

Chapitre 5

Les matrices

Les matrices	
1. Opérations sur les matrices	122
2. Matrices particulières et sous-matrices	123
3. Trace, déterminant et rang	124
4. Inversion de matrices carrées	128
5. Systèmes linéaires	129
6. Diagonalisation des matrices carrées	134
7. Formes quadratiques	138
Problèmes et exercices	142
Opérations sur les matrices	142
Matrices particulières	143
Trace et déterminant	144
Inversion de matrices	147
Rang et systèmes linéaires	149
Diagonalisation	153
Formes quadratiques	155
Applications à la gestion	157

Les matrices à coefficients réels sont des tableaux de nombres à double entrée (lignes et colonnes). À ce titre, elles offrent une manière simple et pratique de condenser diverses informations. Le calcul matriciel s'avère important dans des domaines variés de la gestion : matrices *input-output* dans l'analyse de la production, matrices variances-covariances pour la mesure des risques, etc.

D'une façon plus théorique, les matrices sont indispensables pour aborder l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, ce qui explique que ce chapitre précède celui qui est consacré à ce type de fonctions.

Les matrices constituent un outil privilégié de l'algèbre linéaire. Pour des raisons de place, le présent ouvrage n'aborde pas la théorie des espaces vectoriels et des applications linéaires dont les ramifications sont multiples. Toutefois, ce domaine est, d'une certaine manière, implicitement traité au travers de notions matricielles correspondantes, comme celle de rang, qui guide notamment la résolution des systèmes numériques linéaires. De même, nous sommes contraints d'effleurer seulement certaines matières, comme par exemple la théorie des déterminants. Le lecteur désireux de les approfondir trouvera dans la bibliographie divers ouvrages offrant de plus amples développements.

1 Opérations sur les matrices

Les matrices sont des tableaux à double entrée, dont les éléments peuvent appartenir *a priori* à n'importe quel ensemble de nombres. Dans les applications, c'est évidemment l'ensemble des nombres réels qui est le plus fréquemment rencontré. Dès lors nous focaliserons la présentation sur les matrices réelles définies comme suit :

Définition Une *matrice réelle* A de taille $n \times m$ (ou à n lignes et m colonnes)

est un tableau de nombres réels $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, représenté sous la forme

condensée $A = (a_{ij})_{n \times m}$. □

L'ensemble des matrices réelles, de taille donnée $n \times m$, est noté $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Dans l'écriture $A = (a_{ij})_{n \times m}$, les indices i et j sont « muets », donc interchangeables. Ainsi, on peut écrire indifféremment $A = (a_{kl})_{n \times m}$ ou même $A = (a_{ji})_{n \times m}$. Cependant pour des valeurs fixées de i et j , le nombre a_{ij} désigne précisément l'élément situé en i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice A . Afin d'éviter toute confusion, on réservera la notation à indices muets à l'introduction des notations tandis que toute transformation des éléments d'une matrice s'effectuera sur la base d'un élément typique à indices fixés.

Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et si leurs éléments de mêmes indices sont identiques.

Définition Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{p \times q}$.

$$A = B \Leftrightarrow n = p, \quad m = q \quad \text{et} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij} = b_{ij}. \quad \square$$

Les matrices peuvent être additionnées et multipliées entre elles moyennant certaines restrictions de compatibilité concernant leurs tailles respectives. Les définitions des opérations mentionnent d'emblée ces restrictions. Une matrice de taille quelconque peut aussi être multipliée par un nombre réel. Cette *multiplication scalaire* s'effectue simplement élément par élément. Enfin, transposer une matrice consiste à inverser le rôle des lignes et des colonnes.

Définitions

- Si $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{n \times m}$, alors la matrice $C = (c_{ij})_{n \times m}$ où $C = A + B$ est telle que : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Si $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{m \times p}$, alors la matrice $C = (c_{ij})_{n \times p}$ où $C = A \cdot B$ est telle que : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p : c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$.
- Si $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la matrice $B = (b_{ij})_{n \times m}$ où $B = \lambda A$, est telle que : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : b_{ij} = \lambda a_{ij}$.
- Si $A = (a_{ij})_{n \times m}$ alors sa *matrice transposée* $A' = (b_{ij})_{m \times n}$ est telle que : $\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n : b_{ij} = a_{ji}$. □

Remarque

L'addition matricielle correspond à une addition élément par élément, tandis que le produit matriciel n'est pas une opération de ce type. Le choix d'une définition « ligne par colonne » telle que celle adoptée répond à des motivations précises, notamment au niveau des applications linéaires. Son adéquation à la résolution de divers problèmes pratiques apparaîtra dans la suite du chapitre.

Diverses propriétés des opérations matricielles découlent de ces définitions.

Propriétés Moyennant les restrictions adéquates sur les tailles des matrices en présence, on a :

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A'' = A$
- $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ et $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ □

Toutefois, même en cas de tailles compatibles, le produit matriciel n'est pas commutatif, autrement dit les matrices $A \cdot B$ et $B \cdot A$ ne sont pas forcément égales.

Ainsi, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
et $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Remarquons de plus que cet exemple fait apparaître que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des « diviseurs de zéro » (matrices non nulles dont un produit est la matrice nulle).

2 Matrices particulières et sous-matrices

Diverses matrices seront appelées à jouer un rôle particulier dans la résolution de problèmes. Nous introduisons ici la nomenclature qui sera suivie, ainsi que les propriétés de base des matrices concernées.

Définition La *matrice nulle* de taille $n \times m$ est une matrice dont tous les éléments sont nuls :

$$0_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m}, \quad \text{où } \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij} = 0. \quad \square$$

La matrice nulle est neutre pour l'addition matricielle (tailles compatibles).

Parmi les matrices carrées pour lesquelles $n = m$, on distingue les cas suivants :

Définitions La matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ est :

- *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si :

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n : i > j \text{ (resp. } j > i) \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

- *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si :

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n : a_{ij} = a_{ji} \text{ (resp. } a_{ij} = -a_{ji}).$$

- *diagonale* si :

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n : i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

- la *matrice identité* si

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n : a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}. \quad \square$$

La matrice identité de taille $n \times n$, notée $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$, est neutre pour le produit matriciel (tailles compatibles).

Parmi les matrices de taille quelconque, dites aussi *rectangulaires*, on distingue les *matrices colonnes* de taille $n \times 1$ et les *matrices lignes* de taille $1 \times n$.

Définition Toute matrice construite à partir de A par élimination de lignes et/ou de colonnes est dite *sous-matrice* de A . □

Propriété Si $B = (b_{ij})_{p \times q}$ est une sous-matrice de $A = (a_{ij})_{n \times m}$, alors $p \leq n$ et $q \leq m$. □

En particulier, toute colonne ou toute ligne de A est une sous-matrice de A . Or, à toute ligne ou à toute colonne, on peut associer de façon évidente un vecteur, ce qui permet de parler sans ambiguïté de dépendance ou d'indépendance linéaire (voir chapitre 1, section 5) entre lignes ou entre colonnes d'une matrice donnée.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ possède 3 lignes représentées par les vecteurs suivants

de \mathbb{R}^4 : $\begin{cases} L_1 = (1, 2, 3, 4) \\ L_2 = (2, 0, 1, -1) \\ L_3 = (3, 2, 4, 3) \end{cases}$. Ces vecteurs sont linéairement dépendants puisque qu'il existe la

combinaison linéaire nulle suivante : $L_1 + L_2 - L_3 = \vec{0} \in \mathbb{R}^4$.

3 Trace, déterminant et rang

On associe aux matrices des caractéristiques numériques à usages divers. Ainsi, la trace et le déterminant sont des nombres réels associés aux seules matrices carrées. Par contre, le rang est un nombre naturel qui peut être déterminé pour toute matrice. Par souci de clarté, nous présentons chacune de ces notions assorties des propriétés afférentes.

3.1 TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE

La *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux.

Définition Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Sa *trace* est donnée par : $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. □

Exemples

1. $\text{tr } 0_{n \times n} = 0$.
2. $\text{tr } I_n = n$.
3. $\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$.
4. $\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 1 + (-1) + 0 = 0$.

