de tirer l'une ou l'autre. Puis, il choisit au hasard une voiture parmi les 5 qui restent et qu'il va vendre à la société qu'il vient de tirer au hasard et ainsi de suite jusqu'à la dernière voiture.

Formellement, supposons par exemple que les deux premières voitures seront vendues à la société A et les 4 qui restent à la société B. Cela correspond au couple  $(X = 2, Y = 4)$ .

Le fournisseur peut procéder comme suit :

1. Tirer la société A la première fois avec une probabilité 1/2 **ET** la société A choisit 1 voiture parmi les 6 disponibles, soit  $C_6^1 = 6$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_6^1)$  ;
2. **ET** tirer la société A une deuxième fois avec une probabilité 1/2 **ET** la société A choisit 1 voiture parmi les 5 qui restent, soit  $C_5^1 = 5$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_5^1)$  ;
3. **ET** tirer la société B une première fois avec une probabilité 1/2 **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 4 qui restent, soit  $C_4^1 = 4$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_4^1)$  ;

4. **ET** tirer la société B une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 3 qui restent, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_3^1)$  ;
5. **ET** tirer la société B une troisième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 2 qui restent, soit  $C_2^1 = 2$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_2^1)$  ;
6. **ET** tirer la société B une quatrième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit l'unique voiture qui reste, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité  $(\frac{1}{2} \times C_1^1)$ .

Attention ! Procéder de cette manière peut laisser entendre que les voitures sont numérotées auquel cas vendre la voiture numéro 1 en premier et la voiture numéro 2 en deuxième est une disposition différente de vendre la voiture numéro 2 en premier et la voiture numéro 1 en deuxième. Or, rien dans l'énoncé n'indique que les voitures sont numérotées et peu importe quelle voiture est vendue en premier ou en deuxième lieu. Il faut donc en tenir compte dans le calcul des probabilités.

La probabilité du couple  $(X = 2, Y = 4)$  peut donc s'écrire :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_6^1 \times \frac{1}{2} \times C_5^1}{2!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_4^1 \times \frac{1}{2} \times C_3^1 \times \frac{1}{2} \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times C_1^1}{4!} \right]$$

Société A Société B

(6.139)

$$= \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{C_6^1 C_5^1}{2!} \right] \times \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{4!} \right]$$
(6.140)

Les dénominateurs  $2!$  et  $4!$  sont respectivement le nombre de permutations de 2 et de 4 éléments discernables. Ils sont introduits pour omettre l'ordre dans la vente des 2 voitures à la société A (premiers crochets) et dans la vente des 4 voitures à la société B (derniers crochets).

Notons que l'on peut aisément vérifier les résultats suivants :

$$\frac{C_6^1 C_5^1}{2!} = C_6^2$$
(6.141)

$$\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{4!} = C_4^4$$
(6.142)

On peut donc écrire :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_6^2 \right] \times \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^4 C_4^4 \right]$$
(6.143)

ou encore :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} C_{6-2}^{6-2}$$
(6.144)

Plus généralement, si la société A achète un nombre  $n \leq 6$  de voitures, alors on a :

$$P(X = n, Y = 6 - n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_6^n \left(\frac{1}{2}\right)^{6-n} C_{6-n}^{6-n} \quad (6.145)$$

1. En utilisant cette formule générale, on peut calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .

Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	0	1/64	1/64
1	0	0	0	0	0	6/64	0	6/64
2	0	0	0	0	15/64	0	0	15/64
3	0	0	0	20/64	0	0	0	20/64
4	0	0	15/64	0	0	0	0	15/64
5	0	6/64	0	0	0	0	0	6/64
6	1/64	0	0	0	0	0	0	1/64
$\Sigma$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales sont lues sur les marges du tableau précédent :

$x$	$P(X = x)$
0	1/64
1	6/64
2	15/64
3	20/64
4	15/64
5	6/64
6	1/64
$\Sigma$	1

$y$	$P(Y = y)$
0	1/64
1	6/64
2	15/64
3	20/64
4	15/64
5	6/64
6	1/64
$\Sigma$	1

3. Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  peuvent se calculer sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$  car selon la formule (6.225) la probabilité du couple  $(X, Y)$  est entièrement déterminée par le nombre  $n$  de voitures achetées par la société A tandis que le nombre  $6 - n$  de voitures achetées par la société B n'intervient

qu'indirectement. On peut donc écrire :

$$P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_6^n \left(\frac{1}{2}\right)^{6-n} C_6^{6-n} \quad (6.146)$$

De la même manière, comme  $X + Y = 6$ , on en déduit que  $Y = 6 - X$ . Si  $X = n$  alors  $Y = 6 - n = m$ . D'où :

$$P(Y = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-m} C_6^{6-m} \left(\frac{1}{2}\right)^m C_m^m \quad (6.147)$$

4. Calcul de la covariance  $cov(X, Y)$  et du coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (6.148)$$

avec :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 x_i y_j P(x_i, y_j) \quad (6.149)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^7 x_i P(x_i) \quad (6.150)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j P(y_j) \quad (6.151)$$

**Espérances mathématiques**  $E(X)$  et  $E(Y)$  :

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
0	1/64	0	0
1	6/64	6/64	6/64
2	15/64	30/64	60/64
3	20/64	60/64	180/64
4	15/64	60/64	240/64
5	6/64	30/64	150/64
6	1/64	6/64	36/64
$\Sigma$	1	3	10.5

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j \cdot P(y_j)$	$y_j^2 \cdot P(y_j)$
0	1/64	0	0
1	6/64	6/64	6/64
2	15/64	30/64	60/64
3	20/64	60/64	180/64
4	15/64	60/64	240/64
5	6/64	30/64	150/64
6	1/64	6/64	36/64
$\Sigma$	1	3	10.5

$$E(X) = \sum_{i=1}^7 x_i \cdot P(x_i) = 3 \quad E(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j \cdot P(y_j) = 3 \quad (6.152)$$

Il reste à calculer  $E(XY)$  dans le tableau suivant :

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	0	0	-
1	0	0	0	0	0	30/64	0	-
2	0	0	0	0	120/64	0	0	-
3	0	0	0	180/64	0	0	0	-
4	0	0	120/64	0	0	0	0	-
5	0	30/64	0	0	0	0	0	-
6	0	0	0	0	0	0	0	
$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	-	7.5

Ainsi,  $E(XY) = 7.5$  et subséquemment :

$$cov(X, Y) = 7.5 - 3 \times 3 \quad (6.153)$$

$$= -1.5 \quad (6.154)$$

Enfin, le coefficient de corrélation linéaire entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.155)$$

**Variances**  $V(X)$  et  $V(Y)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 \cdot P(x_i) - 3^2 = 10.5 - 9 = 1.5 \quad (6.156)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j^2 \cdot P(y_j) - 3^2 = 10.5 - 9 = 1.5 \quad (6.157)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{-1.5}{\sqrt{1.5} \cdot \sqrt{1.5}} \quad (6.158)$$

$$= -1 \quad (6.159)$$

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire égal à  $-1$  signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont parfaitement inversement corrélées, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse dans les mêmes proportions et vice versa.

**Exercice 56 :**

Un fournisseur de véhicules veut vendre six voitures à deux sociétés de transport A et B. On note  $X$  le nombre de voitures achetées par A et  $Y$  le nombre de voitures achetées par B.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  ;
3. Montrer qu'on peut calculer les distributions marginales sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$ . En déduire  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$  et  $V(Y)$  ;
4. Calculer  $cov(X, Y)$  et le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$  ? Interpréter.

**Solution :**

Le fournisseur veut vendre ses 6 voitures à deux sociétés de transport A et B. Il ne peut donc vendre plus de voitures que ce qu'il en a à sa disposition, c'est à dire 6. On suppose qu'il les vend toutes et qu'il n'en garde aucune.

$X$  est la variable aléatoire représentant le nombre de voitures achetées par la société A. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.  $Y$  est la variable aléatoire représentant le nombre de voitures achetées par la société B. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. On note au passage que  $X + Y = 6$  puisque la somme des voitures achetées par la société A et celles achetées par la société B est égale au nombre de voitures disponibles chez le fournisseur, 6 en l'occurrence.

