

Les fonctions de plusieurs variables réelles

Les fonctions de plusieurs variables réelles

- 1. Domaine, image et limites 162
- 2. Continuité 169
- 3. Dérivées partielles et élasticités 170
- 4. Différentiabilité et (hyper)plan tangent 173
 - 4.1 Différentiabilité des fonctions d'une seule variable 173
 - 4.2 Différentiabilité des fonctions de n variables 174
 - 4.3 La règle de dérivation en chaîne (*chain rule*) 176
- 5. Fonctions homogènes 178
- 6. Dérivées partielles d'ordres supérieurs et matrice hessienne 178
- 7. Fonctions concaves et convexes ... 180
 - Problèmes et exercices 182
- Domaine, graphe et courbes de niveau 182
- Limites et continuité 186
- Dérivées partielles, élasticités et différentielle 190
- Fonctions homogènes 197
- Matrice hessienne, fonctions concaves et convexes 198

Les fonctions de plusieurs variables constituent la matière mathématique de prédilection pour la formalisation des problèmes de la gestion. Qu'il s'agisse de traiter des questions relatives à la production, la consommation ou encore l'environnement et la gestion publique, une modélisation adéquate s'exprime le plus souvent à l'aide de fonctions de plusieurs variables. Les restrictions exigées par ce cadre conceptuel imposent toutefois, d'une part, la quantification des facteurs pris en compte (les valeurs des variables sont des nombres réels) et, d'autre part, la représentation des relations sous forme déterministe. Au-delà de ces restrictions, d'autres théories mathématiques, qui dépassent le cadre du présent ouvrage, prennent le relais. Ainsi, la théorie des probabilités offre diverses possibilités d'intégration de la notion de risque, cruciale par exemple pour les financiers.

Ce chapitre introduit les fonctions de plusieurs variables réelles en élargissant les définitions énoncées aux chapitres 1 et 4 pour les fonctions d'une variable réelle. Évidemment, la représentation géométrique devient plus lourde : une fonction de n variables se visualise *a priori* dans un espace à $n + 1$ dimensions (n pour les variables, 1 pour la fonction), alors que les pages d'un livre sont, par nature, bidimensionnelles. Pour contourner cette impossibilité technique, nous nous limiterons aux représentations des fonctions de deux variables, soit sous forme de dessins en perspective, soit sous forme de coupes par des plans horizontaux ou verticaux qui donnent des informations souvent utiles, quoique parcellaires. Ce problème de visualisation introduit une rupture nette par rapport aux fonctions d'une variable étudiées antérieurement.

Dans ce chapitre, nous prenons le parti de privilégier les thèmes qui s'écartent des notions vues pour les fonctions d'une seule variable. À l'opposé, les définitions et les propriétés qui apparaissent comme des généralisations évidentes sont évoquées ou présentées brièvement.

1 Domaine, image et limites

Les définitions de base vues aux chapitres 1 et 3 pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} s'adaptent sans difficulté au cas des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Définitions Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, associe à chaque élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ un et un seul nombre réel $f(x)$.

Le *domaine* de f est l'ensemble D .

L'*image* par f de D est l'ensemble $\text{Im}_f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ où } x \in D\}$.

Le *graphe* de f est la surface de \mathbb{R}^{n+1} d'équation $y = f(x)$, où $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$. □

Exemples d'applications à la gestion

- L'utilité U d'un consommateur dépend de ses quantités consommées. En présence de n biens, la fonction d'utilité s'exprime sous la forme $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, où x_i désigne la quantité consommée du i -ème bien disponible ($i = 1, \dots, n$).
- Le coût C d'une brochure publicitaire dépend de son format (longueur p , largeur q , nombre de pages n), du nombre m de couleurs utilisées, de la surface s consacrée aux photographies :

$$C = f(p, q, n, m, s).$$

- La production P d'une entreprise est souvent exprimée en fonction de deux facteurs synthétiques : le capital, noté K , et le travail, noté W : $P = f(K, W)$.
- À la date t , le cours à terme du dollar US (vis-à-vis de l'euro), pour l'échéance T , s'exprime comme une fonction : $F = f(T - t, s_t, r_{t,T}, r_{t,T}^*)$, où s_t est le cours du dollar au comptant en t et $r_{t,T}$ (resp. $r_{t,T}^*$) est le taux d'intérêt en euros (resp. en dollars US) en vigueur à la date t pour l'échéance T .

Lorsque $n = 2$, le graphe $G_f \equiv z = f(x, y)$, où $(x, y) \in D$, est tridimensionnel. Les axes relatifs aux variables, x et y , sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine D apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z . Ainsi, à tout $a = (a_1, a_2) \in D$, dont l'image est $f(a) \in \mathbb{R}$, correspond le point suivant du graphe : $(a_1, a_2, f(a)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective

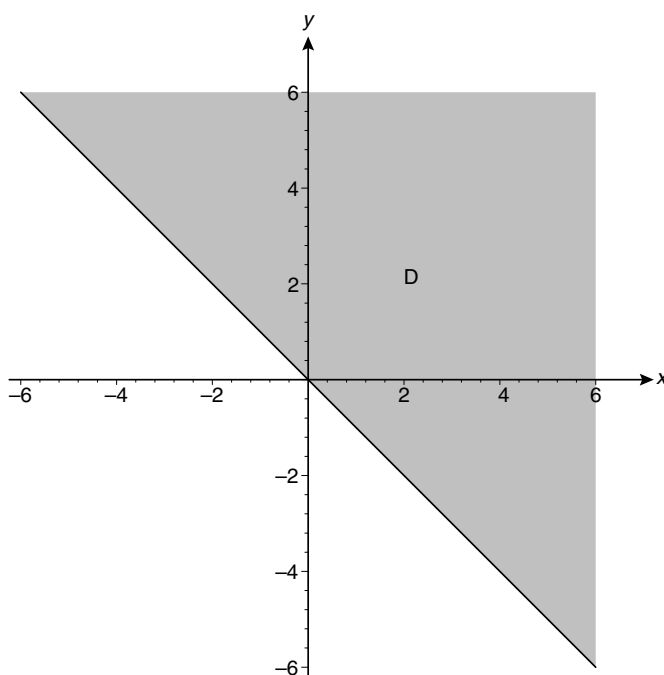
permet la visualisation des surfaces à trois dimensions (voir notamment la figure 6.12, page 171). Dans ce cas, l'axe z est toujours placé verticalement. Toutefois, pour des raisons de lisibilité, les axes x et y ne sont pas toujours présentés selon la même orientation.

Pour $n > 2$, la représentation plane devient malheureusement impraticable.

Exemples mathématiques

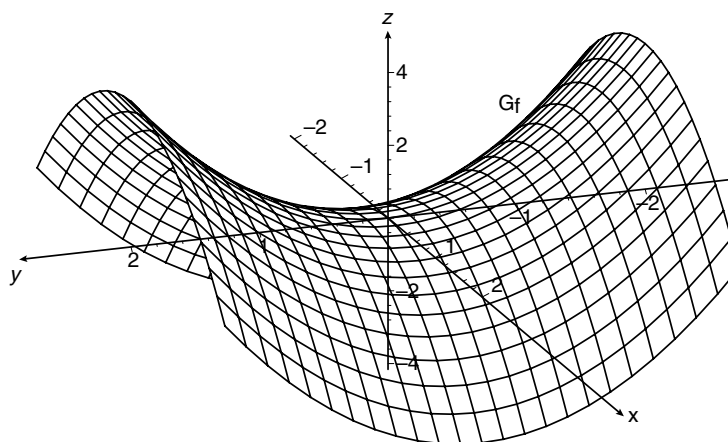
- Le domaine de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ est donné par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0\}$. Il se représente donc naturellement comme une portion du plan \mathbb{R}^2 (voir figure 6.1). En outre, les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nuls : $\text{Im}_f(D) = \mathbb{R}^+$.

Figure 6.1



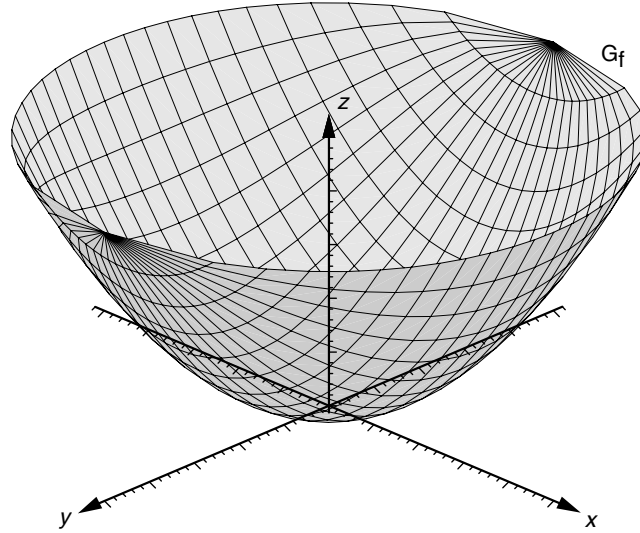
- Le graphe de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$ est une surface de \mathbb{R}^3 qui a la forme d'une selle de cheval, comme l'indique la représentation en perspective de la figure 6.2.

Figure 6.2



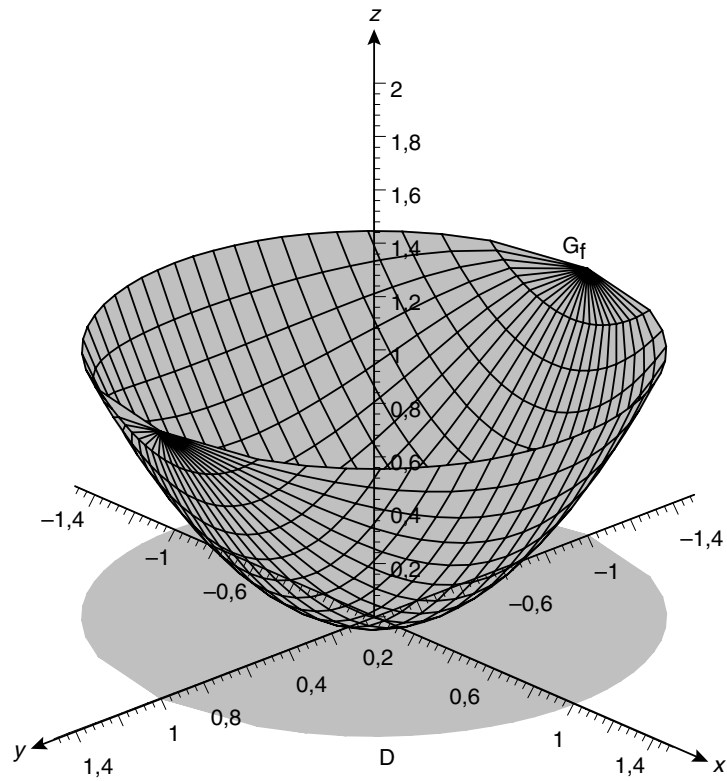
- Le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, définie dans $D = \mathbb{R}^2$, est le parabolôïde représenté par la figure 6.3.

Figure 6.3



- La même fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, mais définie dans le domaine restreint $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, correspond à la portion du parabolôïde de la figure 6.3 vérifiant $0 \leq z \leq 1$ (figure 6.4)

Figure 6.4



On observe que l'intersection du parabololoïde (figure 6.3, page ci-contre) et d'un plan horizontal d'équation $z = k$, où $k \geq 0$, est un cercle de rayon \sqrt{k} . Les traces verticales, moins faciles à visualiser, sont des paraboles. De façon générale, les coupes horizontales du graphe d'une fonction de deux variables sont des courbes planes, dites courbes de niveau. En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude.