Moyennant la compatibilité des tailles, la trace jouit des propriétés suivantes :

Propriétés

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$.
- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A$.
- $\text{tr } A' = \text{tr } A$.
- $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$. □

3.2 DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Toute matrice réelle carrée $A = (a_{ij})_{n \times n}$ admet un déterminant réel noté $\det A$ ou $|A|$. La définition générale du déterminant étant lourde à présenter, nous abordons d'abord les cas particuliers les plus fréquemment rencontrés en pratique, où n vaut 1, 2 ou 3.

Définitions

- Pour $n = 1$, la matrice se réduit au seul élément $A = (a_{11})$ et $\det A = a_{11}$.
- Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (formule de Cramer).
- Pour $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21} - a_{23}a_{11}a_{32}$ (formule de Sarrus). □

Exemples

1. $\det 0_{2 \times 2} = \det 0_{3 \times 3} = 0$.
2. $\det I_2 = \det I_3 = 1$.

$$3. \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

$$4. \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 84 + 120 - (-21) - 48 - 0 = 177.$$

Pour définir le déterminant d'une matrice carrée dans le cas général où $A = (a_{ij})_{n \times n}$, il faut d'abord considérer la notion de permutation de n éléments et de signature d'une telle permutation.

Définition Les *permutations* de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ sont les bijections de cet ensemble dans lui-même. \square

Chaque permutation π a une signature, notée $\text{sign } \pi$, qui vaut soit 1 soit (-1) , selon que la permutation π est la composée d'un nombre pair ou impair de permutations de 2 éléments.

Définition

$$\text{sign } \pi = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \text{composée d'un nombre pair de permutations} \\ & \text{de 2 éléments} \\ -1 & \text{si } \pi = \text{composée d'un nombre impair de permutations} \\ & \text{de 2 éléments} \end{cases} \cdot \square$$

Comme il apparaît au travers des cas particuliers où n vaut 2 ou 3, le déterminant est une somme algébrique de $n!$ produits de n éléments de la matrice dont les indices de ligne et de colonne parcourent chacun l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. L'utilisation des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ permet de construire une définition générale. Dans ce cadre, la signature indiquera si le produit d'éléments de la matrice est affecté d'un signe positif ou négatif.

Définition Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

$$\det A = \sum_{\pi \text{ est une permutation de } \{1, 2, \dots, n\}} (\text{sign } \pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n)}. \quad \square$$

Comme il existe $n!$ permutations distinctes de n éléments, le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est bien une somme de $n!$ termes. La définition montre aussi la symétrie des rôles joués par les lignes et les colonnes dans le calcul des déterminants.

Exemples

1. $\det 0_{n \times n} = 0.$

2. $\det I_n = 1.$

$$3. \det \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \dots a_n.$$

Il existe plusieurs méthodes de calcul permettant d'éviter le recours systématique à la définition, en particulier pour les matrices d'ordres supérieurs à 3. Pour une question de place, nous n'aborderons pas ici ces techniques.

Moyennant la compatibilité des tailles, le déterminant jouit de propriétés importantes. On notera cependant que le déterminant d'une somme de matrices ne coïncide pas avec la somme des déterminants.

Propriétés Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- $\det(A.B) = \det A \cdot \det B = \det(B.A)$.
- $\det A' = \det A$. □

Comme le montrera la section relative à l'inversion des matrices carrées, la nullité du déterminant constitue une caractéristique majeure. Il est donc intéressant de dégager certaines classes de matrices qui possèdent cette caractéristique.

Propriétés

- Ont un déterminant nul, les matrices ayant l'une des caractéristiques suivantes :
 - une ligne (ou une colonne) de zéros ;
 - deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles ;
 - une ligne (resp. une colonne) qui est combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes).
- Le déterminant ne se modifie pas si on ajoute à une ligne (resp. à une colonne), une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. d'autres colonnes).
- Le déterminant change de signe si on permute deux lignes (ou deux colonnes).
- Le déterminant est multiplié par λ si on multiplie une ligne (ou une colonne) par λ ($\in \mathbb{R}$). □

3.3 RANG D'UNE MATRICE RECTANGULAIRE

La définition du rang d'une matrice quelconque fait référence à la notion d'indépendance linéaire entre colonnes (voir section 2).

Définition Le *rang* d'une matrice $A = (a_{ij})_{n \times m}$, noté $\text{rg } A$, est égal au nombre de colonnes de A linéairement indépendantes. □

En fait, l'asymétrie de cette définition, qui semble privilégier le rôle des colonnes, n'est qu'apparente puisqu'on peut montrer que le rang est une caractéristique symétrique en terme de lignes et colonnes.

Propriétés Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$.

- $\text{rg } A = \text{rg } A'$.
- $\text{rg } A \leq m$ et $\text{rg } A \leq n$. □

Définition Si la matrice $A = (a_{ij})_{n \times m}$ est telle que $\text{rg } A = \min\{m, n\}$, elle est dite *de plein rang*. □

La détermination du rang des matrices sera importante dans la résolution des systèmes linéaires. À cet égard, il est utile de présenter les transformations matricielles auxquelles le rang est insensible.

Propriétés Le rang d'une matrice ne se modifie pas lorsque :

- des colonnes (ou des lignes) sont permutées ;
- une colonne (ou une ligne), est multipliée par un réel non nul ;
- une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. d'autres lignes) est ajoutée à une colonne (resp. à une ligne) donnée. □

4 Inversion de matrices carrées

Dans $\mathbb{R}^{n \times n}$, le produit matriciel est défini pour tout couple d'éléments et la matrice I_n est neutre pour ce produit : $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : I_n \cdot A = A = A \cdot I_n$. On définit alors la notion de matrice inversible.

Définitions

- La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *inversible* (ou *régulière*) si

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^{-1} A = I_n = A \cdot A^{-1}.$$

- Lorsqu'elle existe, A^{-1} est appelée la *matrice inverse* de A . □

Cependant toutes les matrices carrées non nulles, c'est-à-dire distinctes de $0_{n \times n}$, ne sont pas forcément inversibles. Les matrices non inversibles sont aussi qualifiées de *singulières*.

Exemples

1. La matrice identité I_n est évidemment inversible et : $I_n^{-1} = I_n$.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices inverses jouissent des propriétés suivantes.

Propriétés

- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible, alors :
 - A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,
 - A' est inversible et $(A')^{-1} = (A^{-1})'$,
 - $\forall \lambda \in \mathbb{R}_0 : (\lambda A)$ est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
- Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont inversibles, alors le produit $A \cdot B$ est inversible et

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}. \quad \square$$

L'étude de l'inversibilité d'une matrice est cruciale dans de nombreux problèmes appliqués à la gestion, notamment ceux qui se formalisent en termes de systèmes linéaires, qu'ils soient numériques ou différentiels. Les notions de déterminant et de rang permettent chacune de caractériser simplement les matrices inversibles.

Propriété La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg} A = n$. \square

En pratique, il existe plusieurs méthodes pour déterminer la matrice inverse d'une matrice régulière donnée. Dans cet ouvrage, nous privilégions celle qui se fonde sur la détermination d'une matrice inverse inconnue. Une autre technique consiste à exploiter les propriétés des déterminants.

5 Systèmes linéaires

5.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Les systèmes numériques linéaires sont constitués d'empilements d'équations, chacune égalant une combinaison linéaire d'inconnues à une constante. De tels systèmes apparaissent dans la résolution de nombreux problèmes.

En fait, grâce à la simplicité des systèmes linéaires, il n'est pas toujours nécessaire de faire appel à une méthode générale pour en déterminer l'ensemble de solutions. Toutefois, une approche structurée comme celle présentée dans cette section a le mérite de permettre l'étude de l'existence et de l'éventuelle multiplicité de solutions, pour les systèmes de toute taille, même en présence de paramètres.

Un système linéaire de n équations à m inconnues soumet un vecteur X , à m composantes, simultanément à n équations linéaires.