Dans un premier temps, le fournisseur commence par tirer au hasard la société à laquelle il va vendre la première voiture, il a une probabilité de  $1/2$  de choisir la société A et une probabilité de  $1/2$  de choisir la société B. Ensuite, il choisit au hasard une voiture parmi les 6 qu'il vendra à la société qu'il a tirée au hasard. Dans un deuxième temps, le fournisseur tire au hasard une deuxième fois la société à laquelle il va vendre la deuxième voiture, il a toujours la même probabilité  $1/2$  de tirer l'une ou l'autre. Puis, il choisit au hasard une voiture parmi les 5 qui restent et qu'il va vendre à la société qu'il vient de tirer au hasard et ainsi de suite jusqu'à la dernière voiture.

Formellement, supposons par exemple que les deux premières voitures seront vendues à la société A et les 4 qui restent à la société B. Cela correspond au couple  $(X = 2, Y = 4)$ .

Le fournisseur peut procéder comme suit :

1. Tirer la société A la première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société A choisit 1 voiture parmi les 6 disponibles, soit  $C_6^1 = 6$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_6^1)$  ;
2. **ET** tirer la société A une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société A choisit 1 voiture parmi les 5 qui restent, soit  $C_5^1 = 5$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_5^1)$  ;

3. **ET** tirer la société B une première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 4 qui restent, soit  $C_4^1 = 4$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_4^1)$ ;
4. **ET** tirer la société B une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 3 qui restent, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_3^1)$ ;
5. **ET** tirer la société B une troisième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 2 qui restent, soit  $C_2^1 = 2$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_2^1)$ ;
6. **ET** tirer la société B une quatrième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit l'unique voiture qui reste, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité  $(\frac{1}{2} \times C_1^1)$ .

Attention ! Procéder de cette manière peut laisser entendre que les voitures sont numérotées auquel cas vendre la voiture numéro 1 en premier et la voiture numéro 2 en deuxième est une disposition différente de vendre la voiture numéro 2 en premier et la voiture numéro 1 en deuxième. Or, rien dans l'énoncé n'indique que les voitures sont numérotées et peu importe quelle voiture est vendue en premier ou en deuxième lieu. Il faut donc en tenir compte dans le calcul des probabilités.

La probabilité du couple  $(X = 2, Y = 4)$  peut donc s'écrire :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_6^1 \times \frac{1}{2} \times C_5^1}{2!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_4^1 \times \frac{1}{2} \times C_3^1 \times \frac{1}{2} \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times C_1^1}{4!} \right]$$

Société A Société B

(6.160)

$$= \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{C_6^1 C_5^1}{2!} \right] \times \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{4!} \right]$$

(6.161)

Les dénominateurs  $2!$  et  $4!$  sont respectivement le nombre de permutations de 2 et de 4 éléments discernables. Ils sont introduits pour omettre l'ordre dans la vente des 2 voitures à la société A (premiers crochets) et dans la vente des 4 voitures à la société B (derniers crochets).

Notons que l'on peut aisément vérifier les résultats suivants :

$$\frac{C_6^1 C_5^1}{2!} = C_6^2 \tag{6.162}$$

$$\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{4!} = C_4^4 \tag{6.163}$$

On peut donc écrire :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_6^2 \right] \times \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^4 C_4^4 \right] \tag{6.164}$$

ou encore :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} C_{6-2}^{6-2} \tag{6.165}$$

Plus généralement, si la société A achète un nombre  $n \leq 6$  de voitures, alors on a :

$$P(X = n, Y = 6 - n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_6^n \left(\frac{1}{2}\right)^{6-n} C_{6-n}^{6-n} \quad (6.166)$$

1. En utilisant cette formule générale, on peut calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .

Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	0	1/64	1/64
1	0	0	0	0	0	6/64	0	6/64
2	0	0	0	0	15/64	0	0	15/64
3	0	0	0	20/64	0	0	0	20/64
4	0	0	15/64	0	0	0	0	15/64
5	0	6/64	0	0	0	0	0	6/64
6	1/64	0	0	0	0	0	0	1/64
$\Sigma$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales sont lues sur les marges du tableau précédent :

$x$	$P(X = x)$
0	1/64
1	6/64
2	15/64
3	20/64
4	15/64
5	6/64
6	1/64
$\Sigma$	1

$y$	$P(Y = y)$
0	1/64
1	6/64
2	15/64
3	20/64
4	15/64
5	6/64
6	1/64
$\Sigma$	1

3. Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  peuvent se calculer sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$  car selon la formule (6.225) la probabilité du couple  $(X, Y)$  est entièrement déterminée par le nombre  $n$  de voitures achetées par la société A tandis que le nombre  $6 - n$  de voitures achetées par la société B n'intervient

qu'indirectement. On peut donc écrire :

$$P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_6^n \left(\frac{1}{2}\right)^{6-n} C_{6-n}^{6-n} \quad (6.167)$$

De la même manière, comme  $X + Y = 6$ , on en déduit que  $Y = 6 - X$ . Si  $X = n$  alors  $Y = 6 - n = m$ . D'où :

$$P(Y = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-m} C_6^{6-m} \left(\frac{1}{2}\right)^m C_m^m \quad (6.168)$$

**Espérances mathématiques**  $E(X)$  et  $E(Y)$  :

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i.P(x_i)$	$x_i^2.P(x_i)$
0	1/64	0	0
1	6/64	6/64	6/64
2	15/64	30/64	60/64
3	20/64	60/64	180/64
4	15/64	60/64	240/64
5	6/64	30/64	150/64
6	1/64	6/64	36/64
$\Sigma$	1	3	10.5

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j.P(y_j)$	$y_j^2.P(y_j)$
0	1/64	0	0
1	6/64	6/64	6/64
2	15/64	30/64	60/64
3	20/64	60/64	180/64
4	15/64	60/64	240/64
5	6/64	30/64	150/64
6	1/64	6/64	36/64
$\Sigma$	1	3	10.5

$$E(X) = \sum_{i=1}^7 x_i.P(x_i) = 3 \quad E(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j.P(y_j) = 3 \quad (6.169)$$

**Variances**  $V(X)$  et  $V(Y)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^7 x_i^2.P(x_i) - 3^2 = 10.5 - 9 = 1.5 \quad (6.170)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j^2.P(y_j) - 3^2 = 10.5 - 9 = 1.5 \quad (6.171)$$

4. Calcul de la covariance  $cov(X, Y)$  et du coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (6.172)$$

avec :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 x_i y_j P(x_i, y_j) \quad (6.173)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^7 x_i P(x_i) \quad (6.174)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j P(y_j) \quad (6.175)$$

Les espérances mathématiques  $E(X)$  et  $E(Y)$  ont déjà été calculées précédemment. Il reste à calculer  $E(XY)$  dans le tableau suivant :

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	0	0	-
1	0	0	0	0	0	30/64	0	-
2	0	0	0	0	120/64	0	0	-
3	0	0	0	180/64	0	0	0	-
4	0	0	120/64	0	0	0	0	-
5	0	30/64	0	0	0	0	0	-
6	0	0	0	0	0	0	0	
$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	-	7.5

Ainsi,  $E(XY) = 7.5$  et subséquemment :

$$cov(X, Y) = 7.5 - 3 \times 3 \quad (6.176)$$

$$= -1.5 \quad (6.177)$$

Enfin, le coefficient de corrélation linéaire entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.178)$$

$$= \frac{-1.5}{\sqrt{1.5} \cdot \sqrt{1.5}} \quad (6.179)$$

$$= -1 \quad (6.180)$$

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire égal à -1 signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont parfaitement inversement corrélées, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse dans les mêmes proportions et vice versa.

**Exercice 57 :**

Un fournisseur de véhicules veut vendre six voitures à deux sociétés de transport A et B. On note  $X$  le nombre de voitures achetées par A et  $Y$  le nombre de voitures achetées par B.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$ .
3. Montrer qu'on peut calculer les distributions marginales sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$ . En déduire  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$  et  $V(Y)$ .
4. Calculer  $cov(X, Y)$  et le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

**Solution :**

Le fournisseur veut vendre ses 6 voitures à deux sociétés de transport A et B. Il ne peut donc vendre plus de voitures que ce qu'il en a à sa disposition, c'est à dire 6. On suppose qu'il les vend toutes et qu'il n'en garde aucune.

$X$  est la variable aléatoire représentant le nombre de voitures achetées par la société A. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.  $Y$  est la variable aléatoire représentant le nombre de voitures achetées par la société B. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. On note au passage que  $X + Y = 6$  puisque la somme des voitures achetées par la société A et celles achetées par la société B est égale au nombre de voitures disponibles chez le fournisseur, 6 en l'occurrence.