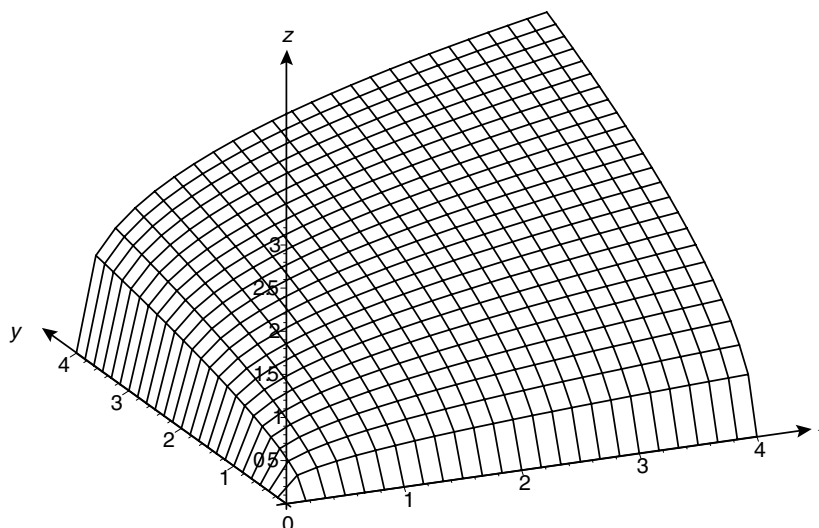
Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^2$, et $k \in f(D) \subset \mathbb{R}$.

La *courbe de niveau* k de f est la courbe plane d'équation : $f(x, y) = k$. □

Exemples d'applications à la gestion

1. La fonction de production de Cobb-Douglas s'écrit $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ ($\alpha, \beta > 0$). Les courbes de niveau d'une telle fonction sont nommées *isocantes* ou *courbes d'isoproduction*. Pour un niveau fixé k de production, l'équation $x^\alpha y^\beta = k$ détermine les points du plan (x, y) donnant toutes les combinaisons des quantités de facteurs qui permettent de produire ce niveau k . La figure 6.5 donne le graphe de la fonction $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/2}$, tandis que la figure 6.6, page suivante, représente les courbes de niveau correspondantes.

Figure 6.5



Sur la figure 6.6, page suivante, une flèche indique le sens de la croissance des valeurs de k .

2. $f(\mu, \sigma) = \mu - \alpha\sigma^2$ ($\alpha > 0$).

Cette fonction est souvent utilisée en gestion de portefeuille : μ désigne la rentabilité attendue du portefeuille et σ sa volatilité (écart-type de la rentabilité). La fonction f représente l'utilité attendue d'un investisseur qui présente de l'aversion vis-à-vis du risque (σ^2 est affecté d'un coefficient négatif).

Les courbes de niveau pour $\alpha = 1$ (figure 6.7, page suivante) et $\alpha = 3$ (figure 6.8, page 167) sont ici appelées *courbes d'indifférence* ou *courbes d'iso-utilité* puisqu'elles caractérisent les rentabilités attendues et les volatilités des portefeuilles qui atteignent, pour l'investisseur considéré, un niveau fixé d'utilité attendue.

Figure 6.6

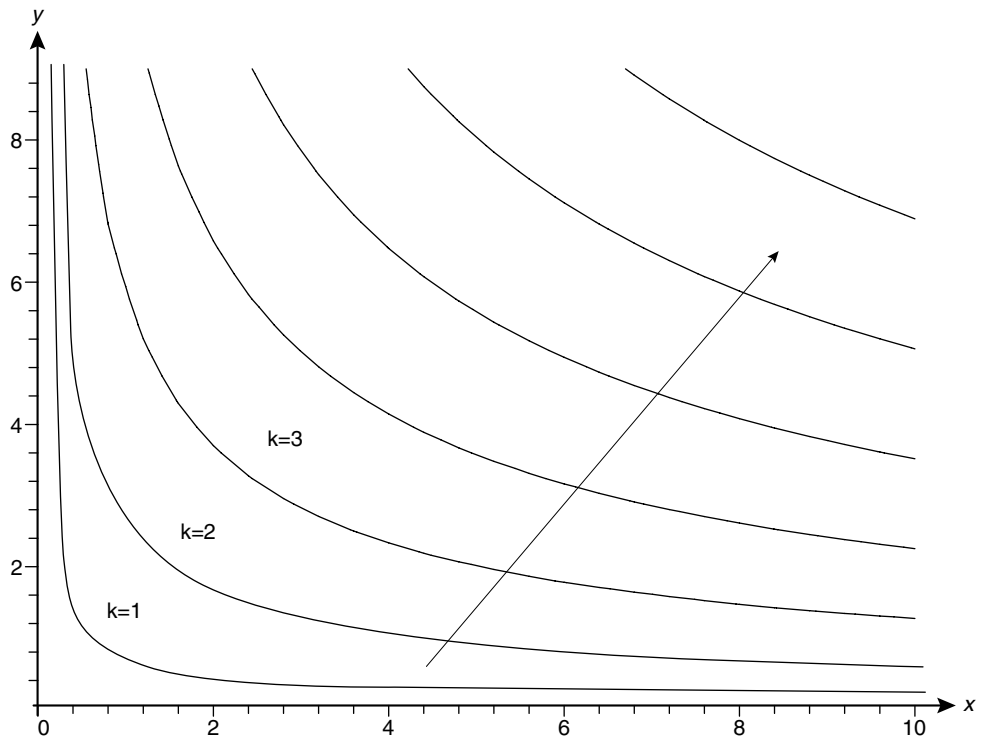
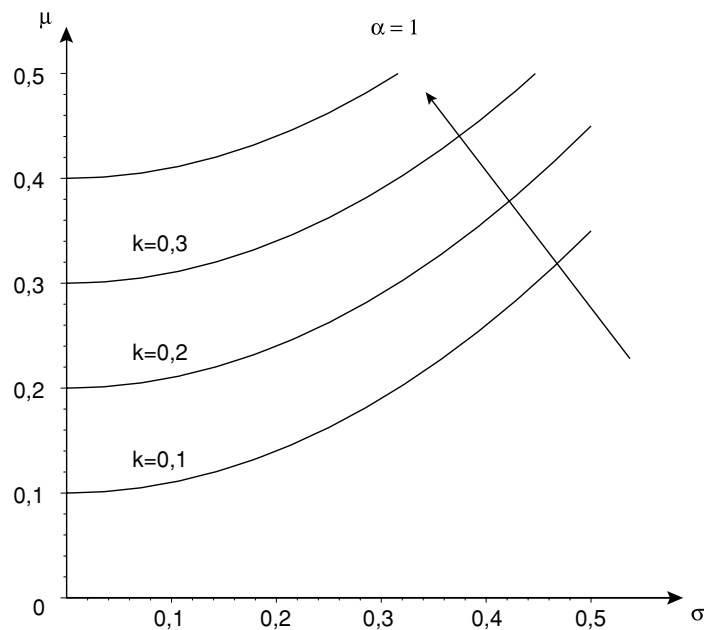
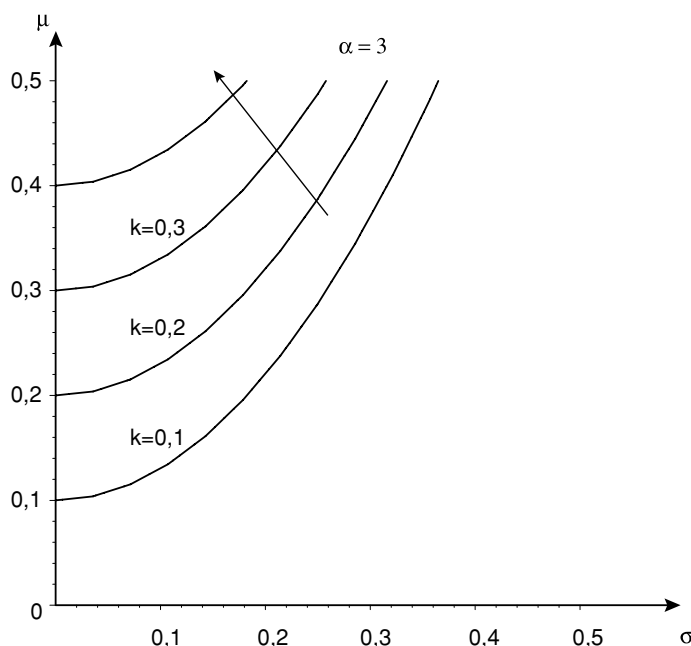


Figure 6.7



La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise naturellement la notion correspondante dans le cas des fonctions d'une seule variable. Toutefois, un nouvel élément entre en jeu : les limites unilatérales perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles. En effet, dès que le domaine se situe dans un espace à deux dimensions au moins, les chemins qui mènent à un point donné

Figure 6.8



peuvent suivre divers axes. Ainsi, l'ensemble D' des points en lesquels une limite peut être considérée, doit être défini en tenant compte de toutes les possibilités d'accès. Une façon commode de procéder s'appuie sur la notion de boule ouverte dans \mathbb{R}^n (voir le chapitre 1) qui généralise celle d'intervalle ouvert dans \mathbb{R} .

Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$. Le *domaine d'examen* des limites est donné par :

$$D' = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \delta > 0 \text{ tel que } B(x, \delta) \setminus \{x\} \subset D\}. \quad \square$$

La notion de « limite », sans autre qualification, se substitue donc à celle de limite bilatérale pour les fonctions d'une seule variable réelle. Elle est définie comme suit.

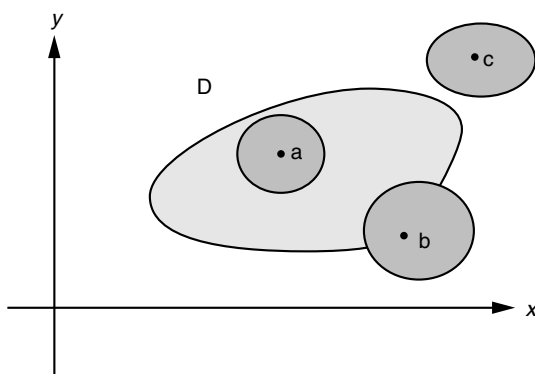
Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D'$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left. \begin{array}{l} x \in B(a, \eta) \setminus \{a\} \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad \square$$

Lorsqu'elle existe, cette limite est unique. Les valeurs de la fonction tendent vers le nombre b , quel que soit le chemin emprunté par la variable x (de dimension n) pour approcher le point a .

Par définition, les points de D' peuvent être atteints par tout chemin dans une boule ouverte. On peut généraliser la définition précédente à l'ensemble moins restrictif, noté D'_B , des points qui peuvent être atteints par au moins un chemin dans D . Par exemple, pour le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ représenté par la figure 6.9, page suivante, $a \in D'$ tandis que $b, c \notin D'$. Pourtant, à l'opposé de c , le point b est l'aboutissement de certains chemins dans D . Pour prendre en compte ce type de situation, on définit la limite le long d'une courbe.