Définitions

- Tout système linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

où $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$

ou, sous forme matricielle : $AX = B$, où $A = (a_{ij})_{n \times m}$, $B = (b_i)_{n \times 1}$ et $X = (x_j)_{m \times 1}$.

- Une *solution* de ce système est un vecteur $X = (x_j)_{m \times 1}$ dont les composantes vérifient simultanément toutes les équations du système.
- On distingue divers types de systèmes :
 - système *carré* si $m = n$;
 - système *de Cramer* si le système est carré et A est une matrice inversible;

- système *homogène* si $B = 0$;
- système *impossible* s'il n'admet aucune solution (équations incompatibles) ;
- système *compatible* s'il admet au moins une solution ;
- système *indéterminé* s'il admet plusieurs solutions. □

Exemples

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ est un système carré non homogène. Comme, en outre, $\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -19 \neq 0$, il s'agit d'un système de Cramer.
2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$ est un système carré non homogène impossible (les deux équations sont contradictoires). Ce n'est pas un système de Cramer puisque $\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 0$.
3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ est un système non carré (2 équations à 3 inconnues) homogène.

Les systèmes de Cramer jouissent de la propriété suivante qui en facilite la résolution.

Propriété Le système de Cramer $AX = B$ admet la solution unique $X = A^{-1}B$, qui s'exprime aussi sous la forme :

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det (A_1 \dots A_{j-1} B A_{j+1} \dots A_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\text{où } A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \text{ est la } k\text{-ème colonne de } A. \quad \square$$

Exemple

Soit le système de Cramer $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$. Il a pour unique solution :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui se calcule plus aisément en utilisant la propriété ci-dessus :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{-19} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ x_2 = \frac{1}{-19} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{19} \\ x_2 = \frac{3}{19} \end{cases}.$$

Les autres systèmes peuvent admettre une, aucune ou plusieurs solutions. Toutefois, grâce à la linéarité, on dispose de quelques résultats.

Propriétés

- Si le système linéaire $AX = B$ admet deux solutions distinctes, alors il en admet une infinité.
- Les systèmes homogènes admettent toujours (au moins) la solution nulle :

$$x_j = 0, j = 1, \dots, m. \quad \square$$

Les solutions d'un système non homogène compatible (ce qui n'est pas toujours le cas!) $AX = B$ peuvent être obtenues grâce à celles du système homogène associé $AX = 0$.

Propriété Si $\exists \tilde{X} \in \mathbb{R}^{m \times 1} : A\tilde{X} = B$, alors l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est donné par : $\{X \in \mathbb{R}^{m \times 1} : X = \tilde{X} + Y, \text{ où } AY = 0\}$. □

Enfin, l'existence et l'unicité des solutions des systèmes linéaires peuvent être abordées au travers de conditions liant le rang de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ des coefficients du système à celui de la matrice « augmentée », notée $\begin{pmatrix} A : B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$, obtenue en accolant à A la colonne B des termes indépendants.

Propriétés

- Le système $AX = B$ admet au moins une solution $\Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} A : B \end{pmatrix}$.
- Le système $AX = B$ admet une et une seule solution $\Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} A : B \end{pmatrix} = m$. □

Exemple

Le système $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ est homogène et admet donc au moins la solution nulle. Toutefois cette solution n'est pas unique puisque $m = 3$ et $\text{rg } A \leq 2$ (car $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$).

5.2 RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DE GAUSS

Les propriétés présentées dans la section précédente concernent surtout l'existence et l'unicité d'une solution. Elles sont à présent utilement complétées par la technique de résolution algorithmique de Gauss, qui sert également à résoudre d'autres problèmes d'algèbre linéaire, comme le calcul du rang d'une matrice.

Pour un système quelconque, la matrice A n'est pas nécessairement carrée, de sorte que, la résolution du système $AX = B$ par inversion de matrice, comme pour les systèmes de Cramer, n'est plus praticable.

La méthode de Gauss est une résolution générale par substitution de variables. Elle procède par transformations sur les équations du système, qu'on peut aussi voir comme les lignes de la matrice $(A:B)$. Avant de décrire les étapes de la résolution, il convient de repérer chaque équation pour ensuite indiquer explicitement les opérations à effectuer. On écrit donc le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 & (2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n & (n) \end{cases}$$

Première étape : si $a_{11} \neq 0$, on remplace la première équation du système par :

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (1')$$

À chacune des autres équations ($i = 2, \dots, n$) du système, on soustrait membre à membre $a_{i1} \cdot (1')$ pour éliminer les termes en x_1 . On note $(2'), \dots, (n')$ les équations obtenues et a'_{ij} les nouveaux coefficients. Le système initial est équivalent à celui constitué des équations $(1'), (2'), \dots, (n')$.

Si $a_{11} = 0$, on procède de même après avoir préalablement permuté la première équation et une autre dans laquelle le coefficient de x_1 est non nul. Si x_1 n'apparaît pas dans le système, il est indéterminé et on passe au point suivant.

Deuxième étape : si $a'_{22} \neq 0$, on remplace la deuxième équation du système par :

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \dots + \frac{a'_{2m}}{a'_{22}}x_m = \frac{b'_2}{a'_{22}} \quad (2'')$$

À chacune des autres équations ($i = 1, 3, \dots, n$), on soustrait membre à membre $a'_{i2} \cdot (2'')$ pour éliminer les termes en x_2 . On note $(1''), (3''), \dots, (n'')$ les équations obtenues. Le système initial est équivalent à celui constitué des équations $(1''), (2''), \dots, (n'')$.

Si $a'_{22} = 0$, on permute d'abord la deuxième équation avec une autre (mais pas la première) dans laquelle le coefficient devant x_2 est non nul. Si x_2 n'apparaît pas, ou uniquement dans $(1')$, il est indéterminé et on passe au point suivant.

Et ainsi de suite...

La procédure s'achève lorsqu'on a épuisé toutes les variables ou toutes les équations. À ce stade, le système obtenu (équivalent au système initial) peut comporter trois types d'équations, selon le nombre d'inconnues qui y figurent encore. Voici comment poser les conclusions.

- En ce qui concerne une équation qui ne comporte pas d'inconnues : si c'est une équation du type $0 = 0$, on l'élimine. Sinon, elle est du type $0 = 1$ et le système est impossible... Il est inutile d'examiner les autres équations.
- En ce qui concerne une équation qui comporte plus d'une inconnue : le système est indéterminé. S'il s'agit de la i -ème équation, on exprime x_i en fonction des autres variables (qui apparaissent comme des paramètres arbitraires).
- En ce qui concerne une équation qui comporte la seule inconnue x_i : la valeur prise par x_i est immédiatement donnée.

Exemples

$$1. \begin{cases} x + 2y - z = 0 & (1) \\ 2x + y + z = 1 & (2) \\ 4x + y + 3z = -1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 & (1') \\ -3y + 3z = 1 & (2') \\ -7y + 7z = -1 & (3') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 & (1'') \\ y - z = \frac{-1}{3} & (2'') \\ -7y + 7z = -1 & (3'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \frac{2}{3} \\ y - z = \frac{-1}{3} \\ 0 = \frac{-10}{3} \end{cases} \text{ système impossible.}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 6y - 4z = 2 \\ x - z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ x - z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -3y + z = 0 \\ 5y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \\ 5y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ Solution unique : } \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

La méthode de Gauss est aussi utile pour déterminer le rang d'une matrice. En effet, moyennant une éventuelle permutation des colonnes (qui ne modifie pas le rang), la méthode de Gauss permet de transformer une matrice quelconque, de taille $n \times m$, en une matrice de même rang composée de blocs du type $\begin{pmatrix} T_{r \times r} & B_{r \times (m-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m}$, où T est une matrice diagonale (ou, plus simplement, triangulaire supérieure) ayant des éléments non nuls sur la diagonale. Il s'ensuit que $\text{rg } A = r$.