Dans un premier temps, le fournisseur commence par tirer au hasard la société à laquelle il va vendre la première voiture, il a une probabilité de  $1/2$  de choisir la société A et une probabilité de  $1/2$  de choisir la société B. Ensuite, il choisit au hasard une voiture parmi les 6 qu'il vendra à la société qu'il a tirée au hasard. Dans un deuxième temps, le fournisseur tire au hasard une deuxième fois la société à laquelle il va vendre la deuxième voiture, il a toujours la même probabilité  $1/2$  de tirer l'une ou l'autre. Puis, il choisit au hasard une voiture parmi les 5 qui restent et qu'il va vendre à la société qu'il vient de tirer au hasard et ainsi de suite jusqu'à la dernière voiture.

Formellement, supposons par exemple que les deux premières voitures seront vendues à la société A et les 4 qui restent à la société B. Cela correspond au couple  $(X = 2, Y = 4)$ .

Le fournisseur peut procéder comme suit :

1. Tirer la société A la première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société A choisit 1 voiture parmi les 6 disponibles, soit  $C_6^1 = 6$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_6^1)$ ;
2. **ET** tirer la société A une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société A choisit 1 voiture parmi les 5 qui restent, soit  $C_5^1 = 5$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_5^1)$ ;
3. **ET** tirer la société B une première fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 4 qui restent, soit  $C_4^1 = 4$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_4^1)$ ;
4. **ET** tirer la société B une deuxième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 3 qui restent, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_3^1)$ ;

5. **ET** tirer la société B une troisième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit 1 voiture parmi les 2 qui restent, soit  $C_2^1 = 2$  possibilités  $(\frac{1}{2} \times C_2^1)$  ;
6. **ET** tirer la société B une quatrième fois avec une probabilité  $1/2$  **ET** la société B choisit l'unique voiture qui reste, soit  $C_1^1 = 1$  possibilité  $(\frac{1}{2} \times C_1^1)$ .

Attention ! Procéder de cette manière peut laisser entendre que les voitures sont numérotées auquel cas vendre la voiture numéro 1 en premier et la voiture numéro 2 en deuxième est une disposition différente de vendre la voiture numéro 2 en premier et la voiture numéro 1 en deuxième. Or, rien dans l'énoncé n'indique que les voitures sont numérotées et peu importe quelle voiture est vendue en premier ou en deuxième lieu. Il faut donc en tenir compte dans le calcul des probabilités.

La probabilité du couple  $(X = 2, Y = 4)$  peut donc s'écrire :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_6^1 \times \frac{1}{2} \times C_5^1}{2!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{2} \times C_4^1 \times \frac{1}{2} \times C_3^1 \times \frac{1}{2} \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times C_1^1}{4!} \right]$$

Société A Société B

(6.181)

$$= \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{C_6^1 C_5^1}{2!} \right] \times \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{4!} \right]$$

(6.182)

Les dénominateurs  $2!$  et  $4!$  sont respectivement le nombre de permutations de 2 et de 4 éléments discernables. Ils sont introduits pour omettre l'ordre dans la vente des 2 voitures à la société A (premiers crochets) et dans la vente des 4 voitures à la société B (derniers crochets).

Notons que l'on peut aisément vérifier les résultats suivants :

$$\frac{C_6^1 C_5^1}{2!} = C_6^2$$

(6.183)

$$\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{4!} = C_4^4$$

(6.184)

On peut donc écrire :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_6^2 \right] \times \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^4 C_4^4 \right]$$

(6.185)

ou encore :

$$P(X = 2, Y = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} C_{6-2}^{6-2}$$

(6.186)

Plus généralement, si la société A achète un nombre  $n \leq 6$  de voitures, alors on a :

$$P(X = n, Y = 6 - n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_6^n \left(\frac{1}{2}\right)^{6-n} C_{6-n}^{6-n}$$

(6.187)

1. En utilisant cette formule générale, on peut calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .

Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	0	1/64	1/64
1	0	0	0	0	0	6/64	0	6/64
2	0	0	0	0	15/64	0	0	15/64
3	0	0	0	20/64	0	0	0	20/64
4	0	0	15/64	0	0	0	0	15/64
5	0	6/64	0	0	0	0	0	6/64
6	1/64	0	0	0	0	0	0	1/64
$\Sigma$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales sont lues sur les marges du tableau précédent :

$x$	$P(X = x)$	$y$	$P(Y = y)$
0	1/64	0	1/64
1	6/64	1	6/64
2	15/64	2	15/64
3	20/64	3	20/64
4	15/64	4	15/64
5	6/64	5	6/64
6	1/64	6	1/64
$\Sigma$	1	$\Sigma$	1

3. Les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  peuvent se calculer sans passer par la distribution du couple  $(X, Y)$  car selon la formule (6.225) la probabilité du couple  $(X, Y)$  est entièrement déterminée par le nombre  $n$  de voitures achetées par la société A tandis que le nombre  $6 - n$  de voitures achetées par la société B n'intervient qu'indirectement. On peut donc écrire :

$$P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_6^n \left(\frac{1}{2}\right)^{6-n} C_{6-n}^{6-n} \quad (6.188)$$

De la même manière, comme  $X + Y = 6$ , on en déduit que  $Y = 6 - X$ . Si  $X = n$

alors  $Y = 6 - n = m$ . D'où :

$$P(Y = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-m} C_6^{6-m} \left(\frac{1}{2}\right)^m C_m^m \quad (6.189)$$

**Espérances mathématiques**  $E(X)$  et  $E(Y)$  :

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i.P(x_i)$	$x_i^2.P(x_i)$	$y_j$	$P(y_j)$	$y_j.P(y_j)$	$y_j^2.P(y_j)$
0	1/64	0	0	0	1/64	0	0
1	6/64	6/64	6/64	1	6/64	6/64	6/64
2	15/64	30/64	60/64	2	15/64	30/64	60/64
3	20/64	60/64	180/64	3	20/64	60/64	180/64
4	15/64	60/64	240/64	4	15/64	60/64	240/64
5	6/64	30/64	150/64	5	6/64	30/64	150/64
6	1/64	6/64	36/64	6	1/64	6/64	36/64
$\Sigma$	1	3	10.5	$\Sigma$	1	3	10.5

$$E(X) = \sum_{i=1}^7 x_i.P(x_i) = 3 \quad E(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j.P(y_j) = 3 \quad (6.190)$$

**Variances**  $V(X)$  et  $V(Y)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^7 x_i^2.P(x_i) - 3^2 = 10.5 - 9 = 1.5 \quad (6.191)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \sum_{j=1}^7 y_j^2.P(y_j) - 3^2 = 10.5 - 9 = 1.5 \quad (6.192)$$

4. Calcul de la covariance  $cov(X, Y)$  et du coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (6.193)$$

avec :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 x_i y_j P(x_i, y_j) \quad (6.194)$$

Les espérances mathématiques ont déjà été calculées plus haut, il reste à calculer  $E(XY)$  dans le tableau suivant :

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	0	0	-
1	0	0	0	0	0	30/64	0	-
2	0	0	0	0	120/64	0	0	-
3	0	0	0	180/64	0	0	0	-
4	0	0	120/64	0	0	0	0	-
5	0	30/64	0	0	0	0	0	-
6	0	0	0	0	0	0	0	
$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	-	7.5

Ainsi,  $E(XY) = 7.5$  et subséquemment :

$$\text{cov}(X, Y) = 7.5 - 3 \times 3 \quad (6.195)$$

$$= -1.5 \quad (6.196)$$

Enfin, le coefficient de corrélation linéaire entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.197)$$

$$= \frac{-1.5}{\sqrt{1.5} \cdot \sqrt{1.5}} \quad (6.198)$$

$$= -1 \quad (6.199)$$

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire égal à -1 signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont parfaitement inversement corrélées, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse dans les mêmes proportions et vice versa.

### Exercice 58 :

Un fabricant d'avions veut vendre 4 grands avions à 3 sociétés A, B et C. On note  $X$  le nombre d'avions achetées par A et  $Y$  le nombre d'avions achetées par B.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$ .
3. Calculer les distributions conditionnelles  $X|Y = 3$  et  $Y|X = 4$ .
4. Calculer  $\text{cov}(X, Y)$  et interpréter.
5. Montrer qu'on peut arriver à ce résultat sans calculer la covariance.
6. Calculer le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

Un fabricant de bus veut vendre quatre grands bus à 3 sociétés A, B et C. On note  $X$  le nombre de bus achetés par A et  $Y$  le nombre de bus achetés par B.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  ;
3. Calculer la distribution conditionnelle  $X|Y = 3$  ;
4. Calculer  $cov(X, Y)$  et interpréter ;
5. Montrer qu'on peut arriver à ce résultat sans calculer la covariance ;
6. Calculer le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

**Solution :**

Le fabricant veut vendre ses 4 grands avions à 3 sociétés A, B et C. Il ne peut donc vendre plus d'avions que ce qu'il en a à sa disposition, c'est à dire 4. On suppose qu'il les vend tous et qu'il n'en garde aucun.