Figure 6.9



Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, et C une courbe dans D menant à $a \in D'$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in C}} f(x) = b \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left. \begin{array}{l} x \in C \setminus \{a\} \\ x \in B(a, \eta) \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad \square$$

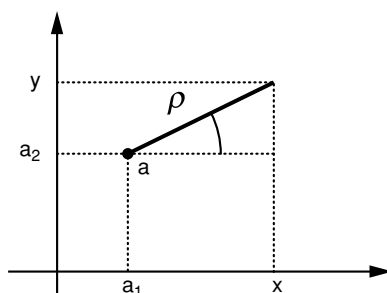
De façon évidente, lorsque $a \in D'$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, toutes les limites le long de courbes sont égales à b . En pratique, on peut démontrer la non-existence d'une limite en exhibant des valeurs distinctes obtenues le long de deux chemins particuliers.

L'extension aux limites infinies et les propriétés (somme, produit, pincement, etc.) vues au chapitre 3 se transposent de façon immédiate au cas des fonctions de plusieurs variables. Pour éviter les redondances, nous ne les énonçons pas ici.

En pratique, lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux *coordonnées polaires* pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour du point $a = (a_1, a_2)$ vers lequel il est appelé à tendre (voir figure 6.10) :

$$\begin{cases} x = a_1 + \rho \cos \theta \\ y = a_2 + \rho \sin \theta \end{cases} .$$

Figure 6.10



Dans cette écriture, ρ représente la distance entre a et x de sorte que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(a_1 + \rho \cos \theta, a_2 + \rho \sin \theta).$$

Exemple

Montrons de deux manières que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas. La première résulte directement de la définition. En effet, le long de l'axe horizontal $X \equiv y = 0$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in X}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

tandis que, le long de l'axe vertical $Y \equiv x = 0$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in Y}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq 1$$

de sorte que les deux limites ne coïncident pas.

La seconde manière est basée sur les coordonnées polaires. En posant : $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Le résultat varie selon la direction θ , donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

2 Continuité

La définition adoptée pour la continuité s'applique à tous les points de D auxquels mène au moins un chemin dans D (les points de $D'_B \cap D$), même les bords du domaine. Elle équivaut à imposer que tous les chemins conduisent à la même limite $f(a)$.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$.

f est continue en $a \in D'_B \cap D$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : d(a, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f est continue dans D si $\forall a \in D'_B \cap D : f$ est continue en a . □

Cas particulier f est continue en $a \in D' \cap D$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Donc, pour les éléments de $D' \cap D$, cette définition s'exprime à l'aide de la limite usuelle. □

Les fonctions continues de plusieurs variables jouissent des mêmes propriétés que les fonctions continues d'une seule variable. Les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont continues dans leurs domaines de définition respectifs. La continuité des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, etc., de fonctions continues.

Exemples

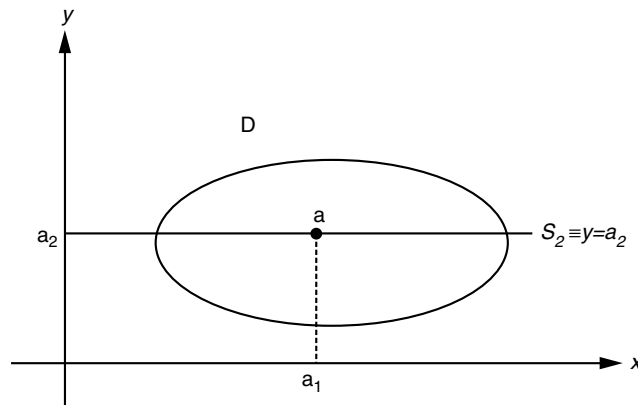
1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + y$ est continue dans \mathbb{R}^2 (polynôme du second degré à deux variables).
2. $f(x, y, z) = e^y + xy^2 - z$ est continue dans \mathbb{R}^3 (somme d'une exponentielle et d'un polynôme).
3. $f(x, y) = \ln(x + y^2) - 3$ est continue dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 > 0\}$ comme somme du logarithme d'un polynôme (fonction composée) et d'une constante.

3 Dérivées partielles et élasticités

L'unique dérivée d'une fonction d'une variable, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction tandis que la variable parcourt l'axe des abscisses. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de \mathbb{R}^3 , la situation est très différente. En effet, l'axe réel n'offre que deux types de mouvements possibles : de gauche à droite et de droite à gauche tandis que le plan \mathbb{R}^2 possède une infinité de directions.

Or, il peut s'avérer intéressant d'étudier comment une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan. À cet égard, considérons d'abord la direction horizontale. Prenons le point $a = (a_1, a_2)$ du domaine de f (figure 6.11). Son image est $f(a) \in \mathbb{R}$ et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de \mathbb{R}^3 (figure 6.12, page ci-contre), comporte le point $(a_1, a_2, f(a))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = a_2$ est la courbe d'équation $z = f(x, a_2)$ de \mathbb{R}^3 .

Figure 6.11



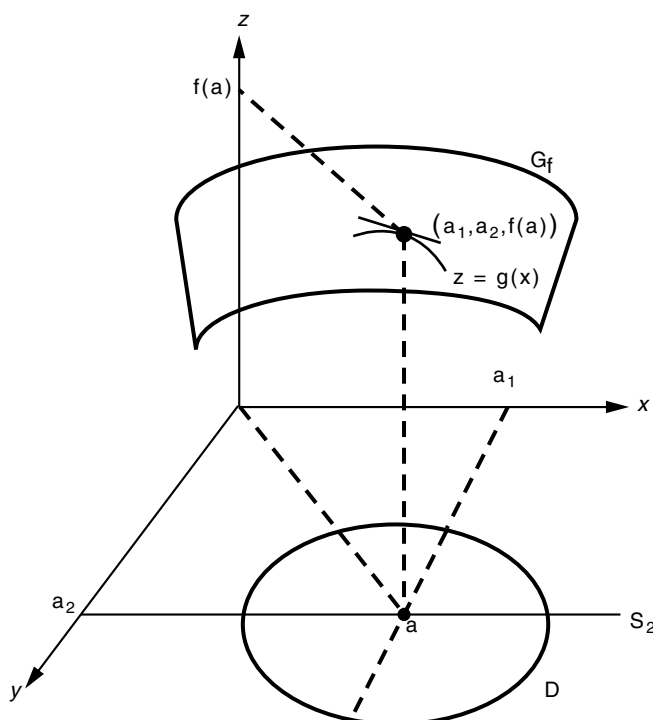
Le point $a = (a_1, a_2)$ étant fixé, on peut alors interpréter cette courbe comme le graphe de la fonction g d'une seule variable définie par $g(x) = f(x, a_2)$. Si g est dérivable en a_1 , alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de la fonction f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de \mathbb{R}^2 passant par le point (a_1, a_2) , représentée par S_2 sur les figures 6.11 et 6.12, page ci-contre.

Par définition de la dérivée d'une fonction d'une variable, il vient :

$$g'(a_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(a_1 + \Delta x) - g(a_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + \Delta x, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x}.$$

Si elle existe, cette dérivée s'appelle la *dérivée partielle* de f par rapport à x au point $a = (a_1, a_2)$, et se note $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$. De façon similaire, on définit la dérivée partielle par rapport à y obtenue en fixant $x = a_1$. La définition générale des dérivées partielles s'applique à toute fonction de n variables.

Figure 6.12



Définitions La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, est *dérivable partiellement* par rapport à sa i -ème variable en $a = (a_1, \dots, a_n) \in D' \cap D$ si

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + \Delta x_i, \dots, a_n) - f(a)}{\Delta x_i} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée *dérivée partielle* de f par rapport à sa i -ème variable en a et est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_i(a)$.

La fonction est *dérivable* en a si elle est dérivable partiellement par rapport à toutes ses variables en ce point. □

En pratique, pour calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x_i et que toutes les autres variables, x_j , où $j \neq i$, étaient des constantes.

Les dérivées partielles jouissent des mêmes propriétés que les dérivées de fonctions d'une seule variable. En particulier, les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont dérivables dans leur domaine respectif. La dérivabilité (partielle) des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, etc., de fonctions dérivables. Les règles de dérivation sont également similaires, à l'exception de celle relative à la dérivation des fonctions composées. En effet, lorsque $n > 1$, il est impossible de réaliser un produit de composition entre deux fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. À ce sujet, la règle de dérivation en chaîne sera exposée dans un cadre plus général, dans la section 4.3.

Exemples

1. Toute fonction polynôme est dérivable dans son domaine. Considérons, par exemple, la fonction $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, définie et dérivable dans \mathbb{R}^2 . Ses deux dérivées partielles au point $(2, 1)$ sont obtenues en deux étapes. On calcule d'abord les dérivées partielles en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ grâce aux règles de dérivation des fonctions d'une variable (en considérant, à chaque fois, l'autre variable comme une constante) : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$. On évalue ensuite ces deux fonctions au point considéré : $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 16$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 8$.

2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables (polynômes) à dénominateur non nul. Il convient cependant d'étudier la dérivabilité en $(0, 0)$, donc l'existence des deux dérivées partielles en ce point. On a :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

La fonction f est donc dérivable en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. En conclusion, f est dérivable dans \mathbb{R}^2 .

La propriété selon laquelle la dérivabilité d'une fonction d'une variable en un point implique la continuité en ce point ne se généralise pas à plus d'une variable. L'exemple 2 ci-dessus peut servir de contre-exemple :

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est dérivable mais pas continue en $(0, 0)$. En effet, la limite de f le long de la bissectrice d'équation $x = y$ fait apparaître que :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} \frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0.$$

Les directions correspondant aux dérivées partielles sont celles des axes. D'autres dérivées directionnelles sont aussi envisageables, quoique nettement moins utiles dans les applications en gestion. Nous en citons simplement la définition.

Définition La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, est dérivable en $a = (a_1, \dots, a_n) \in D' \cap D$ dans la direction indiquée par le vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{f(a + \beta u) - f(a)}{\beta} \quad \text{existe dans } \mathbb{R}. \quad \square$$

Alors que les dérivées partielles s'interprètent en termes de variations de la fonction en niveau, les élasticité se réfèrent aux variations relatives (souvent exprimées en %). En pratique, les élasticité jouent un rôle important en tant que mesure de la sensibilité vis-à-vis de divers paramètres (élasticité des courbes d'offre et de demande vis-à-vis des prix, durée d'une obligation, etc.).

Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, dérivable partiellement par rapport à sa i -ème variable en $a = (a_1, \dots, a_n) \in D' \cap D$ telle que $a_i \neq 0$ et $f(a) \neq 0$. L'élasticité de f par rapport à sa i -ème variable en a , est donnée par :

$$E_f^i(a) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a_1, \dots, a_i + \Delta x_i, \dots, a_n) - f(a)}{f(a)}}{\frac{\Delta x_i}{a_i}} \quad \square$$

Au plan mathématique cependant, les propriétés des élasticité découlent directement de celles des dérivées partielles, en vertu du résultat suivant :

Propriété $E_f^i(a) = \frac{a_i}{f(a)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. □

Exemple

$f : (\mathbb{R}_0^+)^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$) est dérivable dans $(\mathbb{R}_0^+)^n$. Grâce aux règles de dérivation, on obtient :

$$E_f^i(x) = \frac{x_i}{f(x)} \cdot f'_i(x) = \frac{x_i}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}} \alpha_i x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i-1} \dots x_n^{\alpha_n} = \alpha_i.$$

En conséquence, toutes les fonctions de Cobb-Douglas bénéficient d'élasticité constantes, ce qui contribue à expliquer l'attrait qu'elles représentent pour le modélisateur.