Exemple

Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ peut être obtenu de la façon suivante :

$$A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 4L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 10 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 2L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice, qui a le même rang que A , est de rang 3 puisque, ici,

$$T_{r \times r} = T_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

6 Diagonalisation des matrices carrées

6.1 DÉFINITIONS

Dans l'optimisation de fonctions de plusieurs variables (chapitre 7), la diagonalisation est cruciale. L'objectif consiste à trouver, si possible, une matrice diagonale associée à une matrice carrée donnée. Le mode « d'association » entre matrices passe par la notion de « matrices semblables ». Seront aussi introduites les notions de valeurs propres et vecteurs propres qui permettent notamment de caractériser les matrices diagonalisables.

La méthode de Gauss (section 5.2) procède par annulations successives d'éléments de la matrice A . Si cette matrice était carrée, cette procédure s'apparenterait à une diagonalisation. Notons, en effet, que tout système linéaire carré $A.X = B$, pour lequel A est diagonale, est trivialement résolu (chaque équation donne la valeur d'une variable).

Définitions

- Les matrices A et $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont dites *semblables* si $\exists H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, inversible, telle que :

$$A = H^{-1}.B.H \quad (\Leftrightarrow B = H.A.H^{-1}).$$

- Dans ce cas, la matrice H est appelée *matrice de passage*.
- La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale. \square

Toute matrice diagonale est évidemment diagonalisable (prendre $H = I_n$). Cependant, les matrices diagonales ne sont pas toutes semblables deux à deux. Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables (prendre $H = H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) tandis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne le sont pas.

Les matrices carrées ne sont pas toutes diagonalisables. Une première question porte donc sur la caractérisation de telles matrices. Une seconde vise la détermination de la forme diagonale et, éventuellement, de la matrice de passage H . Dans les deux cas, la résolution passe par les notions de vecteurs et valeurs propres.

Définitions Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

- Le vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un *vecteur propre* de A si $\exists \lambda \in \mathbb{R} :$
 $AX = \lambda X.$
- Dans ce cas, on dit que X est associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Exemple

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, associé à la valeur propre $\lambda = 2$,

puisque $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice possède d'autres vecteurs

propres comme, par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé à la même valeur propre $\lambda = 2$ ou le

vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda = -1$, puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.2 LE SPECTRE D'UNE MATRICE

La détermination des valeurs propres de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s'effectue grâce à la propriété suivante.

Propriété $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$. □

Définitions Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

- Le polynôme $\det(A - \lambda I_n)$, de degré n , est appelé *polynôme caractéristique* de A .
- L'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$ est appelée *équation caractéristique* de A .
- L'ensemble des solutions *complexes* de cette équation constitue le *spectre* de A , noté S_A .
- La *multiplicité algébrique* d'une valeur propre est sa multiplicité comme solution de l'équation caractéristique⁽¹⁾. □

Le spectre comporte donc n nombres complexes, distincts ou non. Toutefois, seuls ses éléments réels sont des valeurs propres auxquelles sont associés des vecteurs propres. Le spectre d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jouit des propriétés suivantes :

Propriétés

- A et A' ont le même spectre.
- Si A est inversible, alors 0 n'est pas une valeur propre de A .
- Si A est inversible et λ est une valeur propre réelle de A alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} .
- Les matrices semblables ont toutes le même spectre. □

1. Le nombre a est une solution de multiplicité $p \in \mathbb{N}_0$ de l'équation polynomiale $Q(x) = 0$ (ou une racine de multiplicité p du polynôme Q) si on peut écrire $Q(x) = (x - a)^p R(x)$, où $R(x)$ est un polynôme tel que : $R(a) \neq 0$. On parle de « racine simple » si $p = 1$ et de « racine multiple » si $p \geq 2$.

Le dernier résultat laisse présager de l'importance que joue le spectre dans la phase de diagonalisation. La section suivante en détaille la procédure.

6.3 SPECTRE ET DIAGONALISATION

Les valeurs propres d'une matrice diagonale de $\mathbb{R}^{n \times n}$ sont les n nombres réels, nuls ou pas, se trouvant sur sa diagonale. Si un nombre y apparaît plus d'une fois, c'est que la valeur propre est multiple (racine multiple du polynôme caractéristique). Le spectre d'une matrice diagonale est donc un sous-ensemble de \mathbb{R} .

Propriétés

• Si $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonale : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix},$

alors : $S_D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

• Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, alors elle est diagonalisable. \square

En ce qui concerne les matrices carrées quelconques, une condition nécessaire et une condition suffisante sont établies.

Condition nécessaire Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable, alors toutes ses valeurs propres sont réelles. \square

Dès lors, si le spectre de A comporte des nombres non réels, la matrice est non diagonalisable. Cette condition n'est cependant pas suffisante, puisque certaines matrices à spectre réel ne peuvent pas être diagonalisées.

Condition suffisante Si le spectre de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comporte n valeurs propres réelles distinctes, alors A est diagonalisable. \square

Restent alors à traiter les matrices dont toutes les valeurs propres sont réelles, et dont la multiplicité algébrique d'une valeur propre (au moins) est supérieure à 1. Ce cas requiert un examen plus approfondi reposant sur la résolution du système linéaire $AX = \lambda X$ pour chacune des valeurs propres multiples λ . En fait, ce système admet toujours une infinité de solutions, les vecteurs propres associés à λ et le vecteur nul. La caractérisation des matrices diagonalisables repose sur la dimension de cet ensemble de solutions (nombre de paramètres présents).

Condition nécessaire et suffisante $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont réelles, et, pour toute valeur propre λ de multiplicité algébrique $m_\lambda \geq 2$, le système linéaire $AX = \lambda X$ admet une infinité de solutions à m_λ paramètres. \square

On obtient une matrice diagonale semblable à la matrice diagonalisable A en plaçant les n valeurs propres de A sur la diagonale (avec répétition en cas de valeurs multiples). L'ordre des valeurs propres importe peu, puisque toutes les matrices diagonales dont les éléments sont identiques à une permutation près, ont le même spectre et sont toutes semblables entre elles.

Enfin, signalons que les puissances d'une matrice diagonalisable sont aisées à calculer.

Propriété Si A est diagonalisable avec $D = H^{-1} A H$,

$$\text{où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 : A^p = H.D^p.H^{-1} = H \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix} H^{-1}. \quad \square$$

6.4 LA DIAGONALISATION EN PRATIQUE

Sur la base des propriétés énoncées, la diagonalisation de la matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s'effectue selon le plan suivant.

Première étape : déterminer le spectre de A , c'est-à-dire les n solutions dans \mathbb{C} de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Deuxième étape : si ce spectre comporte au moins un élément de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors A n'est pas diagonalisable ; si toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes, alors la matrice est diagonalisable ; si aucune des deux conclusions n'est applicable, passer au point suivant.

Troisième étape : pour chaque valeur propre λ dont la multiplicité algébrique est ≥ 2 , déterminer la dimension de l'ensemble des solutions du système $AX = \lambda X$; si, pour chacune d'entre elles, la multiplicité algébrique est égale à la dimension de cet ensemble, A est diagonalisable, sinon elle ne l'est pas.

En outre, si A est diagonalisable, une matrice diagonale qui lui est semblable est obtenue en plaçant les valeurs propres sur la diagonale (en ordre quelconque, avec multiplicité éventuelle).

Exemples

- 1.** Pour vérifier si la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, on détermine son spectre S_A en résolvant l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I_2) = 0$:

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7 = 0$$

$$S_A = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}.$$

A admet donc 2 valeurs propres réelles et distinctes $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Les matrices diagonales semblables à A sont $\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$.

- 2.** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'équation caractéristique s'écrit : $\det(B - \lambda I_3) = 0$.

Le calcul du déterminant s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \rightarrow L_2 - \lambda L_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda + \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ = -(1-\lambda + \lambda^2)(1-\lambda).$$

Le spectre de B possède au moins un élément non réel, solution de : $1 - \lambda + \lambda^2 = 0$.
La matrice B n'est donc pas diagonalisable.