$X$  est la variable aléatoire représentant le nombre d'avions achetés par la société A. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4.  $Y$  est la variable aléatoire représentant le nombre d'avions achetés par la société B. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4. On note au passage que  $X + Y \leq 4$  puisque un certain nombre d'avions sont susceptibles d'être achetés par la société C.

Dans un premier temps, le fabricant commence par tirer au hasard la société à laquelle il va vendre le premier avion, il a une probabilité de 1/3 de choisir la société A, une probabilité de 1/3 de choisir la société B et une probabilité de 1/3 de choisir la société C. Ensuite, il choisit au hasard un avion parmi les 4 qu'il vendra à la société qu'il a tirée au hasard. Dans un deuxième temps, le fabricant tire au hasard la société à laquelle il va vendre le deuxième avion, il a toujours la même probabilité 1/3 de tirer l'une des 3 sociétés A, B et C. Puis, il choisit au hasard un avion parmi les 3 qui restent et qu'il va vendre à la société qu'il vient de tirer au hasard et ainsi de suite jusqu'au dernier avion. Formellement, supposons par exemple que les deux premiers avions seront vendus à la société A, le troisième avion à la société B et le avion qui reste à la société C. Cela correspond au couple  $(X = 2, Y = 1)$ . Le fabricant peut procéder comme suit :

1. Tirer la société A la première fois avec une probabilité 1/3 **ET** la société A choisit 1 avion parmi les 4 disponibles, soit  $C_4^1 = 4$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_4^1)$  ;
2. **ET** tirer la société A une deuxième fois avec une probabilité 1/3 **ET** la société A choisit 1 avion parmi les 3 qui restent, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_3^1)$  ;
3. **ET** tirer la société B une première fois avec une probabilité 1/3 **ET** la société B choisit 1 avion parmi les 2 qui restent, soit  $C_2^1 = 2$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_2^1)$  ;
4. **ET** tirer la société C une première fois avec une probabilité 1/3 **ET** la société C choisit le seul avion qui reste, soit  $C_1^1 = 1$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_1^1)$ .

Attention ! Procéder de cette manière peut laisser entendre que les avions sont numérotés auquel cas vendre l'avion numéro 1 en premier et l'avion numéro 2 en deuxième est une disposition différente de vendre l'avion numéro 2 en premier et l'avion numéro 1 en deuxième. Or, rien dans l'énoncé n'indique que les avions sont numérotés et peu importe quel avion est vendu en premier ou en deuxième lieu. Il faut donc en tenir compte dans le calcul des probabilités.

La probabilité du couple  $(X = 2, Y = 1)$  peut donc s'écrire :

$$P(X = 2, Y = 1) = \left[ \frac{\frac{1}{3} \times C_4^1 \times \frac{1}{3} \times C_3^1}{2!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{3} \times C_2^1}{1!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{3} \times C_1^1}{1!} \right] \quad (6.200)$$

Société A                      Société B                      Société C

$$= \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^2 \frac{C_4^1 C_3^1}{2!} \right] \times \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 \frac{C_2^1}{1!} \right] \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 \frac{C_1^1}{1!} \right] \quad (6.201)$$

Les dénominateurs  $2!$ ,  $1!$  et  $1!$  sont respectivement le nombre de permutations de 2, 1 et 1 éléments discernables. Ils sont introduits pour omettre l'ordre dans la vente des 2 avions à la société A (premiers crochets), dans la vente d'un avion à la société B (crochets intermédiaires) et dans la vente d'un avion à la société C (derniers crochets).

Notons que l'on peut aisément vérifier le résultat suivant :

$$\frac{C_4^1 C_3^1}{2!} = C_4^2 \quad (6.202)$$

On peut donc écrire :

$$P(X = 2, Y = 1) = \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^2 C_4^2 \right] \times \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 C_2^1 \right] \times \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 C_1^1 \right] \quad (6.203)$$

ou encore :

$$P(X = 2, Y = 1) = \left( \frac{1}{3} \right)^2 C_4^2 \left( \frac{1}{3} \right)^1 C_{4-2}^1 \left( \frac{1}{3} \right)^{4-2-1} C_{4-2-1}^{4-2-1} \quad (6.204)$$

Plus généralement, si la société A achète  $n$  avions et la société B en achète  $m$  (avec  $n + m \leq 4$ ), alors on a :

$$P(X = n, Y = m) = \left( \frac{1}{3} \right)^n C_4^n \left( \frac{1}{3} \right)^m C_{4-n}^m \left( \frac{1}{3} \right)^{4-n-m} C_{4-n-m}^{4-n-m} \quad (6.205)$$

1. En utilisant cette formule générale, on peut calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ . Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	$\Sigma$
0	1/81	4/81	6/81	4/81	1/81	16/81
1	4/81	12/81	12/81	4/81	0	32/81
2	6/81	12/81	6/81	0	0	24/81
3	4/81	4/81	0	0	0	8/81
4	1/81	0	0	0	0	1/81
$\Sigma$	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales sont lues sur les marges du tableau précédent :

$x$	$P(X = x)$
0	16/81
1	32/81
2	24/81
3	8/81
4	1/81
$\Sigma$	1

$y$	$P(Y = y)$
0	16/81
1	32/81
2	24/81
3	8/81
4	1/81
$\Sigma$	1

3. Distributions conditionnelles  $X|Y = 3$  et  $Y|X = 4$  :

La probabilité conditionnelle  $P(X = x|Y = 3)$  est donnée par :

$$P(X = x|Y = 3) = \frac{P(X = x, Y = 3)}{P(Y = 3)} \quad (6.206)$$

$x$	$P(X = x Y = 3)$
0	$(4/81)/(8/81)=1/2$
1	$(4/81)/(8/81)=1/2$
2	$0/(8/81)=0$
3	$0/(8/81)=0$
4	$0/(8/81)=0$
$\Sigma$	1

La probabilité conditionnelle  $P(Y = y|X = 4)$  est donnée par :

$$P(Y = y|X = 4) = \frac{P(Y = y, X = 4)}{P(X = 4)} \quad (6.207)$$

$y$	$P(Y = y X = 4)$
0	$(1/81)/(1/81)=1$
1	$0/(1/81)=0$
2	$0/(1/81)=0$
3	$0/(1/81)=0$
4	$0/(1/81)=0$
$\Sigma$	1

#### 4. Covariance $cov(X, Y)$ :

La covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (6.208)$$

avec :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i y_j P(x_i, y_j) \quad (6.209)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P(x_i) \quad (6.210)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j P(y_j) \quad (6.211)$$

**Espérances mathématiques**  $E(X)$  et  $E(Y)$  :

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
0	16/81	0	0
1	32/81	32/81	32/81
2	24/81	48/81	96/81
3	8/81	24/81	72/81
4	1/81	4/81	16/81
$\Sigma$	1	4/3	8/3

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j \cdot P(y_j)$	$y_j^2 \cdot P(y_j)$
0	16/81	0	0
1	32/81	32/81	32/81
2	24/81	48/81	96/81
3	8/81	24/81	72/81
4	1/81	4/81	16/81
$\Sigma$	1	4/3	8/3

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P(x_i) = 4/3 \quad E(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j \cdot P(y_j) = 4/3 \quad (6.212)$$

Il reste à calculer  $E(XY)$  dans le tableau suivant :

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	3	4	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	-
1	0	12/81	24/81	12/81	0	-
2	0	24/81	24/81	0	0	-
3	0	12/81	0	0	0	-
4	0	0	0	0	0	-
$\Sigma$	-	-	-	-	-	4/3

Ainsi,  $E(XY) = 4/3$  et subséquemment :

$$cov(X, Y) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{9} \quad (6.213)$$

**Interprétation :** Une covariance négative signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  varient en sens inverses, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse et vice versa.