4 Différentiabilité et (hyper)plan tangent

4.1 DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

Quel que soit le nombre de variables en présence, la différentiabilité d'une fonction f en un point a correspond à l'existence d'une *approximation linéaire de la fonction au voisinage du point $(a, f(a))$* du graphe de la fonction.

Pour les fonctions d'une seule variable, cette approximation linéaire est fournie par la droite tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, impliquant directement l'équivalence entre la dérivabilité et la différentiabilité. Il n'était donc pas nécessaire d'ajouter une définition. Cependant, la notion de différentielle des fonctions d'une seule variable est abordée ici parce qu'elle permet de mieux appréhender la différentielle des fonctions de plusieurs variables.

Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$, où $D \subset \mathbb{R}$, et un point a en lequel f est dérivable. La *différentielle* de f au point a est la fonction linéaire $df_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x \rightarrow f'(a)\Delta x$ (où $\Delta x = x - a$). □

Le point a étant fixé, la différentielle est une fonction de l'accroissement Δx de la variable. Elle constitue une approximation linéaire (formule de Taylor à l'ordre 1) de l'accroissement de la fonction $\Delta f = f(x) - f(a)$ au voisinage du point a , de sorte qu'on écrit, de façon condensée : $df_a \cong \Delta f$.

Pour la fonction identité, $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x$, on a : $\forall a \in \mathbb{R} : I'(a) = 1$. En conséquence, sa différentielle, notée dx , est telle que : $\forall a \in \mathbb{R} : dI_a = dx = \Delta x$. On substitue alors volontiers dx à Δx dans l'écriture de la différentielle d'une fonction quelconque (mais évidemment différentiable en a) pour obtenir l'expression $df_a = f'(a)dx$, ou même $df = f'(a)dx$.

Le cas simple des fonctions d'une seule variable illustre que la maîtrise des concepts de différentiabilité et de différentielle passe inévitablement par la compréhension des notations, variées et souvent abrégées, qui les concernent.

4.2 DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS DE n VARIABLES

Dans le cas des fonctions de deux variables et plus, l'équivalence disparaît entre l'existence des dérivées partielles, d'une part, et celle d'un plan tangent⁽¹⁾, d'autre part. Cela provient du fait que la dérivabilité repose seulement sur des limites le long de directions particulières. La dérivabilité apparaît donc comme un concept trop faible pour garantir l'existence d'un plan tangent. La notion de différentiabilité va combler ce déficit.

Pour les fonctions de deux variables, l'intuition géométrique peut encore servir de guide. Ainsi, si la fonction f est dérivable en $a = (a_1, a_2)$, on peut affirmer l'existence de deux droites tangentes, chacune par rapport à la trace verticale du graphe dans un plan d'équation $x_i = a_i$ ($i = 1, 2$). Dans le meilleur des cas, ces deux droites, nécessairement concourantes en $(a, f(a))$, forment un plan qui est tangent au graphe. Toutefois, certaines irrégularités peuvent surgir (par exemple, la présence d'une discontinuité en a) qui excluent l'existence d'un plan tangent. Dans pareil cas, les deux droites existent et définissent un plan *qui n'est pas un plan tangent*, parce qu'un tel plan n'existe pas. Ces deux droites déterminent donc un « candidat plan tangent », dont l'existence doit encore être vérifiée.

Plus généralement, la différentiabilité d'une fonction de n variables, dérivable au point a , s'étudie en deux étapes. La première consiste à introduire la « candidate différentielle ». La seconde teste si cette candidate constitue effectivement une approximation locale de l'accroissement de la fonction. Les définitions suivantes précisent ces notions.

Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, dérivable en $a \in D' \cap D$. La fonction linéaire suivante est appelée *candidate différentielle* au point a :

$$cdf_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i. \quad \square$$

La notion de différentiabilité impose que la candidate différentielle représente une approximation du premier ordre de $\Delta f = f(x) - f(a)$ au voisinage du point a et transforme donc la candidate en « différentielle » avérée.

1. Il s'agit en fait d'un plan tangent pour $n = 2$, d'un hyperplan tangent pour $n > 2$. Dans un espace de dimension n , un hyperplan est une variété linéaire de dimension $n - 1$.

Définition La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, est *différentiable en* $a \in D' \cap D$ s'il existe une fonction linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x - a)}{\|x - a\|} = 0, \text{ où } \|x - a\| = d(x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}. \square$$

Lorsqu'elle existe, la fonction linéaire df_a est unique et donnée par la candidate différentielle : $df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$, ou sous forme matricielle par : $df_a = \nabla f(a) \cdot dx$, où la

matrice-ligne $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ est le *gradient* de f en a et $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$.

Dans le cas contraire, la fonction n'est pas différentiable au point a .

Remarque

Le gradient est aussi représenté sous la forme d'un vecteur de \mathbb{R}^n :

$$(\text{Grad } f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Exemple

$f(x, y) = x^2 + y^2$ est dérivable dans \mathbb{R}^2 et on a : $\forall a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2a_1, \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2a_2$.

La candidate différentielle en a s'écrit donc : $cdf_a = 2a_1 dx + 2a_2 dy$.

Afin de voir si cette candidate est effectivement une différentielle, on calcule :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow a} \frac{f(x, y) - f(a) - df_a(x - a_1, y - a_2)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow a} \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2 - 2a_1(x - a_1) - 2a_2(y - a_2)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow a} \frac{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow a} \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = 0. \end{aligned}$$

En conséquence, la fonction f est différentiable dans \mathbb{R}^2 et $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : df_a = 2a_1 dx + 2a_2 dy$.

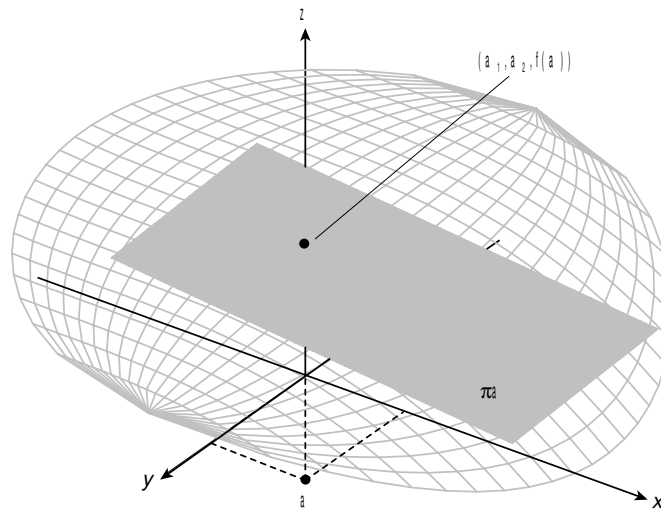
Notons que les fonctions élémentaires telles que les polynômes (voir l'exemple ci-dessus), les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont automatiquement différentiables dans leur domaine respectif et que les propriétés de différentiabilité relatives aux sommes, produits, etc., existent.

À l'approche analytique, correspond la vision géométrique d'un *hyperplan tangent*. En effet, lorsque f est différentiable en a , on peut, dans un voisinage de a , approcher $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ par $df_a(\Delta x)$, donc aussi approcher $f(a + \Delta x)$ par $f(a) + df_a(\Delta x) : f(a + \Delta x) \cong f(a) + df_a(\Delta x)$ (approximation locale linéaire ou du premier ordre).

Dans le cas d'une fonction de deux variables, la figure 6.13, page suivante, montre le plan tangent $\Pi_a \equiv z = f(a) + df_a(\Delta x, \Delta y)$ au voisinage du point $(a_1, a_2, f(a))$. Cette équation s'écrit aussi : $\Pi_a \equiv z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$.

La différentiabilité est une notion plus forte que la continuité et que la dérivabilité.

Figure 6.13



Propriétés Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in D \cap D'$.

- f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est dérivable en a
- f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est continue en a .

□

Les réciproques sont fausses. Ces propriétés sont souvent utiles pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point donné.

Exemples

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est non continue en $(0,0)$ puisque $\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \frac{1}{2} \neq 0$. Elle n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.
2. $f(x, y) = |x| + |y|$ est non dérivable en $(0,0)$, donc non différentiable en $(0,0)$.

4.3 LA RÈGLE DE DÉRIVATION EN CHAÎNE (*chain rule*)

Dans certaines applications, on est amené à considérer des fonctions de $D \rightarrow \mathbb{R}^m$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, qui peuvent être vues comme des empilements de fonctions de $D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m : x \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m.$$

De telles fonctions s'étudient comme s'il s'agissait de m fonctions de $D \rightarrow \mathbb{R}$. En ce qui concerne la différentiabilité, on adopte les définitions suivantes :

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m : x \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D \cap D'$.

f est différentiable en a si chacune de ses composantes f_i est différentiable en a .

Dans ce cas, la différentielle s'écrit comme un vecteur colonne $df_a = \begin{pmatrix} df_{1,a} \\ \vdots \\ df_{m,a} \end{pmatrix}$.

L'empilement des vecteurs gradients constitue une matrice, de taille $m \times n$, appelée *matrice jacobienne* de f en a ou *jacobien* de f en a :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}_{m \times n}. \quad \square$$

Exemple

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \rightarrow (xyz, x^2 + y^2, e^{xy+z}, \sin(yz))$ est différentiable dans \mathbb{R}^3 (ses quatre

composantes le sont) et $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 0 \\ ye^{xy+z} & xe^{xy+z} & e^{xy+z} \\ 0 & z \cos(yz) & y \cos(yz) \end{pmatrix}$.

Une des propriétés les plus usitées dans la pratique, la *règle de dérivation en chaîne* ou *chain rule*, est relative aux dérivées partielles des fonctions composées.

Règle de dérivation en chaîne (chain rule) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p : y \rightarrow g(y) = (g_1(y), \dots, g_p(y))$.

Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a est donnée par : $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$, ou encore,

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a). \quad \square$$

En pratique, le cas particulier où $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ($p = 1$) est souvent utilisé :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g(f_1(x), \dots, f_m(x))}{\partial x_j}(a) \\ &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(a)) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(a)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a). \end{aligned}$$

Exemple

Le consommateur dont la fonction d'utilité est donnée par $U(x, y)$ est soumis à la contrainte de budget $p_x x + p_y y = R$ ($p_x, p_y, R > 0$), où p_x et p_y sont les prix des deux biens et R le montant

dévolu à l'achat des ces deux biens. La quantité consommée du second bien devient ainsi fonction de celle du premier : $y = f(x)$, où $f(x) = \frac{R - p_x x}{p_y}$, de sorte que, sous la contrainte de budget, la fonction d'utilité peut être exprimée sous la forme d'une fonction d'une seule variable : $V(x) = U(x, f(x))$, qui est la composée de la fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \rightarrow (x, f(x))$ et de la fonction $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow U(x, y)$. Grâce à la *chain rule*, on a :

$$V'(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} f'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{p_x}{p_y}.$$

La différentielle, donnée par $dV = \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{p_x}{p_y} \right] dx$, représente l'approximation linéaire de la variation de l'utilité due à la variation dx de la quantité consommée du premier bien, tenant compte de l'effet sur la quantité du second, via la contrainte de budget.

5 Fonctions homogènes

Les fonctions homogènes apparaissent dans plusieurs problèmes économiques : les fonctions de production de Cobb-Douglas, par exemple, sont homogènes.

Définition $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ est dite *homogène de degré k* si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0 : f(\lambda x) = \lambda^k f(x). \quad \square$$

Les fonctions homogènes bénéficient de la propriété suivante qui découle de la *chain rule*.