3. Si $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

S_C possède une unique valeur propre 1 de multiplicité algébrique 2. Pour vérifier si C est diagonalisable, il faut alors résoudre le système $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, pour $\lambda = 1$.

$$C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (C - I_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

L'ensemble des solutions, donné par $\{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$, comporte un seul paramètre réel. La dimension de cet ensemble (égale à 1) est donc différente de la multiplicité algébrique (égale à 2) de la valeur propre. On en conclut que C n'est pas diagonalisable.

7 Formes quadratiques

7.1 DÉFINITIONS

Une forme quadratique est une fonction polynomiale à une ou plusieurs variables, dont tous les termes sont du second degré. Les formes quadratiques interviennent dans l'étude des extrema des fonctions multivariées (chapitre 7). Plus précisément, l'étude du signe de telles fonctions présidera à la formulation de conditions du second ordre.

Si les formes quadratiques apparaissent dès ce chapitre, c'est parce que leur forme particulière permet d'étudier leur signe à l'aide de la diagonalisation de matrices symétriques.

Définition $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow Q(x)$ est une *forme quadratique*

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j \text{ où } \forall i, j : \alpha_{ij} \in \mathbb{R},$$

ou, sous forme matricielle : $Q(x) = X' \alpha X$, où $X = (x_i)_{n \times 1}$, $\alpha = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ et X' est la matrice ligne transposée de X . \square

Exemples

1. $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2$ est une forme quadratique dans \mathbb{R}^2 .
2. $R(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_1$ n'en n'est pas une (le dernier terme est du premier degré).

Comme $\forall i, j : \alpha_{ij}x_i x_j + \alpha_{ji}x_j x_i = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} x_j x_i$, on peut, sans perte de généralité, supposer que la matrice α est symétrique. Les notions suivantes concernent le signe d'une forme quadratique.

Définitions

- La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow Q(x)$ est *définie positive* (resp. *définie négative*) si $\forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0 \Rightarrow Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$).
- La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow Q(x)$ est *semi-définie positive* (resp. *semi-définie négative*) si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$ (resp. $Q(x) \leq 0$).
- La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow Q(x)$ est *indéfinie* si $\exists x, y \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$ et $Q(y) < 0$. □

Remarque

Par définition : $Q(0) = 0$.

7.2 FORMES QUADRATIQUES ET DIAGONALISATION

Considérons la forme quadratique $Q(x) = X'\alpha X$, où la matrice $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et donc diagonalisable (voir section 6.3). Il existe donc une matrice diagonale $\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice inversible $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que : $\alpha = H^{-1}\beta H$ ($\Leftrightarrow \beta = H\alpha H^{-1}$). En outre :

$$\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres (réelles) de } \alpha.$$

À son tour, la matrice β permet de définir une forme quadratique en $Y = (y_i)_{n \times 1}$:

$$\hat{Q}(y) = Y'\beta Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

et on peut montrer que :

$$Q \text{ est (semi)-définie positive (resp. négative)} \\ \Leftrightarrow \hat{Q} \text{ est (semi)-définie positive (resp. négative).}$$

Propriétés Soit la forme quadratique $Q(x) = X'\alpha X$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique.

- Q est semi-définie positive \Leftrightarrow toutes les valeurs propres de α sont ≥ 0 ;
- Q est semi-définie négative \Leftrightarrow toutes les valeurs propres de α sont ≤ 0 ;
- Q est définie positive \Leftrightarrow toutes les valeurs propres de α sont > 0 ;
- Q est définie négative \Leftrightarrow toutes les valeurs propres de α sont < 0 . □

On parle aussi bien de forme quadratique définie positive (par exemple) que de matrice symétrique définie positive. La propriété ci-dessus peut donc s'énoncer en remplaçant la forme Q par la matrice α .

7.3 LA MÉTHODE DES MINEURS PRINCIPAUX

Étudier le signe de la forme quadratique $Q(x) = X'\alpha X$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, revient à déterminer le signe des valeurs propres de α . Toutefois, dans la pratique, on fait volontiers usage de la *méthode des mineurs principaux*, souvent plus rapide que la diagonalisation complète.

Définition Les mineurs principaux de $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont les déterminants des n sous-matrices :

$$\alpha_{(1)} = (\alpha_{11}) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \quad \alpha_{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \dots$$

$$\dots, \alpha_{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ii} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{i \times i}, \dots, \alpha_{(n)} = \alpha. \quad \square$$

Propriétés Soit $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique.

- α est définie positive $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : \det \alpha_{(i)} > 0$;
- α est définie négative $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : (-1)^i \det \alpha_{(i)} > 0$;
- α est semi-définie positive $\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n : \det \alpha_{(i)} \geq 0$;
- α est semi-définie négative $\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n : (-1)^i \det \alpha_{(i)} \geq 0$.
- $\exists i$ pair : $\det \alpha_{(i)} < 0 \Rightarrow \alpha$ est indéfinie. □

Notons que, pour les matrices semi-définies, les conditions sont nécessaires mais pas suffisantes. En outre, la dernière propriété est une conséquence directe des deux précédentes.

Dans le cas particulier des *matrices symétriques de taille 2×2* , $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, associées à

des formes quadratiques du type : $Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$,

les deux mineurs principaux sont : $\det \alpha_{(1)} = a$ et $\det \alpha_{(2)} = \det \alpha = ac - b^2$.

Propriétés Soit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ une matrice symétrique.

- α est définie positive $\Leftrightarrow a > 0$ et $ac - b^2 > 0$;
- α est définie négative $\Leftrightarrow a < 0$ et $ac - b^2 > 0$;
- α est semi-définie positive $\Rightarrow a \geq 0$ et $ac - b^2 \geq 0$.
- α est semi-définie négative $\Rightarrow a \leq 0$ et $ac - b^2 \geq 0$;
- $ac - b^2 < 0 \Rightarrow \alpha$ est indéfinie. □

Exemples

1. $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive ($a = 4 > 0$ et $ac - b^2 = 7 > 0$).

2. $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie négative ($a = -2 < 0$ et $ac - b^2 = 2 > 0$).

3. $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est indéfinie ($ac - b^2 = -3 < 0$).

4. La matrice nulle, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, n'est ni définie positive, ni définie négative puisque $a = 0$.

On ne peut rien conclure concernant le fait qu'elle soit semi-définie à partir des résultats ci-dessus. Cependant, la forme quadratique correspondante Q , définie par : $Q(x, y) =$

$(x \ y) \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ est à la fois semi-définie positive et semi-définie négative. On aurait

aussi pu déduire ce résultat de $S_\alpha = \{0\}$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semi-définie négative car elle possède trois valeurs propres ≤ 0 .

6. Pour $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, la méthode des mineurs principaux ne permet pas de conclure.

Toutefois, on a : $S_\alpha = \{1, -1, 2\}$ (à vérifier comme exercice). Il s'ensuit que la matrice α possède des valeurs propres de signes opposés et α est indéfinie.

Problèmes et exercices

Ce chapitre porte sur plusieurs concepts importants d'algèbre linéaire. Les exercices se doivent de tous les illustrer. En particulier, les résultats relatifs au signe des formes quadratiques seront utilisés dans les exercices du chapitre 7, pour étudier les extrema des fonctions de plusieurs variables. Enfin, apparaîtront divers problèmes appliqués à la gestion dont la résolution fait intervenir des matrices ou des systèmes linéaires.

Opérations sur les matrices

EXERCICE 1

Énoncé

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a** Déterminez, si possible, les matrices suivantes : $3A$, $-C$, $A + B$, $B - A$, $B + C$, $A.B$, $B.A$, $B.C$. Vérifiez que $A.B \neq B.A$.
- b** Déterminez A' , B' , $(A.B)'$ et vérifiez que $(A.B)' = B'.A'$.

Solution

a $3A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $-C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B - A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B + C : \text{impossible}, A.B = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, B.A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 12 & -10 \end{pmatrix} \neq A.B,$$

$$B.C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

b $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(A.B)' = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B'.A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (A.B)'.$

EXERCICE 2

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Trouvez l'ensemble des matrices $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telles que $A.B = B.A$.