- On peut arriver à ce résultat sans calculer la covariance puisque plus le nombre de bus achetés par la société A augmente et moins il va en rester pour la société B et vice versa.
- Coefficient de corrélation :

Le coefficient de corrélation linéaire entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.214)$$

**Variances**  $V(X)$  et  $V(Y)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot P(x_i) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9} \quad (6.215)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j^2 \cdot P(y_j) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9} \quad (6.216)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.217)$$

$$= \frac{-4/9}{\sqrt{8/9} \cdot \sqrt{8/9}} \quad (6.218)$$

$$= -\frac{1}{2} \quad (6.219)$$

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire égal à  $-1/2$  signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont inversement corrélées, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse et vice versa.

**Exercice 59 :**

Un fabricant de bus veut vendre quatre grands bus à 3 sociétés A, B et C. On note  $X$  le nombre de bus achetés par A et  $Y$  le nombre de bus achetés par B.

1. Calculer la distribution du couple  $(X, Y)$  ;
2. Calculer les distributions marginales de  $X$  et  $Y$  ;
3. Calculer la distribution conditionnelle  $X|Y = 3$  ;
4. Calculer  $\text{cov}(X, Y)$  et interpréter ;
5. Montrer qu'on peut arriver à ce résultat sans calculer la covariance ;
6. Calculer le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ . Interpréter.

**Solution :**

Le fabricant veut vendre ses 4 grands bus à 3 sociétés A, B et C. Il ne peut donc vendre plus de bus que ce qu'il en a à sa disposition, c'est à dire 4. On suppose qu'il les vend tous et qu'il n'en garde aucun.

$X$  est la variable aléatoire représentant le nombre de bus achetés par la société A. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4.  $Y$  est la variable aléatoire représentant le nombre de bus achetés par la société B. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4. On note au passage que  $X + Y \leq 4$  puisque un nombre de bus sont susceptibles d'être achetés par la société C.

Dans un premier temps, le fabricant commence par tirer au hasard la société à laquelle il va vendre le premier bus, il a une probabilité de  $1/3$  de choisir la société A, une probabilité de  $1/3$  de choisir la société B et une probabilité de  $1/3$  de choisir la société C. Ensuite, il choisit au hasard un bus parmi les 4 qu'il vendra à la société qu'il a tirée au hasard. Dans un deuxième temps, le fabricant tire au hasard la société à laquelle il va vendre le deuxième bus, il a toujours la même probabilité  $1/3$  de tirer l'une des 3 sociétés A, B et C. Puis, il choisit au hasard un bus parmi les 3 qui restent et qu'il va vendre à la société qu'il vient de tirer au hasard et ainsi de suite jusqu'au dernier bus.

Formellement, supposons par exemple que les deux premiers bus seront vendus à la société A, le troisième bus à la société B et le bus qui reste à la société C. Cela correspond au couple  $(X = 2, Y = 1)$ . Le fabricant peut procéder comme suit :

1. Tirer la société A la première fois avec une probabilité  $1/3$  **ET** la société A choisit 1 bus parmi les 4 disponibles, soit  $C_4^1 = 4$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_4^1)$ ;
2. **ET** tirer la société A une deuxième fois avec une probabilité  $1/3$  **ET** la société A choisit 1 bus parmi les 3 qui restent, soit  $C_3^1 = 3$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_3^1)$ ;
3. **ET** tirer la société B une première fois avec une probabilité  $1/3$  **ET** la société B choisit 1 bus parmi les 2 qui restent, soit  $C_2^1 = 2$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_2^1)$ ;
4. **ET** tirer la société C une première fois avec une probabilité  $1/3$  **ET** la société C choisit le seul bus qui reste, soit  $C_1^1 = 1$  possibilités  $(\frac{1}{3} \times C_1^1)$ .

Attention! Procéder de cette manière peut laisser entendre que les bus sont numérotés auquel cas vendre le bus numéro 1 en premier et le bus numéro 2 en deuxième est une disposition différente de vendre le bus numéro 2 en premier et le bus numéro 1 en deuxième. Or, rien dans l'énoncé n'indique que les bus sont numérotés et peu importe quel bus est vendu en premier ou en deuxième lieu. Il faut donc en tenir compte dans le calcul des probabilités.

La probabilité du couple  $(X = 2, Y = 1)$  peut donc s'écrire :

$$P(X = 2, Y = 1) = \left[ \frac{\frac{1}{3} \times C_4^1 \times \frac{1}{3} \times C_3^1}{2!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{3} \times C_2^1}{1!} \right] \times \left[ \frac{\frac{1}{3} \times C_1^1}{1!} \right] \quad (6.220)$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^2 \frac{C_4^1 C_3^1}{2!} \right] \times \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 \frac{C_2^1}{1!} \right] \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 \frac{C_1^1}{1!} \right] \quad (6.221)$$

Les dénominateurs  $2!$ ,  $1!$  et  $1!$  sont respectivement le nombre de permutations de 2, 1 et 1 éléments discernables. Ils sont introduits pour omettre l'ordre dans la vente des 2 bus à la société A (premiers crochets), dans la vente d'un bus à la société B (crochets intermédiaires) et dans la vente d'un bus à la société C (derniers crochets).

Notons que l'on peut aisément vérifier le résultat suivant :

$$\frac{C_4^1 C_3^1}{2!} = C_4^2 \quad (6.222)$$

On peut donc écrire :

$$P(X = 2, Y = 1) = \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^2 C_4^2 \right] \times \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 C_2^1 \right] \times \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^1 C_1^1 \right] \quad (6.223)$$

ou encore :

$$P(X = 2, Y = 1) = \left( \frac{1}{3} \right)^2 C_4^2 \left( \frac{1}{3} \right)^1 C_{4-2}^1 \left( \frac{1}{3} \right)^{4-2-1} C_{4-2-1}^{4-2-1} \quad (6.224)$$

Plus généralement, si la société A achète  $n$  bus et la société B en achète  $m$  (avec  $n+m \leq 4$ ),

alors on a :

$$P(X = n, Y = m) = \left(\frac{1}{3}\right)^n C_4^m \left(\frac{1}{3}\right)^m C_{4-n}^m \left(\frac{1}{3}\right)^{4-n-m} C_{4-n-m}^{4-n-m} \quad (6.225)$$

1. En utilisant cette formule générale, on peut calculer la distribution du couple  $(X, Y)$ .

Les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	$\Sigma$
0	1/81	4/81	6/81	4/81	1/81	16/81
1	4/81	12/81	12/81	4/81	0	32/81
2	6/81	12/81	6/81	0	0	24/81
3	4/81	4/81	0	0	0	8/81
4	1/81	0	0	0	0	1/81
$\Sigma$	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81	1

2. Distributions marginales de  $X$  et de  $Y$  :

Les distributions marginales sont lues sur les marges du tableau précédent :

$x$	$P(X = x)$	$y$	$P(Y = y)$
0	16/81	0	16/81
1	32/81	1	32/81
2	24/81	2	24/81
3	8/81	3	8/81
4	1/81	4	1/81
$\Sigma$	1	$\Sigma$	1

3. Distribution conditionnelle  $X|Y = 3$  :

La probabilité conditionnelle  $P(X = x|Y = 3)$  est donnée par :

$$P(X = x|Y = 3) = \frac{P(X = x, Y = 3)}{P(Y = 3)} \quad (6.226)$$

$x$	$P(X = x Y = 3) = P(X = x, Y = 3)/P(Y = 3)$
0	$(4/81)/(8/81)=1/2$
1	$(4/81)/(8/81)=1/2$
2	$0/(8/81)=0$
3	$0/(8/81)=0$
4	$0/(8/81)=0$
$\Sigma$	1

4. Covariance  $cov(X, Y)$  :

La covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (6.227)$$

avec :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i y_j P(x_i, y_j) \quad (6.228)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P(x_i) \quad (6.229)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j P(y_j) \quad (6.230)$$

**Espérances mathématiques**  $E(X)$  et  $E(Y)$  :

$x_i$	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
0	16/81	0	0
1	32/81	32/81	32/81
2	24/81	48/81	96/81
3	8/81	24/81	72/81
4	1/81	4/81	16/81
$\Sigma$	1	4/3	8/3

$y_j$	$P(y_j)$	$y_j \cdot P(y_j)$	$y_j^2 \cdot P(y_j)$
0	16/81	0	0
1	32/81	32/81	32/81
2	24/81	48/81	96/81
3	8/81	24/81	72/81
4	1/81	4/81	16/81
$\Sigma$	1	4/3	8/3

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P(x_i) = 4/3 \quad E(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j \cdot P(y_j) = 4/3 \quad (6.231)$$

Il reste à calculer  $E(XY)$  dans le tableau suivant :

$x_i y_j P(x_i, y_j)$	0	1	2	3	4	$\Sigma$
0	0	0	0	0	0	-
1	0	12/81	24/81	12/81	0	-
2	0	24/81	24/81	0	0	-
3	0	12/81	0	0	0	-
4	0	0	0	0	0	-
$\Sigma$	-	-	-	-	-	4/3

Ainsi,  $E(XY) = 4/3$  et subséquemment :

$$cov(X, Y) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{9} \quad (6.232)$$

**Interprétation :** Une covariance négative signifie que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  varient en sens inverses, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse et vice versa.