Formule d'Euler Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ est homogène de degré k et différentiable dans \mathbb{R}^n , alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x). \quad \square$$

Exemple

La fonction de production de Cobb-Douglas à rendements constants $f(x, y) = x^\alpha \cdot y^{1-\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, est homogène de degré 1 puisque $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^\alpha (\lambda y)^{1-\alpha} = \lambda f(x, y)$. Dans ce cas, la formule d'Euler s'écrit : $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$. Le résultat $f(x, y)$ de la production obtenue avec les quantités respectives x et y de facteurs permet donc de rémunérer ces facteurs au niveau de leur productivité marginale.

6 Dérivées partielles d'ordres supérieurs et matrice hessienne

Chacune des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ s'obtient en calculant la dérivée partielle par rapport à x_i de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, sous réserve d'existence. On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les définitions suivantes s'énoncent dans des ensembles ouverts pour éviter les problèmes liés au calcul de limites au bord du domaine.

Définition $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n , est de classe C^k ($k \in \mathbb{N}_0$) dans D (on note : $f \in C^k(D)$), si f est k fois dérivable dans D et si ses dérivées partielles d'ordres 1 à k sont continues dans D . □

Propriété Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors : $f \in C^1(D) \Rightarrow f$ est différentiable dans D . □

Sur base de cette propriété, on dit volontiers d'une fonction de classe C^1 qu'elle est *continûment différentiable*. En adoptant la notation $C^0(D)$ pour l'ensemble des fonctions continues dans D , on obtient les inclusions évidentes : $C^0(D) \supset C^1(D) \supset C^2(D) \supset \dots \supset C^k(D)$.

Exemple

$f(x, y) = x^2y + xy^3$ est un polynôme défini dans \mathbb{R}^2 . Ses dérivées partielles de tout ordre sont également des polynômes et sont donc toutes continues. Donc : $\forall k \in \mathbb{N} : f \in C^k(\mathbb{R}^2)$.

Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n , deux fois dérivable en $a \in D$. La matrice de taille $n \times n$ formée des dérivées secondes de f en a , notée $H_f(a)$, est appelée *matrice hessienne* de f en a :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}. \quad \square$$

Exemple

La matrice hessienne de la fonction $f(x, y) = x^2y + xy^3$ de l'exemple précédent est donnée par :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 3y^2 \\ 2x + 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice $H_f(x, y)$ est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, sont égales. Le théorème suivant garantit cette égalité sous des conditions légères.

Théorème de Schwarz Si $f \in C^2(D)$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors $\forall x \in D : H_f(x) = H_f^t(x)$, où $H_f^t(x)$ désigne la matrice transposée de $H_f(x)$. \square

Comme la dérivée seconde pour les fonctions d'une seule variable, la matrice hessienne permet d'étudier la convexité des fonctions de plusieurs variables et joue, dès lors, un rôle important dans leur optimisation (voir le chapitre 7).

7 Fonctions concaves et convexes

Les définitions, vues dans le chapitre 3 pour les fonctions d'une variable, se généralisent de la façon suivante.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$, où D est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n .

f est *concave* (resp. *convexe*) dans D si :

$$\forall a, b \in D, \forall t \in [0, 1] : f((1-t)a + tb) \geq (\text{ resp. } \leq) (1-t)f(a) + tf(b).$$

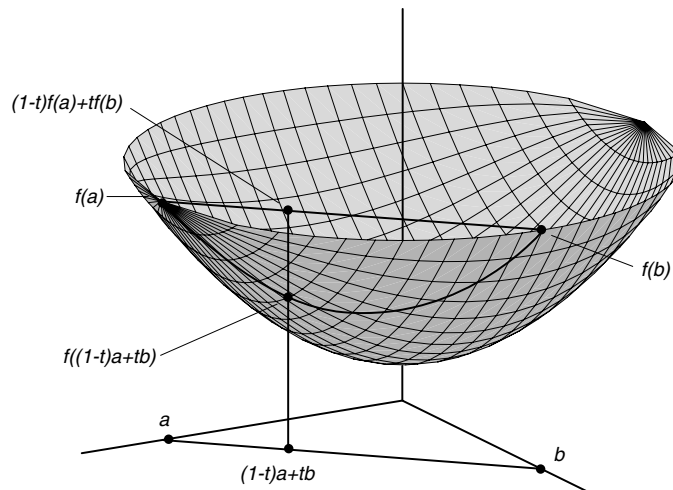
f est dite *strictement concave* (resp. *strictement convexe*) si :

$$\forall a, b \in D, \forall t \in (0, 1) : f((1-t)a + tb) > (\text{ resp. } <) (1-t)f(a) + tf(b). \quad \square$$

Exemple

La figure 6.14 donne le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$, convexe dans \mathbb{R}^2 .

Figure 6.14



Comme pour les fonctions d'une variable, la concavité et la convexité des fonctions de n variables suffisamment régulières peuvent être caractérisées à l'aide des dérivées d'ordres 1 ou 2.

Propriétés Si $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$, où D est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , est différentiable dans D , alors :

- f est concave dans $D \Leftrightarrow \forall x, y \in D : f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)(y - x)$.
- f est convexe dans $D \Leftrightarrow \forall x, y \in D : f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x)$.

Si, en outre, $f \in C^2(D)$, alors :

- f est concave dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D : H_f(x)$ est semi-définie négative.
- f est convexe dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D : H_f(x)$ est semi-définie positive. □

Les deux premiers énoncés expriment que tout plan tangent au graphe d'une fonction concave (resp. convexe) se trouve au-dessous (resp. au-dessus) de ce graphe. Les deux derniers, relatifs à la matrice hessienne, rappellent celui qui fait référence au signe de la dérivée seconde d'une fonction d'une seule variable (voir chapitre 3, section 6.2). De la même manière, la condition stricte ne s'applique que dans un seul sens : si $\forall x \in D : H_f(x)$ est définie négative (resp. positive), alors f est strictement concave (resp. convexe) dans D . Dès lors, une fonction peut être strictement convexe sans que sa matrice hessienne soit définie positive en tout point.

Exemples

1. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. On a : $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale, sa double valeur propre 2 est strictement positive. Il s'ensuit que $H_f(x, y)$ est définie positive. La fonction est donc strictement convexe dans \mathbb{R}^2 .
2. Soit $f(x, y) = x^4 + y^4$. On a : $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$ est diagonale, ses valeurs propres, $12x^2$ et $12y^2$, sont ≥ 0 (strictement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$). Il s'ensuit que $H_f(x, y)$ est définie positive pour $(x, y) \in \mathbb{R}_0^2$ et semi-définie positive pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_0^2$. On peut cependant montrer à l'aide de la définition que la fonction est strictement convexe dans \mathbb{R}^2 .

Problèmes et exercices

La visualisation géométrique des fonctions de deux variables (ou plus !) constitue un défi pour celui qui peine à voir dans l'espace. Les premiers exercices visent à accoutumer le lecteur à cette correspondance entre l'équation du graphe et sa représentation, notamment à l'aide de sections planes qui constituent des « tranches » du graphe. Suivent des énoncés plus analytiques relatifs au calcul de limites, à l'étude de la continuité, la dérivabilité et la différentiabilité. Les fonctions homogènes sont ensuite illustrées. Enfin, la détermination de matrices hessiennes et leur interprétation en terme de concavité et convexité sont abordées. Dans ce chapitre, compte tenu de la densité de la matière, nous avons opté pour une inclusion thématique des exercices appliqués à la gestion.

Domaine, graphe et courbes de niveau

EXERCICE 1

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

a $f(x, y) = \frac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}}$.

b $f(x, y) = \frac{\ln y}{\sqrt{x - y}}$.

c $f(x, y) = \ln(x + y)$.

d $f(x, y, z) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{yz}$.

Solution

a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \text{ et } y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq x^2\}$, représenté par la figure 6.15, page ci-contre.

b $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y \text{ et } y > 0\}$, représenté par la figure 6.16, page ci-contre.

Figure 6.15

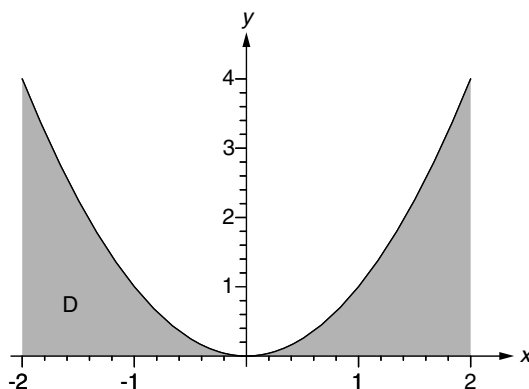
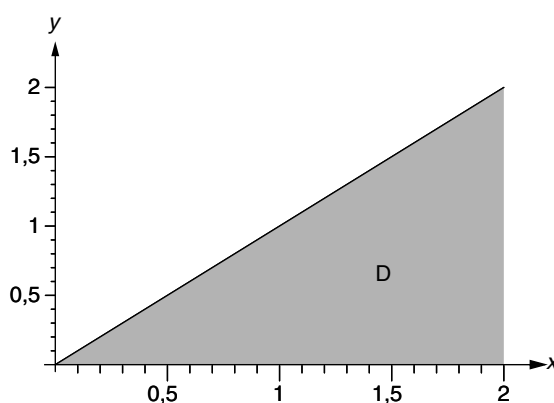


Figure 6.16



- c** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$
- d** $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\}$

EXERCICE 2

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez les courbes de niveau des fonctions de deux variables données. Esquissez ensuite leurs graphes, en recourant, si nécessaire, à une méthode numérique (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveau qui forment une surface dans \mathbb{R}^3).

- a** $f(x, y) = x + y - 1$
- b** $f(x, y) = e^{(y-x^2)}$
- c** $f(x, y) = y - \cos x$

Solution

- a** $D = \mathbb{R}^2$ et $\text{Im}_f(\mathbb{R}^2) = \{z \in \mathbb{R} : z = x + y - 1, \text{ où } x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ est donnée par l'équation $C_k \equiv x + y - 1 = k$. Les courbes de niveau sont donc des droites (figure 6.17, page suivante) et le graphe de f est un plan (figure 6.18, page suivante).