Solution

Posons $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. La condition $A.B = B.A$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 4z & 3y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y & 2x + 4y \\ z + 3t & 2z + 4t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = x + 3y \\ y + 2t = 2x + 4y \\ 3x + 4z = z + 3t \\ 3y + 4t = 2z + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 3y \\ 2t = 2x + 3y \\ 3x + 3z = 3t \\ 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2}y \\ t = x + \frac{3}{2}y \\ 3x + \frac{9}{2}y = 3x + \frac{9}{2}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2}y \\ t = x + \frac{3}{2}y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc : $B = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Matrices particulières

EXERCICE 3

Énoncé

Montrez que pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, les matrices $A.A'$ et $A'.A$ existent et sont carrées.

Solution

Par définition de la transposée, $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Les deux produits matriciels $A.A'$ et $A'.A$ sont donc réalisables et, d'une part, $A.A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d'autre part, $A'.A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Ces deux matrices sont donc carrées.

EXERCICE 4

Énoncé

- a** Montrez que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est idempotente ($A^2 = A$) et si $B = I_n - A$, alors B est idempotente.
- b** Montrez que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et idempotente, alors $A.A'.A = A$.

Solution

- a** Par hypothèse, $B = I_n - A$ et $A^2 = A$. Donc :

$$B.B = (I_n - A)(I_n - A) = I_n^2 - A - A + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B \\ \Rightarrow B \text{ est idempotente.}$$

- b** $A = A'$ et $A^2 = A \Rightarrow A.A'.A = (A.A').A = (A.A).A = A^2.A = A.A = A^2 = A$.

Trace et déterminant

EXERCICE 5

Énoncé

Reprenez les données de l'exercice 1.
Calculez $\text{tr}(3A + 2B)$ de deux manières différentes.

Solution

Première manière : $\text{tr}(3A + 2B) = \text{tr} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} = 12 + 7 = 19$.

Seconde manière : $\text{tr}(3A + 2B) = 3 \text{tr} A + 2 \text{tr} B = 3.3 + 2.5 = 19$.

EXERCICE 6

Énoncé

Calculez le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution

$$|A| = 2 \times 3 - (-1) \times 4 = 10.$$

$$|B| = -1 \times 2 \times 1 + 4 \times 2 \times 6 + 0 \times 1 \times 0 - 0 \times 2 \times 6 - 4 \times 1 \times 1 - (-1) \times 2 \times 0 = 42.$$

$$|C| = -4.$$

EXERCICE 7

Énoncé

a Toute matrice triangulaire $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a pour déterminant le produit des éléments diagonaux. Montrez-le pour $n = 3$.

b Calculez $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ en passant par une forme triangulaire et en appliquant le résultat précédent.

Solution

a $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{pmatrix}$ est la forme générale d'une matrice triangulaire inférieure de taille 3×3 .

D'après la règle de Sarrus : $\det T = abc + 00f + 0de - 0bf - 0dc - a0e = abc$.

Comme $\det T = \det T'$, le résultat reste valable pour une matrice triangulaire supérieure.

b Les propriétés utilisées ici sont :

- Si une ligne est multipliée par un nombre réel, le déterminant l'est également.
- Le déterminant d'une matrice ne se modifie pas si on ajoute à une ligne, une combinaison linéaire d'autres lignes.
- Une permutation de deux lignes change le signe du déterminant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 3L_1 \\ \underline{\underline{2}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 3L_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_3 \\ \underline{\underline{2}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_2 \\ \underline{\underline{-2}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_4 \rightarrow L_4 - \frac{10}{11}L_3 \\ \underline{\underline{-2}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{47}{11} \end{vmatrix} = -2 \times 1 \times 2 \times 11 \times \frac{47}{11}$$

$$= -188.$$

EXERCICE 8

Énoncé

Montrez que le déterminant des matrices suivantes est nul :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} x & 2x+4 & 4 \\ y & 2y+9 & 9 \\ z & 2z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

On procède par transformations de lignes (pour D et F), ou de colonnes (pour E), qui ne modifient pas le déterminant, jusqu'à l'obtention d'une matrice présentant une caractéristique suffisante pour annuler son déterminant.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{deux lignes proportionnelles}).$$

$$|E| = \begin{vmatrix} x & 2x+4 & 4 \\ y & 2y+9 & 9 \\ z & 2z & 0 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} x & 4 & 4 \\ y & 9 & 9 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{deux colonnes identiques}).$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1}}{=} 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & -1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 3L_2}}{=} 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad (\text{deux lignes identiques}).$$

EXERCICE 9

Énoncé

$$\text{Résolvez l'équation} \quad \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 6 \\ 4 & x-4 & 4 \\ 5 & 8 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Solution

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 6 \\ 4 & x-4 & 4 \\ 5 & 8 & x-2 \end{vmatrix} = 0 \stackrel{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x+8 & x+8 & x+8 \\ 4 & x-4 & 4 \\ 5 & 8 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\stackrel{\substack{C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1}}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x+8 & 0 & 0 \\ 4 & x-8 & 0 \\ 5 & 3 & x-7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-8)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{7, 8, -8\}.$$

EXERCICE 10

Énoncé

Montrez que le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ antisymétrique est nul si n est impair.

Solution

Si $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est antisymétrique, alors :

$$M' = -M \Rightarrow \det M' = \det(-M) = \det[(-1)M] \Rightarrow \det M = (-1)^n \det M.$$

Si, en outre, n est impair, alors : $(-1)^n = -1$ et $\det M = -\det M \Rightarrow \det M = 0$.

Inversion de matrices

EXERCICE 11

Énoncé

- a** Montrez que : $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : B$ inversible et $A.B = 0_{n \times n} \Rightarrow A = 0_{n \times n}$.
- b** Cette proposition reste-t-elle vraie si on remplace l'hypothèse d'inversibilité par $B \neq 0_{n \times n}$?

Solution

- a** $A.B = 0_{n \times n} \Rightarrow (A.B).B^{-1} = 0_{n \times n}.B^{-1} \Rightarrow A.(B.B^{-1}) = 0_{n \times n}.B^{-1} \Rightarrow A.I_n = 0_{n \times n} \Rightarrow A = 0_{n \times n}$.
- b** Non. Voici un contre-exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} (\neq 0_{n \times n}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \Rightarrow AB = 0_{n \times n}.$$

EXERCICE 12

Énoncé

a Inversez, si possible, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

b Montrez que $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

c La matrice $A.C$ est-elle inversible?

d Trouvez, si possible, $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telle que : $F^{-1} = \frac{1}{2}AC - 8I_2$.

Solution

a $\det A = 10 \neq 0$. Cherchons $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{10}, & c = \frac{-2}{5} \\ b = \frac{1}{10}, & d = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{et finalement : } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$\det C = 0 \Rightarrow C$ est singulière.

$\det D = -1 \neq 0$. Cherchons $D^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a + 6d + 2g = 1 \\ d = 0 \\ 3a - 5g = 0 \\ -b + 6e + 2h = 0 \\ e = 1 \\ 3b - 5h = 0 \\ -c + 6f + 2i = 0 \\ f = 0 \\ 3c - 5i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -30 \\ c = 2 \\ d = 0 \\ e = 1 \\ f = 0 \\ g = 3 \\ h = -18 \\ i = 1 \end{cases} \quad \text{et finalement : } D^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -30 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -18 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b} \quad (A.B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(A.B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{1}{-5} & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}.A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{c} Non. En effet, $\det(A.C) = \det A \cdot \det C = 0$, puisque $\det C = 0$.

$$\mathbf{d} \quad F^{-1} = \frac{1}{2}AC - 8I_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & -24 \\ 12 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 6 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (F^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 6 & -17 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{72} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang et systèmes linéaires

EXERCICE 13

Énoncé

- \mathbf{a} Résolvez le système de Cramer $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ par la méthode des déterminants.
- \mathbf{b} Dans chaque cas, caractérisez le système et résolvez-le.

$$(i) \begin{cases} x + 2y - 5z + t = 0 \\ 2z + y - x + 2t = 0 \\ -2x + 7z + 2t = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Solution

$$\mathbf{a} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3}, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}.$$

- \mathbf{b} On utilise la méthode de Gauss sous forme matricielle, soit à partir la matrice A des coefficients (pour un système homogène), soit à partir de la matrice augmentée $(A:B)$ (pour un système non homogène).