5. On peut arriver à ce résultat sans calculer la covariance puisque plus le nombre de bus achetés par la société A augmente et moins il va en rester pour la société B et vice versa.

6. Coefficient de corrélation :

Le coefficient de corrélation linéaire entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.233)$$

**Variances**  $V(X)$  et  $V(Y)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot P(x_i) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9} \quad (6.234)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \sum_{j=1}^5 y_j^2 \cdot P(y_j) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9} \quad (6.235)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} \quad (6.236)$$

$$= \frac{-4/9}{\sqrt{8/9} \cdot \sqrt{8/9}} \quad (6.237)$$

$$= -\frac{1}{2} \quad (6.238)$$

**Interprétation :** Un coefficient de corrélation linéaire égal à  $-1/2$  signifie que les

variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont inversement corrélées, c'est à dire si l'une augmente l'autre baisse et vice versa.

**Exercice 60 :**

Un médecin examine un malade et conclut que la probabilité pour que celui-ci soit atteint d'un virus  $X$  est de  $1/3$ . Il décide de procéder à un test sanguin dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Si le malade est atteint du virus  $X$ , la probabilité pour que le test soit positif est  $8/10$ ;
- Si le malade n'est pas atteint du virus  $X$ , la probabilité pour que le test soit positif est  $3/10$ .

Le test s'avère positif. Quelle probabilité a posteriori doit-on attribuer à l'événement "le malade est atteint du virus  $X$ " ?

**Solution :**

Désignons par  $X$  l'événement : "le malade est atteint du virus  $X$ " et par  $T$  l'événement : "le test sanguin est positif".

Selon l'énoncé, on a :

- Probabilité que le malade soit atteint du virus  $X$  :

$$P(X) = \frac{1}{3} \tag{6.239}$$

- Probabilité que le malade ne soit pas atteint du virus  $X$  :

$$P(\bar{X}) = 1 - P(X) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{6.240}$$

- Probabilité que le test soit positif sachant que le malade est atteint du virus  $X$  :

$$P(T|X) = \frac{8}{10} \tag{6.241}$$

- Probabilité que le test soit positif sachant que le malade n'est pas atteint du virus  $X$  :

$$P(T|\bar{X}) = \frac{3}{10} \tag{6.242}$$

La probabilité que le malade soit atteint du virus  $X$  sachant que le test est positif, c'est à dire  $P(X|T)$ , est donnée par :

$$P(X|T) = \frac{P(X \cap T)}{P(T)} \tag{6.243}$$

Selon le théorème des probabilités composées, on peut écrire :

$$P(X \cap T) = P(T|X).P(X) \tag{6.244}$$

Par ailleurs, on peut partitionner  $T$  comme suit :

$$T = (T \cap X) \cup (T \cap \bar{X}) \quad (6.245)$$

Par conséquent,

$$P(T) = P(T \cap X) + P(T \cap \bar{X}) \quad (6.246)$$

En substituant dans (6.243), on obtient :

$$P(X|T) = \frac{P(T|X).P(X)}{P(T \cap X) + P(T \cap \bar{X})} \quad (6.247)$$

En appliquant le théorème des probabilités composées à  $P(T \cap X)$  et  $P(T \cap \bar{X})$ , on obtient :

$$P(T \cap X) = P(T|X).P(X) \quad (6.248)$$

$$P(T \cap \bar{X}) = P(T|\bar{X}).P(\bar{X}) \quad (6.249)$$

L'expression (6.247) devient :

$$P(X|T) = \frac{P(T|X).P(X)}{P(T|X).P(X) + P(T|\bar{X}).P(\bar{X})} \quad (6.250)$$

Application numérique :

$$P(X|T) = \frac{(8/10).(1/3)}{(8/10).(1/3) + (3/10).(2/3)} = \frac{8/30}{8/30 + 6/30} = \frac{8}{8+6} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \quad (6.251)$$

Il y a donc une probabilité de  $4/7$  que le malade soit atteint du virus  $X$  si le test sanguin est positif.

La densité de probabilités de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} + ke^x & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilités ;
2. Établir la fonction de répartition de  $X$  ;
3. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$  .

**Solution :**

La fonction  $f(x)$  peut explicitement s'écrire :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -5 \\ ke^{-x} + ke^x & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{si } \geq 5 \end{cases}$$

1. Calcul de  $k$  pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilités :

$f(x)$  est une densité de probabilité si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{6.252}$$

Calculons le membre gauche de (6.252) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-5} 0dx + \int_{-5}^5 (ke^{-x} + ke^x) dx + \int_5^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + k \int_{-5}^5 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= k [-e^{-x} + e^x]_{-5}^5 \\ &= k (-e^{-5} + e^5 + e^5 - e^{-5}) \\ &= 2k (e^5 - e^{-5}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 2k (e^5 - e^{-5}) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})}$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -5 \\ \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^5 - e^{-5})} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{si } \geq 5 \end{cases}$$

2. Fonction de répartition de  $F(x)$  :

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Comme la densité  $f(x)$  est définie par morceaux sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors la fonction de répartition  $F(x)$  est également définie par morceaux sur le même intervalle :

— Si  $x \in ]-\infty, -5]$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

— Si  $x \in ]-5, 5[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^x \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^5 - e^{-5})} dt \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^x (e^{-t} + e^t) dt \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} [-e^{-t} + e^t]_{-5}^x \\ &= \frac{-e^{-x} + e^x + e^5 - e^{-5}}{2(e^5 - e^{-5})} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^5 - e^{-5})} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

— Si  $x \in [5, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dt + \int_{-5}^5 \frac{e^{-t} + e^t}{2(e^5 - e^{-5})} dt + \int_5^x 0 dt \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 (e^{-t} + e^t) dt + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} [-e^{-t} + e^t]_{-5}^5 \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} (-e^{-5} + e^5 + e^5 - e^{-5}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -5 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^5 - e^{-5})} + \frac{1}{2} & \text{si } -5 < x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

3. Calcul de  $E(X)$  et  $V(X)$  :

— Calcul de  $E(X)$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-5} (x \times 0) dx + \int_{-5}^5 x \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^5 - e^{-5})} dx + \int_5^{+\infty} (x \times 0) dx \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 x (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 g(x) dx \end{aligned}$$

avec  $g(x) = x(e^{-x} + e^x)$ . Notons que la fonction  $g(x)$  est impaire car :

$$g(-x) = -x(e^x + e^{-x}) = -g(x)$$

Il en résulte :

$$\int_{-5}^5 g(x) dx = 0$$

Par conséquent

$$E(X) = \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \times 0 = 0$$

### Rappels :

- $g(x)$  est une fonction impaire si et seulement si  $g(-x) = -g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport au point  $(0, 0)$ .