Figure 6.17

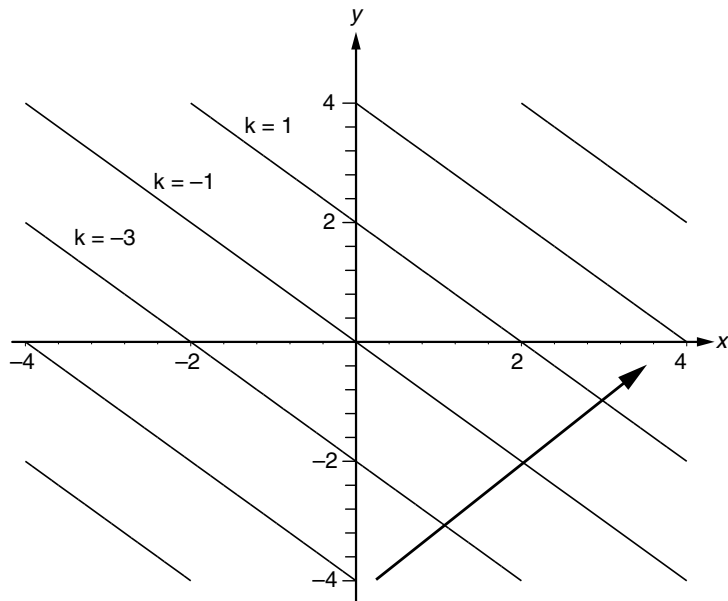
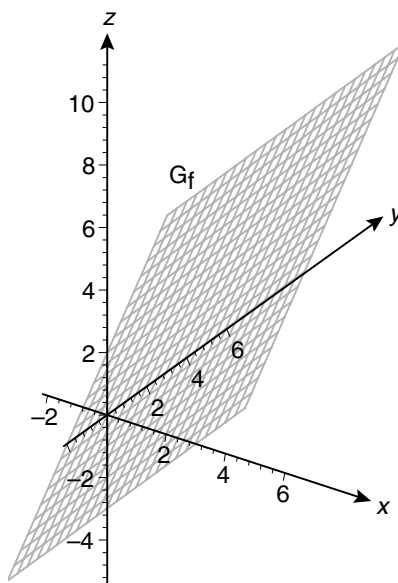


Figure 6.18



- b** $D = \mathbb{R}^2$ et $f(\mathbb{R}^2) = \{z \in \mathbb{R} : z = e^{(y-x^2)}, \text{ où } x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$. La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}_0^+$ est donnée par l'équation $C_k \equiv e^{(y-x^2)} = k$, ou encore : $C_k \equiv y = x^2 + \ln k$. Les courbes de niveau sont donc des paraboles (figure 6.19, page ci-contre). Le graphe de f est donné par la figure 6.20, page ci-contre. On observe notamment la croissance exponentielle marquée lorsque les valeurs prises par y sont grandes et celles prises par $|x|$ sont petites.
- c** $D = \mathbb{R}^2$ et $f(\mathbb{R}^2) = \{z \in \mathbb{R} : z = y - \cos x \text{ où } x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ est donnée par $C_k \equiv y = k + \cos x$ (figure 6.21, page 186). Le graphe de f est esquissé dans la figure 6.22, page 186.

Figure 6.19

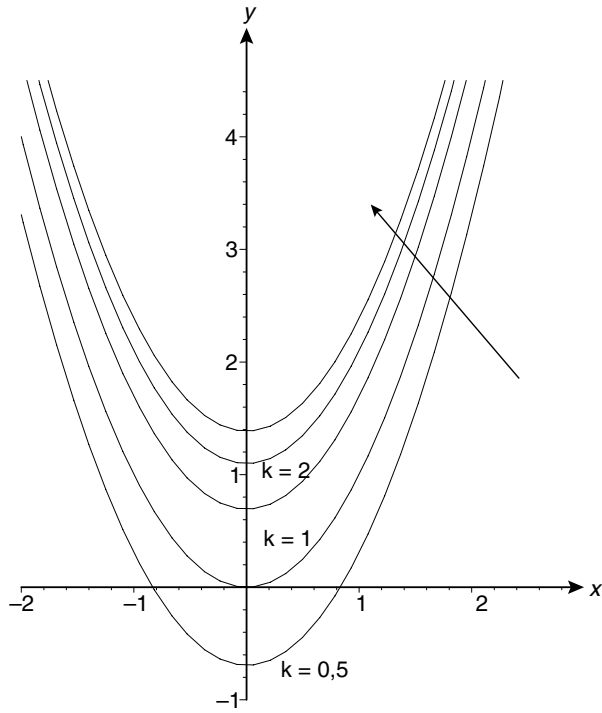


Figure 6.20

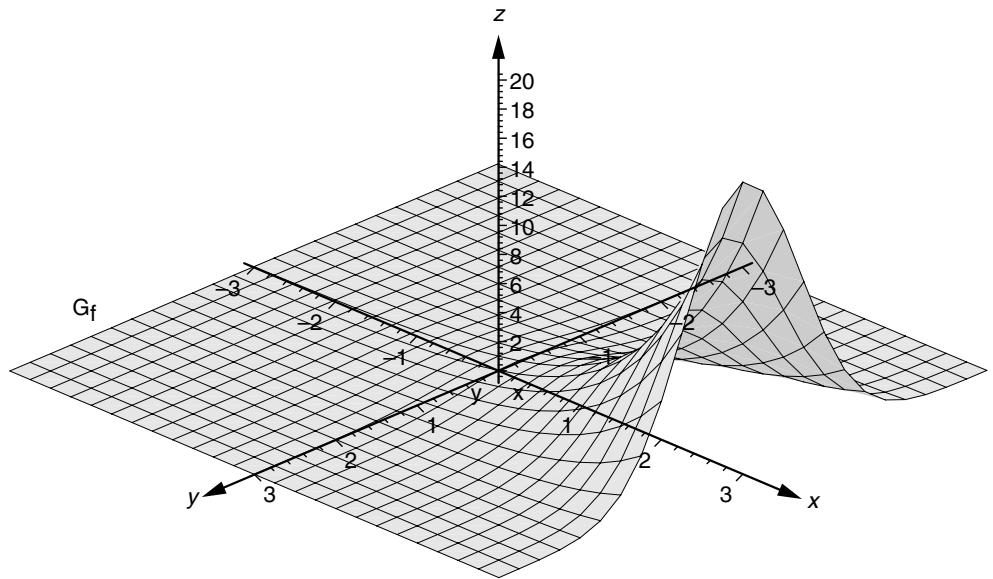


Figure 6.21

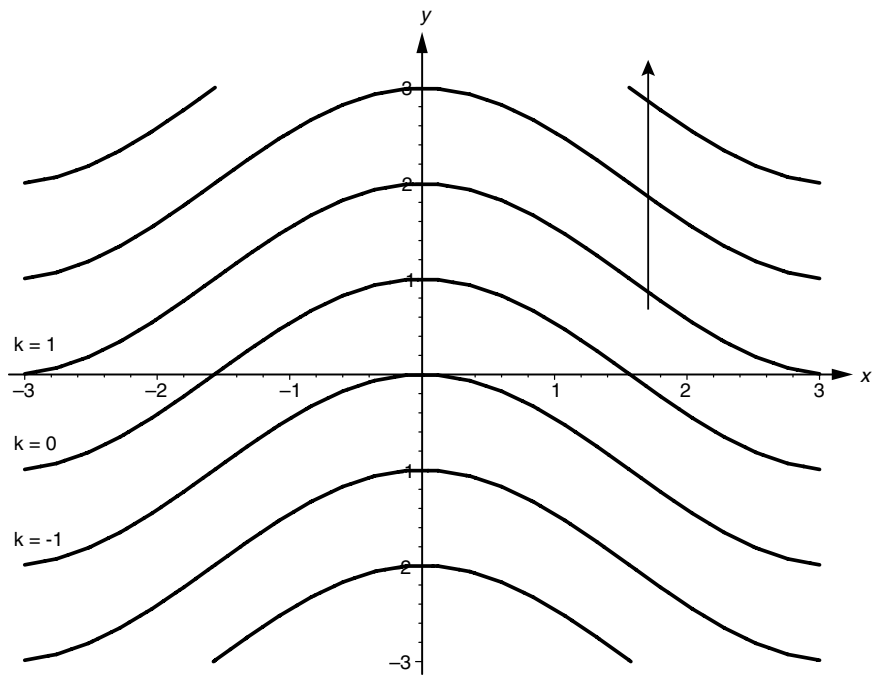
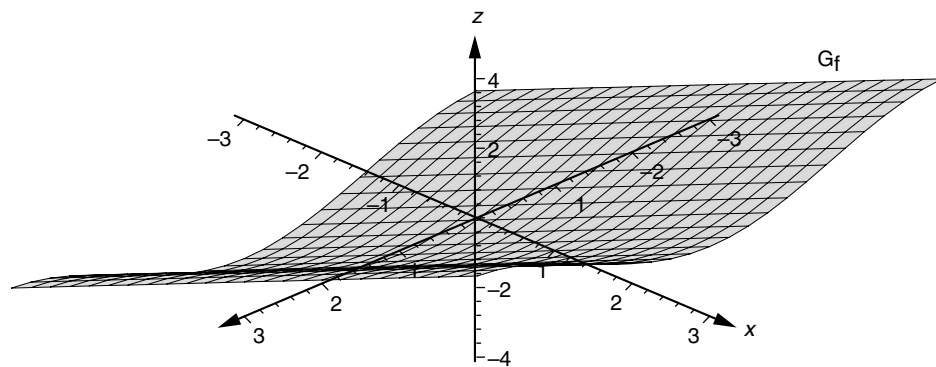


Figure 6.22



Limites et continuité

EXERCICE 3

Énoncé

Donnez, dans chaque cas, les ensembles D et D'_B des fonctions dont on cherche les limites. Ces limites existent-elles dans \mathbb{R} ?

a $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x-y}$

b $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$

c $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Solution

a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$, $D'_B = \mathbb{R}^2$. Cependant, la limite recherchée n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x=1, y < 1}} \left(\frac{1}{x-y} \right) = \lim_{\substack{y \rightarrow 1 \\ y < 1}} \left(\frac{1}{1-y} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

et

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x=1, y > 1}} \left(\frac{1}{x-y} \right) = \lim_{\substack{y \rightarrow 1 \\ y > 1}} \left(\frac{1}{1-y} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

b $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $D'_B = \mathbb{R}^2$. La limite demandée conduit *a priori* à une forme indéterminée. En passant aux coordonnées polaires : $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, on obtient :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin^3 \theta.$$

Or $0 \leq |\rho \sin^3 \theta| \leq \rho$ et $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0$, d'où par le théorème de pincement :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin^3 \theta = 0.$$

Remarque

on peut également utiliser le théorème du pincement sans passer par les coordonnées polaires, grâce aux inégalités suivantes :

$$\forall y \neq 0 : x^2 + y^2 \geq y^2 \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y|^3}{y^2} = |y|.$$

c $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $D'_B = \mathbb{R}^2$. Comme $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, on a : $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, si $x \neq 0$, et $f(x, 0) = \frac{x \cdot 0}{x^2} = 0$, si $x \neq 0$. D'où $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} f(x, y) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

EXERCICE 4**Énoncé**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \frac{6x^2y}{x^2 + y^2}$. Montrez que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ de trois façons.

- a** D'après la définition.
- b** D'après le théorème de pincement.
- c** En utilisant les coordonnées polaires.

Solution

a Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$ tel que : $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$.

$$\text{Comme } \forall (x, y) \neq (0, 0) : x^2 + y^2 \geq x^2 \Rightarrow \left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{6x^2|y|}{x^2} = 6|y| \leq 6\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Si on choisit } \delta = \frac{\varepsilon}{6} : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 6\sqrt{x^2 + y^2} < 6\delta = \varepsilon.$$

b $\forall (x, y) \neq (0, 0) : 0 \leq \left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq 6|y|$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 6|y| = 0$ entraînent le résultat.

c Posons $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$. On obtient :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{6\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (6\rho \cos^2 \theta \sin \theta).$$

Or, $0 \leq |6\rho \cos^2 \theta \sin \theta| \leq 6\rho$ et $\lim_{\rho \rightarrow 0} 6\rho = 0$, d'où le résultat par pincement.

EXERCICE 5**Énoncé**

Dans chaque cas, étudiez la continuité des fonctions données.

$$\mathbf{a} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\mathbf{b} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\mathbf{c} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases}.$$

$$\mathbf{d} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\mathbf{e} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

$$\mathbf{f} \quad f(x, y) = \begin{cases} x - y^2 & \text{si } x \geq y^2 \\ 0 & \text{si } x < y^2 \end{cases}.$$

Solution

a Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues (polynômes) à dénominateur non nul. En $(0, 0)$, en passant aux coordonnées polaires $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$,

on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0 = f(0, 0). \end{aligned}$$

La fonction f est donc continue en $(0,0)$ et $DC = \mathbb{R}^2$.