(i) Système homogène de 3 équations à 4 inconnues.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{3}L_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{3}L_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_1 \rightarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} L_1 \rightarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Le système est donc indéterminé. L'ensemble de ses solutions est :

$$S = \{(\lambda, -\lambda, 0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Système homogène de 3 équations à 3 inconnues, donc carré.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow -L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow -L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

dont le déterminant est non nul, ce qui implique que le système homogène est de Cramer. Il possède donc l'unique solution $(0, 0, 0)$.

(iii) Système non homogène de 3 équations à 2 inconnues.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -5 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 5L_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 5L_2 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & -9/4 \end{array} \right).$$

La dernière ligne signifie : « $0 = \frac{-9}{4}$ ». Le système est donc impossible.

EXERCICE 14

Énoncé

Déterminez les valeurs de a et $b \in \mathbb{R}$ telles que le système $\begin{cases} ax + 2by = ab + 1 \\ x - 2y = b \end{cases}$ soit compatible.

Solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 2b & ab+1 \\ 1 & -2 & b \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ a & 2b & ab+1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - aL_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & 2b+2a & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{L_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & a+b & 0,5 \end{array} \right). \text{ Le système est compatible } \Leftrightarrow a+b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -b.$$

EXERCICE 15**Énoncé**

Résolvez le système suivant en discutant selon le paramètre réel k :

$$\begin{cases} kx + 2y - z = 0 \\ x + y - 2kz = 0 \\ x + y = k \end{cases} .$$
Solution

$$\left(\begin{array}{cccc} k & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2k & 0 \\ k & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - kL_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2k & 0 \\ 0 & 2-k & -1+2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & k \end{array} \right) \quad (*)$$

• Si $k \neq 2$:

$$(*) \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2-k}L_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+2k^2}{2-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2k & k \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1-4k}{2-k} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+2k^2}{2-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2k & k \end{array} \right) \quad (**)$$

• Si $k \neq 2$ et $k \neq 0$:

$$(**) \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{2k}L_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1-4k}{2-k} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+2k^2}{2-k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1-4k}{2-k}L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - \frac{-1+2k^2}{2-k}L_3}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4k-1}{4-2k} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-2k^2}{4-2k} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

la solution $\left(\frac{4k-1}{4-2k}, \frac{1-2k^2}{4-2k}, \frac{1}{2} \right)$ est unique.

• Si $k = 2$:

$$(*) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{7}L_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

système impossible.

• Si $k = 0$:

$$(**) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\infty^1 \text{ solutions : } \left\{ \left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

EXERCICE 16

Énoncé

Le système $AX = B$ comporte 30 équations à 20 inconnues. Déterminez son nombre de solutions, sachant que :

- a** $\text{rg } A = 19$ et $\text{rg}(A:B) = 20$,
- b** $\text{rg } A = 20$ et $\text{rg}(A:B) = 20$,
- c** $\text{rg } A = 18$ et $\text{rg}(A:B) = 18$.

Solution

- a** aucune solution,
- b** une solution,
- c** une infinité de solutions.

EXERCICE 17

Énoncé

- a** Calculez le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b** Discutez le rang des matrices suivantes en fonction des paramètres réels a et b :

$$E = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

- a** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A = 2,$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } B = 1,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } C = 1,$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \text{rg } D = 2.$$

$$\mathbf{b} \quad E = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - aL_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{rg } E = 2 & \text{si } a \neq 1 \\ \text{rg } E = 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & b \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & b \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + aL_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}.$$

• Si $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$: $\text{rg } F = 2$.

• Si $ab \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ et $b \neq 0$: $\text{rg } F = 3$.

Diagonalisation

EXERCICE 18

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez le spectre des matrices données. Ces matrices sont-elles diagonalisables? Si oui, donnez-en une matrice diagonale semblable.

$$\mathbf{a} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{c} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{d} \quad E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution

a $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(-\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow S_A = \{2, -1\}.$

A admet 2 valeurs propres réelles distinctes $\Rightarrow A$ est diagonalisable. $D_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale semblable à A .

b $\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ 5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow S_B = \{-4i, 4i\}. S_B \not\subset \mathbb{R} \Rightarrow B$ n'est pas diagonalisable.

c $\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\stackrel{C_3 \rightarrow C_3 + C_2}{\Leftrightarrow} (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Pour faciliter la factorisation du polynôme caractéristique, on introduit des zéros en dernière colonne avant d'appliquer la règle de Sarrus :

$$(1) \stackrel{L_2 \rightarrow L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (3 - \lambda)^2(5 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow S_C = \{3, 5\}.$$

où les valeurs propres réelles, 3 et 5, sont de multiplicités algébriques respectives 2 et 1.

Il faut donc résoudre le système $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour $\lambda = 3$.

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (C - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

Par la méthode de Gauss, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Donc : (2) $\Leftrightarrow x + y - z = 0$.

L'ensemble des solutions, $\{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, comporte 2 paramètres. C est donc diagonalisable.

$$D_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ est semblable à } C.$$

$$\mathbf{d} \quad \det(E - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5 - \lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4 - \lambda)(\lambda + 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow S_E = \{-2, 4\}$, où les valeurs propres réelles -2 et 4 sont de multiplicités algébriques

respectives 2 et 1. Il faut donc résoudre le système $E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour $\lambda = -2$.

$$E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (E + 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

puisque par la méthode de Gauss, on a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions $\{(y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ ne comporte qu'un seul paramètre. Donc E n'est pas diagonalisable.

Formes quadratiques

EXERCICE 19

Énoncé

Étudiez le signe des formes quadratiques données par la méthode des valeurs propres.

- a** $Q(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy$.
- b** $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy$.
- c** $Q(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz$.
- d** $Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy - 4xz - 4yz$.
- e** $Q(x, y, z) = y^2 + z^2 + 2xy - 2xz$.

Solution

- a** La matrice symétrique associée à Q est $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\alpha - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 2 \Rightarrow S_\alpha = \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de α sont positives $\Rightarrow Q$ est définie positive.

b La matrice symétrique associée à Q est $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\alpha - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - 4(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (3-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) \\ &= -(3-\lambda)^2(1+\lambda) \Rightarrow S_\alpha = \{-1, 3\}. \end{aligned}$$

L'existence de valeurs propres de signes opposés implique que Q est indéfinie.

c Q est définie positive.

d Q est indéfinie.

e La matrice symétrique associée à Q est $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\alpha - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow S_\alpha = \{-1, 1, 2\}. \end{aligned}$$

L'existence de valeurs propres de signes opposés implique que Q est indéfinie.

EXERCICE 20

Énoncé

Déterminez par la méthode des mineurs principaux si les matrices symétriques suivantes sont (semi)-définies positives ou négatives.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix} \text{ où } y \in \mathbb{R},$$

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution

Les matrices A, C, E, F, M, P et S ($\forall y \in \mathbb{R}$) sont indéfinies car leurs déterminants sont négatifs.

Les matrices B, D, G, H, K, L, N, Q et R sont définies positives.

- Justification pour B : $\alpha_{(1)} = 6 > 0, \alpha_{(2)} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 > 0$.
- On peut raisonner de la même façon pour D, H, Q et R .
- Justification pour G, L et N : ce sont des matrices diagonales dont les valeurs propres (qui apparaissent sur la diagonale) sont positives.
- Justification pour K :

$$\alpha_{(1)} = 2 > 0, \alpha_{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8$$

$$\text{et } \alpha_{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 24 - 16 = 8 > 0.$$

- Pour J : aucune conclusion n'est apportée par la méthode des mineurs principaux. Cependant, comme $S_J = \{-8, 0\}$, les valeurs propres sont toutes négatives ou nulles. On en conclut que J est semi-définie négative.