Par conséquent :

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

- $g(x)$  est une fonction paire si et seulement si  $g(-x) = g(x)$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  est symétrique par rapport à la droite  $x = 0$ . Par conséquent :

$$\int_{-a}^0 g(x) dx = \int_0^a g(x) dx$$

— Calcul de  $V(X)$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - 0 = E(X^2)$$

Il reste à calculer  $E(X^2)$  :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-5} (x^2 \times 0) dx + \int_{-5}^5 x^2 \frac{e^{-x} + e^x}{2(e^5 - e^{-5})} dx + \int_5^{+\infty} (x^2 \times 0) dx \\ &= 0 + \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 x^2 (e^{-x} + e^x) dx + 0 \\ &= \frac{1}{2(e^5 - e^{-5})} \int_{-5}^5 x^2 (e^{-x} + e^x) dx \end{aligned}$$

Écrivons d'abord :

$$\int_{-5}^5 x^2 (e^{-x} + e^x) dx = \int_{-5}^5 x^2 e^{-x} dx + \int_{-5}^5 x^2 e^x dx$$

Notons :

$$I = \int_{-5}^5 x^2 e^{-x} dx \qquad J = \int_{-5}^5 x^2 e^x dx$$

Calculons l'intégrale I par parties, pour cela posons :

$$u(x) = x^2 \qquad v'(x) = e^{-x}$$

On obtient :

$$u'(x) = 2x \qquad v(x) = -e^{-x}$$

Appliquons à présent la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-5}^5 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{-5}^5 - \int_{-5}^5 u'(x)v(x)dx$$

On obtient :

$$I = \int_{-5}^5 x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_{-5}^5 - 2 \int_{-5}^5 -x e^{-x} dx$$

Appliquons une intégration par parties une deuxième fois pour calculer :

$$II = \int_{-5}^5 -x e^{-x} dx$$

On pose :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = -e^{-x}$$

On obtient :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^{-x}$$

Par substitution dans la formule de l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{II} &= [xe^{-x}]_{-5}^5 - \int_{-5}^5 e^{-x} dx \\ &= [xe^{-x}]_{-5}^5 - [-e^{-x}]_{-5}^5 \\ &= [xe^{-x} + e^{-x}]_{-5}^5 \\ &= 5e^{-5} + e^{-5} + 5e^5 - e^5 \\ &= 6e^{-5} + 4e^5 \end{aligned}$$

Remplaçons ce résultat dans l'intégrale I :

$$\begin{aligned} \text{I} &= [-x^2e^{-x}]_{-5}^5 - 2(6e^{-5} + 4e^5) \\ &= (-25e^{-5} + 25e^5) - 2(6e^{-5} + 4e^5) \\ &= 17e^5 - 37e^{-5} \end{aligned}$$

Calculons ensuite l'intégrale J par parties, pour cela posons :

$$u(x) = x^2 \qquad v'(x) = e^x$$

On obtient :

$$u'(x) = 2x \qquad v(x) = e^x$$

Appliquons à présent la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-5}^5 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{-5}^5 - \int_{-5}^5 u'(x)v(x)dx$$

On obtient :

$$\text{J} = \int_{-5}^5 x^2e^x dx = [x^2e^x]_{-5}^5 - 2 \int_{-5}^5 xe^x dx$$

Appliquons une intégration par parties une deuxième fois pour calculer :

$$\text{JJ} = \int_{-5}^5 xe^x dx$$

On pose :

$$u(x) = x \qquad v'(x) = e^x$$

On obtient :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^x$$

Par substitution dans la formule de l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{JJ} &= [xe^x]_{-5}^5 - \int_{-5}^5 e^x dx \\ &= [xe^x]_{-5}^5 - [e^x]_{-5}^5 \\ &= [xe^x - e^x]_{-5}^5 \\ &= 5e^5 - e^5 - (-5e^{-5} - e^{-5}) \\ &= 4e^5 + 6e^{-5} \end{aligned}$$

Remplaçons ce résultat dans l'intégrale J :

$$\begin{aligned} \text{J} &= [x^2e^x]_{-5}^5 - 2(4e^5 + 6e^{-5}) \\ &= (25e^5 - 25e^{-5}) - 2(4e^5 + 6e^{-5}) \\ &= 17e^5 - 37e^{-5} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer les intégrales I et J par leur valeurs dans la formule de la variance :

$$V(X) = E(X^2) = \frac{\text{I} + \text{J}}{2(e^5 - e^{-5})} = \frac{(17e^5 - 37e^{-5}) + (17e^5 - 37e^{-5})}{2(e^5 - e^{-5})}$$

La variance de  $X$  est donc égale à :

$$V(X) = \frac{17e^5 - 37e^{-5}}{e^5 - e^{-5}}$$

## Troisième partie

# Annexes

# Annexe 1 : Équivalence entre Statistique descriptive et Probabilités

## Statistique descriptive

Lorsqu'un phénomène est **observé** avec **certitude**, on applique la statistique descriptive pour le décrire, en calculant les fréquences  $f_i$  de ses observations  $x_i$  par exemple. En l'absence de certitude, on recourt à la théorie des probabilités.

## Théorie des probabilités

Lorsque le phénomène est **inobservé**, il a plusieurs **possibilités**  $x_i$  donnant lieu à une **incertitude**. On applique la théorie des probabilités pour calculer la probabilité  $p_i$  de réalisation de chacune des possibilités  $x_i$ .

Exemple d'un dé



Un dé est un cube dont les faces -observables- sont numérotées de 1 à 6. On considère la variable statistique  $X$  dont les modalités  $x_i$  représentent les numéros des faces. A chaque modalité  $x_i$  est associé un effectif  $n_i$  indiquant le nombre de ses apparitions. L'effectif total  $n$  est la somme des effectifs  $n_i$  et la fréquence  $f_i$  d'une modalité  $x_i$  est le rapport entre son effectif  $n_i$  et l'effectif total  $n$ . Les distributions statistiques respectives des effectifs et des fréquences de la variable  $X$  sont résumées dans le tableau suivant :

$x_i$	$n_i$	$f_i$
1	1	1/6
2	1	1/6
3	1	1/6
4	1	1/6
5	1	1/6
6	1	1/6
$\Sigma$	6	1

Dans une expérience aléatoire -dont les résultats ne sont pas connus en avance avec certitude- on lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère la variable aléatoire  $X$  qui donne les résultats possibles  $x_i$  de cette expérience. A chaque possibilité  $x_i$  est associée une probabilité  $p_i$  de se réaliser. La distribution de probabilités de la variable  $X$  est résumée dans le tableau suivant :

$x_i$	$p_i$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
$\Sigma$	1

Il y a une équivalence entre la distribution des fréquences  $f_i$  et la distribution des probabilités  $p_i$ .

**Conclusion :** Lorsqu'un phénomène est observable, on peut décrire ses observations  $x_i$  par la distribution des fréquences  $f_i$ . Lorsqu'il est inobservable, on peut juste étudier ses possibilités  $x_i$  par leur distribution de probabilités  $p_i$ .

# Annexe 2 : Moments empiriques *vs* Moments théoriques

## Équivalence entre moments empiriques et moments théoriques

L'équivalence entre la distribution des fréquences  $f_i$  d'une variable statistique  $X$  et la distribution des probabilités  $p_i$  d'une variable aléatoire  $X$  permet d'établir l'équivalence entre les moments empiriques de la variable statistique  $X$  et les moments théoriques de la variables aléatoire  $X$ . Ces derniers sont obtenus en remplaçant les fréquences  $f_i$  dans les moments empiriques par des probabilités  $p_i$ .

### Moments empiriques

La distribution statistique d'une variable statistique  $X$  est caractérisée par les **moments empiriques** de  $X$  : moyenne arithmétique, variance, écart-type...

#### Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^k f_i x_i$$

### Moments théoriques

La distribution de probabilités d'une variable aléatoire  $X$  est caractérisée par les **moments théoriques** de  $X$  : espérance mathématique, variance, écart-type...

#### Espérance mathématique :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i$$

**Variance :**

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

**Écart-type :**

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

**Coefficient d'asymétrie :**

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^3 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^3 \\ &= \sum_{i=1}^k f_i \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^3 \end{aligned}$$

**Coefficient d'aplatissement :**

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^4 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^4 \\ &= \sum_{i=1}^k f_i \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^4 \end{aligned}$$

**Variance :**

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^k p_i [x_i - E(X)]^2 \\ &= E \left[ (X - E(X))^2 \right] \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

**Écart-type :**

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

**Coefficient d'asymétrie :**

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sum_{i=1}^k p_i \left( \frac{x_i - E(X)}{\sigma_X} \right)^4 \\ &= E \left[ \left( \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

**Coefficient d'aplatissement :**

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sum_{i=1}^k p_i \left( \frac{x_i - E(X)}{\sigma_X} \right)^3 \\ &= E \left[ \left( \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

**Fonctions génératrice des moments :  $m_r$  et  $\mu_r$**

**Moments empiriques simples d'ordre  $r$  :**

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^r = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i^r = \sum_{i=1}^k f_i x_i^r$$

**Moments théoriques simples d'ordre  $r$  :**

$$m_r = \sum_{i=1}^k p_i x_i^r$$

**Moments empiriques centrés d'ordre  $r$  :**

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^r \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} (x_i - \bar{x})^r \\ &= \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^r \end{aligned}$$

**Moments théoriques centrés d'ordre  $r$  :**

$$\begin{aligned} \mu_r &= \sum_{i=1}^k p_i [x_i - E(X)]^r \\ &= E[(X - E(X))^r] \end{aligned}$$

La moyenne arithmétique et l'espérance mathématique sont des moments simples d'ordre 1 et la variance est un moment centré d'ordre 2.