- b** Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est continue comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. Toutefois, f n'est pas continue en $(0,0)$ car la limite n'existe pas :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq 1.$$

En conclusion : $DC = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- c** On peut écrire $g(x, y) = f(x, y - 1)$, où f est la fonction étudiée dans l'exercice précédent (g est la composée d'un polynôme et de la fonction f). Comme $(x, y - 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 1)$, on obtient : $DC = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}$.
- d** Dans \mathbb{R}^2 , la fonction $\sin(x^2 + y^2)$ est continue en tant que composée de fonctions continues et, dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. En $(0, 0)$, on a, par passage aux coordonnées polaires :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2}.$$

L'indétermination résultante peut être levée par la règle de l'Hospital :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho \cos \rho^2}{2\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \rho^2 = 1 = f(0, 0)$$

et f est continue en $(0,0)$.

Finalement : $DC = \mathbb{R}^2$.

Remarque

le résultat : $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = 1$ peut aussi être déduit de la formule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, établie dans le chapitre 3 (exercice 8), et la propriété relative à la limite d'une fonction composée.

- e** Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0\}$, $f(x, y) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ est continue en tant que quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. En les points $(0, b)$, où $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} y = b.$$

tandis que $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ x \neq 0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ conduit à une forme indéterminée. Grâce

à une double application de la règle de l'Hospital, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que f est continue en $(0, b)$ uniquement pour $b = \frac{1}{2}$. Le domaine de continuité de f est finalement :

$$DC = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0\}) \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\} = (\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}) \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

f Dans $A = \{(x, y) : x > y^2\}$, $f(x, y) = x - y^2$ est continue. Dans $B = \{(x, y) : x < y^2\}$, $f(x, y) = 0$ est continue. Aux points de la parabole d'équation $x = y^2$, la limite est nulle. Il s'ensuit que : $DC = \mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles, élasticités et différentielle

EXERCICE 6

Énoncé

Dans chaque cas, calculez toutes les dérivées partielles des fonctions données.

- a** $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$.
- b** $f(x, y) = x \cos(e^{xy})$.
- c** $f(x, y, z) = x \cos(xz) + \ln(2 - \sin^2(y + z))$.

Solution

- a** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 30y^4$.
- b** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(e^{xy}) - xye^{xy} \sin(e^{xy})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 e^{xy} \sin(e^{xy})$.
- c** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \cos(xz) - xz \sin(xz)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{2 \sin(y + z) \cos(y + z)}{2 - \sin^2(y + z)}$.
 $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -x^2 \sin(xz) - \frac{2 \sin(y + z) \cos(y + z)}{2 - \sin^2(y + z)}$.

EXERCICE 7

Énoncé

Dans chaque cas, étudiez l'existence des dérivabilités partielles et déduisez-en le domaine de dérivabilité DD des fonctions données.

- a** $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
- b** $f(x, y) = |x + y|$.

$$\mathbf{c} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\mathbf{d} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = y \end{cases}.$$

$$\mathbf{e} \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ y & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\mathbf{f} \quad f(x, y) = \sqrt{|xy|}.$$

Solution

- a** Dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul. En $(0, 0)$, comme $\forall \Delta x \in \mathbb{R}_0 : f(\Delta x, 0) = 0$, il vient

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est donc dérivable par rapport à x en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

De même, on a par rapport à y :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R}.$$

f est dérivable par rapport à y en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. En conclusion, $DD = \mathbb{R}^2$.

- b** Pour $x + y > 0$ et pour $x + y < 0$, f est dérivable en tant que polynôme. Les autres points sont du type $(a, -a)$, où $a \in \mathbb{R}$. En ces points, f n'est pas dérivable par rapport à x car :

$$\frac{f(a + \Delta x, -a) - f(a, -a)}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{si } \Delta x < 0 \end{cases}.$$

Comme la fonction est symétrique en x et y , elle n'est pas non plus dérivable par rapport à y en $(a, -a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Le domaine de dérivabilité de f est finalement :

$$DD = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, -a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

- c** $DD = \mathbb{R}^2$.

- d** Dans $A = \{(x, y) : x \neq y\}$, f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul. En les points de la forme (a, a) , où $a \in \mathbb{R}$, on a, lorsque $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{f(a + \Delta x, a) - f(a, a)}{\Delta x} = \frac{\frac{2(a + \Delta x) + a}{a + \Delta x - a} + \frac{1}{2}}{\Delta x} = \frac{3a}{(\Delta x)^2} + \frac{5}{2\Delta x}.$$

Il s'ensuit que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, a) - f(a, a)}{\Delta x} = \pm\infty$ (\notin dans \mathbb{R}).

La fonction n'est donc pas dérivable par rapport à x en (a, a) , $\forall a \in \mathbb{R}$. On montre de la même façon qu'elle n'est pas dérivable par rapport à y en ces points.

En conclusion : $DD = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

- e** $DD = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, b) : b \in \mathbb{R}_0\}$.

- f** $DD = \{(x, y) \in \mathbb{R} : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

EXERCICE 8

Énoncé

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, différentiables dans \mathbb{R}^n , et le point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) \neq 0$ et $g(a) \neq 0$. Montrez que toute élasticité partielle de la fonction produit $fg : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)g(x)$ est égale à la somme des élasticité correspondantes des deux fonctions : $\forall i = 1, \dots, n : E_{fg}^i(a) = E_f^i(a) + E_g^i(a)$.

Solution

$$\begin{aligned} E_{fg}^i(a) &= \frac{a_i}{(fg)(a)} \frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(a) = \frac{a_i}{f(a)g(a)} \left(g(a) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + f(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \right) \\ &= \frac{a_i}{f(a)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{a_i}{g(a)} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a). \end{aligned}$$

EXERCICE 9

Énoncé

Le revenu brut R d'une firme qui produit un bien unique est égal au prix de vente unitaire p multiplié par la quantité vendue, q , elle-même fonction du prix : $R(p) = pq(p)$.

- a** Utilisez le résultat de l'exercice 8 pour calculer l'élasticité du revenu par rapport au prix.
- b** Interprétez ce résultat.

Solution

- a** $E_R^p(p) = E_{pq}^p(p) = E_p^p(p) + E_q^p(p) = 1 + E_q^p(p)$.
- b** Comme l'élasticité de la demande est naturellement négative (la demande décroît lorsque le prix augmente) on peut réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$E_R^p(p) = 1 - |E_q^p(p)|.$$

Si la demande est très élastique ($|E_q^p(p)| > 1$), une augmentation de prix réduit suffisamment la demande pour que le revenu chute. Si la demande est faiblement élastique ($|E_q^p(p)| \approx 1$), la croissance du prix influence peu le revenu. Enfin, si la demande est inélastique ($|E_q^p(p)| < 1$), alors une croissance du prix entraîne une croissance du revenu.

EXERCICE 10

Énoncé

- a** Soit f définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Calculez l'élasticité partielle de f par rapport à x .

- b** Soit g définie par $g(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Calculez l'élasticité partielle de g par rapport à y .

Solution

a La fonction f est dérivable dans \mathbb{R}^2 . Toutefois, l'élasticité partielle par rapport à x ne peut être calculée aux points de la forme $(a, 0)$ ou $(0, b)$, où la fonction s'annule. Aux autres points (a, b) , on a : $E_f^x(a, b) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$.

b Aux points (a, b) tels que $ab \neq 0$, on a : $E_g^y(a, b) = \frac{b}{ab} \frac{\partial(xy)}{\partial y}(a, b) = \frac{ab}{ab} = 1$ (élasticité unitaire).

EXERCICE 11

Énoncé

La fonction de demande d'un individu pour un bien déterminé est donnée par : $Q(p_1, p_2, p_3, R) = -1,5 \ln p_1 + 2 \ln p_2 - 0,2 \ln p_3 + 0,01R$, où p_1 représente le prix du bien considéré, p_2 et p_3 sont les prix de deux autres biens et R désigne le revenu de l'individu.

Calculez les élasticité $E_Q^{p_2}$ et $E_Q^{p_3}$ en $p_1 = 10$, $p_2 = 20$, $p_3 = 40$ et $R = 2000$.

Solution

$$E_Q^{p_2} = \frac{2}{Q} \text{ et } Q(10, 20, 40, 2000) = -1,5 \ln 10 + 2 \ln 20 - 0,2 \ln 40 + 20 = 20,18.$$

$$\Rightarrow E_Q^{p_2}(10, 20, 40, 2000) = \frac{2}{20,18} = 0,0991.$$

$$\text{De même, comme } E_Q^{p_3} = \frac{-0,2}{Q}, \text{ on obtient : } E_Q^{p_3}(10, 20, 40, 2000) = \frac{-0,2}{20,18} = -0,0099.$$

Remarque

La croissance du prix p_2 entraîne une augmentation de la demande Q de bien 1. Les biens 1 et 2 sont donc des « substitués ». À l'inverse, la croissance du prix p_3 entraîne une décroissance de la demande Q de bien 1. Les biens 1 et 3 sont donc « complémentaires ».

EXERCICE 12

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, calculez, si elles existent, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Déduisez-en l'expression de l'éventuelle candidate différentielle en $(0, 0)$? La fonction est-elle différentiable en $(0, 0)$?

$$\mathbf{a} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy^2 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\mathbf{b} \quad f(x, y) = |x| + y.$$

$$\mathbf{c} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\mathbf{d} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^4}{x^2 + y^2} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Solution

$$\mathbf{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1,$$

$$\text{et } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - 0}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Comme f est dérivable en $(0, 0)$, la candidate différentielle $cdf_{(0,0)}$ existe et vaut :

$$cdf_{(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)dy = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy = dx.$$

La fonction f est différentiable en $(0, 0)$. En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3 + hk^2 + k^4}{h^2 + k^2} - 0 - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^4}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

→ indétermination du type $\frac{0}{0}$ qui peut être levée comme suit :

$$\begin{aligned} \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 : (h^2 + k^2)^{3/2} &\geq (k^2)^{3/2} = |k|^3 \\ \Rightarrow \forall h \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}_0 : 0 &< \frac{k^4}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \leq \frac{k^4}{|k|^3} = |k| \\ \Rightarrow \forall h \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}_0 : 0 &\leq \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^4}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \leq \lim_{k \rightarrow 0} |k| = 0 \\ \Rightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^4}{(h^2 + k^2)^{3/2}} &= 0. \end{aligned}$$

La candidate différentielle obtenue plus haut est donc une « vraie » différentielle : $df_{(0,0)} = dx$.

b $f(x, y) = |x| + y$ n'est pas dérivable, et donc pas différentiable, en $(0, 0)$. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \nexists.$$

c $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. La candidate différentielle est donc : $cdf_{(0,0)} = dx$. La fonction n'est cependant pas différentiable en $(0, 0)$. En effet, en passant en coordonnées

polaires, on montre que :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - 0 - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \neq 0.$$

- d** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $cd_{f(0,0)} = dy$. La fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

EXERCICE 13

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la différentielle des fonctions données en un point quelconque.

- a** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \rightarrow x^2yz^3 + y^2x^3$.
b $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow (x^3y^2, e^{x+y}, y)$.