- T est définie négative. En effet : $\alpha_{(1)} = -4 < 0, \alpha_{(2)} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

Applications à la gestion

EXERCICE 21

Énoncé

Une entreprise de fournitures de bureau vend des cartouches d'encre de qualité moyenne (mesurée par le nombre 15 sur une échelle numérique connue de 1 à 30) à 50 euros la pièce. Elle dispose de deux variables de décision pour influencer le volume V de ses ventes de cartouches d'encre et sa marge bénéficiaire par cartouche M : le prix par cartouche (noté p) et la qualité des cartouches (notée q).

Si le prix de la cartouche passe de p à $p + a$ (à qualité inchangée), les ventes diminuent globalement de $3a$ unités et la marge unitaire augmente de a . Si la qualité des cartouches passe de q à $q + b$ (à prix inchangé), les ventes augmentent de b unités et la marge unitaire baisse de b .

Déterminez la stratégie qui permet de vendre 20 cartouches de plus sans affecter la marge unitaire.

Solution

La solution est donnée par le couple (a, b) , où a représente la variation de prix et b la variation de qualité, vérifiant les deux conditions suivantes :

- Accroissement des ventes de 20 unités : $\Delta V = -3a + b = 20$,
- Marge inchangée : $\Delta M = a - b = 0$.

Ces conditions se présentent sous la forme d'un système de Cramer :

$$\begin{cases} -3a + b = 20 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 20 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -10 \end{cases} .$$

Pour vendre 20 cartouches de plus sans changer sa marge, l'entreprise doit baisser son prix de vente de 10 euros par cartouche en diminuant la qualité de 10 unités. Elle doit donc vendre à 40 euros des cartouches de qualité 5.

EXERCICE 22

Énoncé

Une entreprise fabrique deux produits intermédiaires U et V. Pour produire une unité de produit U (resp. de produit V) l'entreprise utilise 20 % (resp. 10 %) de sa production de U et 60 % (resp. 30 %) de sa production de V.

On appelle *matrice des coefficients techniques*, la matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ (ici $n = 2$) telle que a_{ij} représente la quantité de l'input i nécessaire pour produire une unité de j .

- a** Donnez la matrice des coefficients techniques de l'entreprise considérée.
- b** Si l'entreprise produit 200 unités de biens U et 350 unités de biens V, quelle sera la production finale qui parviendra aux consommateurs?
- c** Quelle est le niveau de la production totale qui satisfait une demande finale de 500 unités de U et 1 000 de V?

Solution

- a** La matrice des coefficients techniques est $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

- b** Sous forme matricielle, cette production s'exprime par : $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$.

La consommation intermédiaire est donné par : $AX = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 225 \end{pmatrix}$.

Pour satisfaire la demande finale, il reste donc : $X - AX = \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 75 \\ 225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 125 \end{pmatrix}$, soit 125 unités de U et 125 unités de V.

- c** Soit $D = \begin{pmatrix} 500 \\ 1\,000 \end{pmatrix}$, la matrice colonne qui exprime la demande finale.

Il faut trouver $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ tel que : $X - AX = D$.

Or : $X - AX = D \Leftrightarrow (I - A)X = D \Leftrightarrow X = (I - A)^{-1}D$, car $(I - A)$ est une matrice inversible.

On procède donc à l'inversion de la matrice : $(I - A) = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$.

On obtient $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 0,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que : $X = (I - A)^{-1} D = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 0,2 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 1\,700 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la production nécessaire est 900 unités de U et 1 700 de V.

Remarque

la matrice $(I - A)$ est appelée *matrice de Léontief*.

EXERCICE 23

Énoncé

Les prix, à la date t , de trois actions de firmes liées par leurs structures d'actionariat, $p_{1,t}$, $p_{2,t}$ et $p_{3,t}$, dépendent chacun des anticipations des prix futurs des trois titres, $\hat{p}_{i,t+1}$ ($i = 1, 2, 3$), de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} p_{1,t} \\ p_{2,t} \\ p_{3,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & \frac{b}{2} \\ b & d & \frac{b}{3} \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{3} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \hat{p}_{1,t+1} \\ \hat{p}_{2,t+1} \\ \hat{p}_{3,t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b, c, d > 0 \quad (1)$$

où $\varepsilon_{1,t}$, $\varepsilon_{2,t}$ et $\varepsilon_{3,t}$ représentent des perturbations aléatoires.

- a** Montrez que la matrice A est diagonalisable.
- b** Grâce à cette diagonalisation, il existe un système de trois prix, combinaisons linéaires de $p_{1,t}$, $p_{2,t}$ et $p_{3,t}$, telle que l'évolution de chacun ne dépend que de sa propre anticipation et de perturbations. Démontrez-le.

Solution

- a** La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable.

- b** Condensons l'écriture de (1) sous la forme : $p_t = A\hat{p}_{t+1} + \varepsilon_t$.

Comme A est diagonalisable, on a, par définition : $\exists H, D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ telles que H est inversible, D est diagonale et : $A = H^{-1}DH$ ($\Leftrightarrow HA = DH$).

Le système (1) s'écrit de façon équivalente, en multipliant à gauche par la matrice H :

$$Hp_t = \underbrace{HA}_{DH} \hat{p}_{t+1} + H\varepsilon_t \Leftrightarrow \tilde{p}_t = D\hat{p}_{t+1} + \tilde{\varepsilon}_t \quad (2)$$

où $\tilde{p}_t = Hp_t$ ($\Rightarrow \hat{p}_{t+1} = H\hat{p}_{t+1}$) et $\tilde{\varepsilon}_t = H\varepsilon_t$.

Chaque composante du nouveau vecteur de prix $\tilde{p}_t = Hp_t$ s'exprime en fonction de sa propre anticipation et de perturbations puisque (2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,t} \\ \tilde{p}_{2,t} \\ \tilde{p}_{3,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \hat{\tilde{p}}_{1,t+1} \\ \hat{\tilde{p}}_{2,t+1} \\ \hat{\tilde{p}}_{3,t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{3,t} \end{pmatrix}$$

ou encore : $\tilde{p}_{i,t} = d_i \hat{\tilde{p}}_{i,t+1} + \tilde{\varepsilon}_{i,t}$, $i = 1, 2, 3$.

EXERCICE 24

Énoncé

Un économètre a établi que la dynamique jointe des taux de change (vis-à-vis du dollar US) de l'euro $c_{1,t}$, du franc suisse $c_{2,t}$ et de la livre sterling $c_{3,t}$ s'établit comme suit :

$$\begin{pmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \\ c_{3,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ b & 0 & a \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} c_{1,t-1} \\ c_{2,t-1} \\ c_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}, \quad \text{où } a > 0 \text{ et } b, c \geq 0. \quad (1)$$

- a** La matrice A est-elle diagonalisable? On discutera en fonction des paramètres a , b et c .
- b** En omettant les perturbations (imprévisibles), écrivez la prévision du cours de l'euro pour la semaine prochaine (à la date $t+5$, puisqu'une semaine correspond à 5 jours ouvrables), en fonction des taux de change présents.

Solution

a $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ b & a - \lambda & c \\ b & 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^3$.

L'unique valeur propre, a , est réelle et de une multiplicité algébrique égale à 3. Il faut donc déterminer la dimension de l'ensemble des solutions de :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} bx + cz = 0 \\ bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cz = 0 \\ bx = 0 \end{cases}.$$

La dimension de l'ensemble de solution n'est égale à 3 que lorsque $b = c = 0$. On a donc : A est diagonalisable $\Leftrightarrow b = c = 0$.

- b** La première ligne du système (1) exprime que l'euro ne dépend ni la valeur passée du franc suisse, ni de celle de la livre sterling : $c_{1,t} = ac_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t}$. Sachant que la perturbation est imprévisible (prévision nulle), on obtient simplement la prévision suivante : $\hat{c}_{1,t+5} = a\hat{c}_{1,t+4} = \dots = a^5 c_{1,t}$.