Exemple d'un dé



On considère la variable statistique  $X$  représentant les numéros  $x_i$  des faces d'un dé.  $n_i$  et  $f_i$  désignent respectivement les effectifs et les fréquences des modalités  $x_i$ . On calcule la moyenne arithmétique, la variance et l'écart-type de  $X$  :

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1	1	1/6	1/6	1/6
2	1	1/6	2/6	4/6
3	1	1/6	3/6	9/6
4	1	1/6	4/6	16/6
5	1	1/6	5/6	25/6
6	1	1/6	6/6	36/6
$\Sigma$	6	1	21/6	91/6

On considère la variable aléatoire  $X$  donnant les résultats possibles  $x_i$  du lancer d'un dé équilibré.  $p_i$  désigne la probabilité de  $x_i$ . On calcule l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de  $X$  :

$x_i$	$p_i$	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
4	1/6	4/6	16/6
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	6/6	36/6
$\Sigma$	1	21/6	91/6

**Moyenne arithmétique :**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^6 f_i x_i = 21/6 = 7/2$$

**Variance :**

$$\begin{aligned} V(X) &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^6 f_i x_i^2 - \bar{x}^2 \\ &= 91/6 - (7/2)^2 = 35/12 \end{aligned}$$

**Écart-type :**

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{35/12}$$

**Espérance mathématique :**

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 p_i x_i = 21/6 = 7/2$$

**Variance :**

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^6 p_i x_i^2 - E^2(X) \\ &= 91/6 - (7/2)^2 = 35/12 \end{aligned}$$

**Écart-type :**

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{35/12}$$

# Annexe 3 : Variables aléatoires

## Variable aléatoire discrète (v.a.d)

Une probabilité  $p_i$  vérifie :

$$0 \leq p_i \leq 1$$
$$\sum_i p_i = 1$$

### Moments d'une v.a.d

**Espérance mathématique :**

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i$$

**Variance :**

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

avec

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2$$

## Variable aléatoire continue (v.a.c)

Une densité de probabilités  $f(x)$  vérifie :

$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

### Moments d'une v.a.c

**Espérance mathématique :**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

**Variance :**

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

avec

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

**Exemple 1 :** Soit  $X$  une v.a.d de loi de probabilités suivante :

$x_i$	0	1	2
$p_i$	1/5	2/5	2/5

L'espérance mathématique de  $X$  est donnée par :

$x_i$	$p_i$	$p_i x_i$
0	1/5	0
1	2/5	2/5
2	2/5	4/5
$\Sigma$	1	6/5

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i = 6/5$$

L'espérance mathématique de  $X^2$  est donnée par :

$x_i$	$p_i$	$p_i x_i^2$
0	1/5	0
1	2/5	2/5
2	2/5	8/5
$\Sigma$	1	10/5

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i^2 = 10/5 = 2$$

La variance de  $X$  est donnée par :

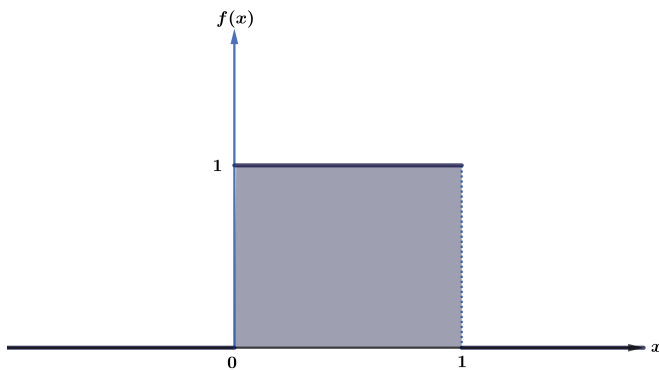
$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2 - (6/5)^2 = 14/25$$

**Exemple 3 :** Soit  $X$  une v.a.c de fonction de densité  $f(x)$  telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$  est bien une fonction de densité puisqu'elle vérifie :

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 1dx + \int_1^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + [x + c]_0^1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de  $X$  est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^1 xf(x)dx + \int_1^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 xdx + \int_1^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + [x^2/2 + c]_0^1 + 0 \end{aligned}$$

**Exemple 2 :** Soit  $X$  une v.a.d de loi de probabilités suivante :

$x_i$	0	1	2	3
$p_i$	2/10	4/10	3/10	1/10

L'espérance mathématique de  $X$  est donnée par :

$x_i$	$p_i$	$p_i x_i$
0	2/10	0
1	4/10	4/10
2	3/10	6/10
3	1/10	3/10
$\Sigma$	1	13/10

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 p_i x_i = 13/10$$

L'espérance mathématique de  $X^2$  est donnée par :

$x_i$	$p_i$	$p_i x_i^2$
0	2/10	0
1	4/10	4/10
2	3/10	12/10
3	1/10	9/10
$\Sigma$	1	25/10

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^4 p_i x_i^2 = 25/10 = 5/2$$

La variance de  $X$  est donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = (5/2) - (13/10)^2 = 81/100$$

L'espérance mathématique de  $X^2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{+\infty} 0 dx \\ &= 0 + [x^3/3 + c]_0^1 + 0 \\ &= 1/3 \end{aligned}$$

La variance de  $X$  est donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = (1/3) - (1/2)^2 = 1/12$$

# Bibliographie

- [1] W. Appel. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K éditions., 2015.
- [2] R. Bhattacharya and E.C. Waymire. *A Basic Course in Probability Theory*. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [3] L. Carassus. *Probabilités*. LMD Maths. De Boeck supérieur, 2018.
- [4] R.C. Dalang and D. Conus. *Introduction à la théorie des probabilités*. Enseignement des mathématiques. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2008.
- [5] V. Delsart and N. Vaneecloo. *Probabilités, variables aléatoires, lois classiques*. Guides pratiques. Presses Universitaires du Septentrion, 2010.
- [6] F.C. Emard. *Probabilités*. SUP EN POCHE SCIENCES. De Boeck supérieur, 2020.
- [7] J. Hoffman-Jorgensen. *Probability With a View Towards Statistics, Volume I*. Number vol. 1. CRC Press, 2017.
- [8] K. Itô. *An Introduction to Probability Theory*. Cambridge University Press, 1984.
- [9] G. Lebanon. *Probability : The Analysis of Data, Volume 1*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012.
- [10] J.P. Lecoutre. *TD Statistique et probabilités - 6e édition*. TD. Dunod, 2015.
- [11] M. Lefebvre. *Probabilités, statistique et applications*. Presses internationales Polytechnique, 2011.
- [12] W. Mendenhall, R.J. Beaver, and B.M. Beaver. *Introduction to Probability and Statistics Metric Edition*. Cengage Learning, Incorporated, 2018.
- [13] J.M. Morvan, R. Morvan, and É. Cépaduès. *Probabilités Discrètes 2E Édition*. Bien Débuter en Mathématiques. Cépaduès, 2008.
- [14] M. Pierre and É. Cépaduès. *Probabilités Discrètes. Cours Et Exercices*. Pierre Meunier Series - Maths. Cépaduès, 2015.

- [15] S.M. Ross. *Initiation aux probabilités*. Enseignement des mathématiques. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.
- [16] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.
- [17] G.R. Shorack. *Probability for Statisticians*. Springer Texts in Statistics. Springer International Publishing, 2017.
- [18] D.W. Stroock. *Probability Theory, an Analytic View*. Cambridge University Press, 1999.

# PROBABILITÉS

## Exercices corrigés

Ce manuel est une collection d'exercices corrigés de probabilités. Il s'agit essentiellement d'exercices issus de sujets d'examens de probabilités déjà réalisés à la faculté des sciences juridiques, économiques et sociales de Tanger dans laquelle j'assure, entre autres, les travaux dirigés de cette matière depuis une dizaine d'années.

Après un bref rappel sur les deux piliers fondamentaux de la théorie des probabilités que sont la théorie des ensembles et l'analyse combinatoire, ce manuel traite une soixantaine d'exercices relatifs à l'analyse combinatoire, les variables aléatoires discrètes, les variables aléatoires continues et les couples de variables aléatoires.



**Jaouad Madkour** est docteur en Sciences économiques de l'université d'Orléans et enseignant chercheur à la faculté des sciences juridiques, économiques et sociales de Tanger dans laquelle il enseigne les méthodes quantitatives depuis une dizaine d'années. Il a publié un certain nombre d'articles sur l'application des méthodes quantitatives en économie et en finance.

ISBN 978-9920-42-789-0



9 789920 427890