Solution

- a** f est un polynôme $\Rightarrow f$ est différentiable dans \mathbb{R}^3 et la différentielle en (x, y, z) est donnée par : $df_{(x,y,z)} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = (2xyz^3 + 3y^2x^2)dx + (x^2z^3 + 2yx^3)dy + 3x^2yz^2dz$.
b Les trois composantes de f sont différentiables dans \mathbb{R}^2 , donc f est différentiable dans \mathbb{R}^2 et :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow df_{(x,y)} = \nabla f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2dx + 2x^3ydy \\ e^{x+y}dx + e^{x+y}dy \\ dy \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 14

Énoncé

On considère la fonction de production de Cobb-Douglas à deux facteurs et à rendements constants définie par $f(x, y) = x^a y^{1-a}$ ($a > 0$).

- a** Que vaut cette fonction en $(x_0, y_0) = (10, 10)$ et en $(x, y) = (10, 1; 9, 95)$ lorsque $a = \frac{1}{2}$? Par différence, déterminez l'accroissement Δf correspondant.
b Déterminez la différentielle de cette fonction.
c Pour $a = \frac{1}{2}$, déduisez-en l'approximation linéaire de f au point $(x, y) = (10, 1; 9, 95)$ en prenant comme référence le point $(x_0, y_0) = (10, 10)$.
d Comparez l'accroissement exact de la fonction à son approximation linéaire à partir de $(x_0, y_0) = (10, 10)$, en prenant successivement les points suivants : $(10, 1; 9, 5)$, $(10, 4; 9, 4)$, $(11, 9)$, $(12; 8, 2)$ et $(13, 8)$.

Solution

- a** Pour $a = \frac{1}{2}$: $f(x, y) = \sqrt{xy}$
 $\Rightarrow f(10, 10) = 10$ et $f(10, 1; 9, 95) = \sqrt{(10, 1)(9, 95)} = 10,0247$.
 $\Rightarrow \Delta f = f(10, 1; 9, 95) - f(10, 10) = 10,025 - 10 = 0,0247$.

b La différentielle en (x, y) est donnée par : $df_{(x,y)} = ax^{a-1}y^{1-a}dx + (1-a)x^ay^{-a}dy$.

c Pour $a = \frac{1}{2}$: $df_{(x,y)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}dy$. En particulier :

$$\begin{aligned}df_{(10,10)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{10}}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{10}}dy = \frac{dx + dy}{2} \\ \Rightarrow f(x, y) &\cong \underbrace{f(10, 10)}_{10} + \frac{1}{2}[(x - 10) + (y - 10)].\end{aligned}$$

Ainsi, $f(10, 1; 9, 95) \cong 10,025$ est une bonne approximation de la valeur exacte donnée par : $f(10, 1; 9, 95) = 10,0247$.

d Pour les points donnés, on a respectivement à partir de $(x_0, y_0) = (10, 10)$:

$$\begin{aligned}f(10, 1; 9, 5) - f(10, 10) &= 9,7954 - 10 = -0,2045 \\ &\text{dont l'approximation linéaire est :} \\ df_{(10,10)}(10, 1 - 10; 9, 5 - 10) \\ &= df_{(10,10)}(0, 1; -0, 5) = \frac{0, 1 - 0, 5}{2} = -0, 2; \\ f(10, 4; 9, 4) - f(10, 10) &= 9,8873 - 10 = -0,1126 \\ &\text{et } df_{(10,10)}(0, 4; -0, 6) = \frac{0, 4 - 0, 6}{2} = -0, 1; \\ f(11, 9; 9) - f(10, 10) &= 10,3489 - 10 = 0,3489 \\ &\text{et } df_{(10,10)}(1, 9; -1) = \frac{1, 9 - 1}{2} = 0, 45; \\ f(12; 8, 2) - f(10, 10) &= 9,9196 - 10 = -0,0803 \\ &\text{et } df_{(10,10)}(2; -1, 8) = \frac{2 - 1, 8}{2} = 0, 1; \\ f(13, 8) - f(10, 10) &= 10,1980 - 10 = 0,1980 \\ &\text{et } df_{(10,10)}(3; -2) = \frac{3 - 2}{2} = 0, 5.\end{aligned}$$

Remarque

L'approximation de $\Delta f = f(x, y) - f(10, 10)$ devient moins précise lorsque (x, y) s'éloigne du point $(10, 10)$.

EXERCICE 15

Énoncé

La fonction de production d'un entrepreneur est donnée par $K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$, où K représente le capital utilisé et L le travail. Actuellement, il utilise 9 unités de capital et 16 unités de travail. Déterminez par approximation linéaire la production obtenue s'il augmente d'une unité le capital et de deux unités le facteur travail.

Solution

La fonction $f(K, L) = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{4}}$ est différentiable dans $(\mathbb{R}_0^+)^2$. On a, par approximation linéaire :

$$f(10, 18) \approx f(9, 16) + \nabla f(9, 16) \cdot (1, 2) = 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{3}{32} \times 2 = 6 + \frac{25}{48} = 6,52.$$

Fonctions homogènes

EXERCICE 16

Énoncé

Montrez que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ est différentiable et homogène de degré k dans \mathbb{R}^2 , alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré $k - 1$ dans \mathbb{R}^2 .

Solution

Soit $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\lambda x + h, \lambda y) - f(\lambda x, \lambda y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\lambda \left(x + \frac{h}{\lambda}\right), \lambda y\right) - f(\lambda x, \lambda y)}{\lambda \cdot \frac{h}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Comme f est homogène de degré k : $f(\lambda(x, y)) = \lambda^k f(x, y)$, on obtient, en posant $h' = \frac{h}{\lambda}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\lambda^k (f(x + h', y) - f(x, y))}{h'} = \lambda^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

La démonstration est similaire pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

EXERCICE 17

Énoncé

On considère trois fonctions :

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, homogène de degré 2 et différentiable dans \mathbb{R}^2 ;

$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, homogène de degré 1 et différentiable dans \mathbb{R}^2 ;

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homogène de degré 1 et différentiable dans \mathbb{R} .

a Sachant que $f(3, 4) = 5$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 4$, calculez $f(6, 8)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

b La fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow F(t) = f(g(h(t), t), t)$ est-elle homogène? Si oui, de quel degré?

Solution

a f est homogène de degré 2 $\Rightarrow f(6, 8) = f(2(3, 4)) = 2^2 f(3, 4) = 20$. D'autre part, d'après l'exercice 16, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est homogène de degré 1, d'où : $\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{3}{2}, 2 \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{2}(3, 4) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 2$.

b On a pour $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} F(\lambda t) &= f(g(h(\lambda t), \lambda t), \lambda t) = f(g(\lambda h(t), \lambda t), \lambda t) = f(g(\lambda(h(t), t)), \lambda t) \\ &= f(\lambda g(h(t), t), \lambda t) = f(\lambda(g(h(t), t), t)) = \lambda^2 f(g(h(t), t), t) = \lambda^2 F(t). \end{aligned}$$

La fonction F est donc homogène de degré 2.

EXERCICE 18

Énoncé

Montrez que la fonction de production de Cobb-Douglas $Q(L, K) = AK^\alpha L^\beta$, ($A > 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$) est homogène dans $(\mathbb{R}_0^+)^2$.

Solution

Soit $\lambda > 0$. On a : $Q(\lambda L, \lambda K) = A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = A\lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} Q(L, K)$.

Matrice hessienne, fonctions concaves et convexes

EXERCICE 19

Énoncé

Dans chaque cas, la fonction donnée est-elle (strictement) concave dans \mathbb{R}^2 ? (strictement) convexe dans \mathbb{R}^2 ?

- a** $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.
b $f(x, y) = y^3 + xy$.
c $f(x, y) = -(x + y)^2 - x^2$.

Solution

Remarques préliminaires :

- Toutes ces fonctions sont des polynômes, donc de classe C^2 dans \mathbb{R}^2 .
- Les résultats relatifs aux matrices (semi)définies ont été établis dans les exercices du chapitre 5.

a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive $\Rightarrow f$ est strictement convexe dans \mathbb{R}^2 .

- b** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$ est indéfinie $\Rightarrow f$ n'est ni convexe, ni concave dans \mathbb{R}^2 .
- c** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ est définie négative $\Rightarrow f$ est strictement concave dans \mathbb{R}^2 .

EXERCICE 20

Énoncé

Étudiez la convexité de la fonction de Cobb-Douglas $Q(L, K) = AK^\alpha L^\beta$ (avec $A > 0, \alpha, \beta \in (0, 1)$).

Solution

La fonction est de classe C^2 dans $(\mathbb{R}_0^+)^2$ et : $H_Q(K, L) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)K^2Q & \alpha\beta K L Q \\ \alpha\beta K L Q & \beta(\beta-1)L^2Q \end{pmatrix}$.

Pour appliquer la méthode des mineurs principaux (voir chapitre 5, section 7.3), on détermine :

$$\det H_{(1)} = \alpha(\alpha-1)K^2Q < 0 \quad (\text{car } \alpha < 1),$$

et

$$\det H_{(2)} = (\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1) - \alpha^2\beta^2) K^2L^2Q^2 = \alpha\beta(1-\alpha-\beta) K^2L^2Q^2$$

de même signe que $[1 - (\alpha + \beta)]$.

- Si $\alpha + \beta < 1$, alors $\det H_{(2)} > 0$ et Q est strictement convexe.
- Si $\alpha + \beta = 1$, alors $\det H_{(2)} = 0$, ce qui ne permet pas de conclure. Un calcul direct montre que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)H_Q(K, L) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(\alpha-1)Q(Kx + Ly)^2 \leq 0$ puisque $0 < \alpha < 1$ et $Q > 0$. Q est donc convexe.
- Si $\alpha + \beta > 1$: $\det H_{(2)} < 0 \Rightarrow Q$ n'est ni convexe, ni concave.

EXERCICE 21

Énoncé

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow g(t) = f(a + t(b - a))$, où $a, b \in \mathbb{R}^n$ ($a \neq b$).

- a** Déterminez $g'(t)$ et $g''(t)$.
- b** En appliquant à g la formule de Mac Laurin à l'ordre 1 vue dans le chapitre 3 (section 5) pour les fonctions d'une seule variable, déduisez-en la formule suivante (formule de Taylor à l'ordre 1 pour les fonctions de n variables) :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta(x - a))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

où $\theta \in (0, 1)$.

- c** Exprimez ce résultat sous forme matricielle.

Solution

a La fonction g est une fonction composée : $g = f \circ h$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow a + t(b - a)$. D'après la *chain rule*, on a :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b - a)) \frac{\partial (a_i + t(b_i - a_i))}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b - a)) (b_i - a_i).$$

Une seconde application de la *chain rule* conduit à :

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(b - a)) (b_i - a_i)(b_j - a_j).$$

Remarque

comme $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, l'ordre de dérivation est indifférent : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

b La formule de Mac Laurin (formule de Taylor au voisinage de 0) à l'ordre 1 indique que :

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(\theta t)}{2}t^2, \quad \text{où } \theta \in (0, 1). \quad (1)$$

Dans le cas présent :

$$g(0) = f(a), \quad g'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)$$

et

$$g(\theta t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta t(b - a)) (b_i - a_i)(b_j - a_j)t^2.$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$g(t) = f(a + t(b - a)) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)t + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta t(b - a)) (b_i - a_i)(b_j - a_j)t^2.$$

Finalement, pour $t = 1$ et $b = x$, il vient :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta(x - a)) (x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

où $\theta \in (0, 1)$.

c $f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} (x - a)' \cdot H_f(a + \theta(x - a)) \cdot (x - a)$, où $\theta \in (0, 1)$ et

$(x - a)$ représente le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$.