

Optimisation des fonctions d'une seule variable

Optimisation des fonctions d'une seule variable	
1. Les types d'extrema	102
2. Propriétés	102
2.1 Condition suffisante d'existence d'extrema globaux	102
2.2 Condition nécessaire du premier ordre	102
2.3 Condition suffisante du second ordre	104
2.4 Condition nécessaire et suffisante d'ordre n ($n \geq 2$)	104
2.5 Conditions suffisantes	106
3. Extrema globaux	107
4. Concavité, convexité et extrema ...	108
Problèmes et exercices	111
Recherche des extrema	111
Applications à la gestion	116

L'optimisation est au cœur de la modélisation d'un grand nombre de problèmes auxquels font face les gestionnaires : allocation optimale des ressources, maximisation du bénéfice, minimisation des coûts, maximisation de la satisfaction des clients, etc.

Toutefois, alors qu'en gestion, les variables de décisions sont généralement multidimensionnelles, ce chapitre ne concerne que les fonctions d'une seule variable réelle.

Cette limitation importante sera levée dans les chapitres 6 et 7. En fait, la complexité de l'étude des fonctions de plusieurs variables requiert au préalable la connaissance, d'une part, des propriétés des fonctions d'une variable, et d'autre part, des notions d'algèbre linéaire qui seront présentées dans le chapitre 5.

Mathématiquement, l'optimisation se traduit par la recherche des points du domaine en lesquels la fonction étudiée prend une valeur maximale ou minimale. En ces points, la fonction admet un *extremum*, appelé aussi *optimum*. Qu'il s'agisse de minima ou de maxima, on distingue deux grandes classes : les extrema locaux, définis dans le voisinage d'un point, pour lesquels sont formulées diverses conditions mathématiques, et les extrema globaux, valables dans tout le domaine de définition de la fonction, et qui sont souvent les plus utiles dans les applications pratiques.

Le chapitre s'articule comme suit. Après l'énoncé des principales définitions, la détermination des extrema locaux est présentée en deux étapes : sélection de « candidats », examinés ensuite au cas par cas. Enfin, le passage délicat aux extrema globaux est détaillé.

1 Les types d'extrema

Définitions Considérons une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ et un point $a \in D$.

- f admet un maximum global en a si $\forall x \in D : f(a) \geq f(x)$;
- f admet un minimum global en a si $\forall x \in D : f(a) \leq f(x)$;
- f admet un maximum local en a si ⁽¹⁾ $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D : f(a) \geq f(x)$;
- f admet un minimum local en a si $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D : f(a) \leq f(x)$;
- f admet un maximum global strict en a si $\forall x \in D \setminus \{a\} : f(a) > f(x)$;
- f admet un minimum global strict en a si $\forall x \in D \setminus \{a\} : f(a) < f(x)$;
- f admet un maximum local strict en a si $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D \setminus \{a\} : f(a) > f(x)$;
- f admet un minimum local strict en a si $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D \setminus \{a\} : f(a) < f(x)$. □

Si la fonction f admet un maximum (resp. un minimum) en a , alors $f(a)$ est la valeur maximale (resp. minimale) correspondante.

En l'absence de spécification, on considère que les extrema sont « non stricts ». Par ailleurs, si tout maximum global est aussi un maximum local, l'existence d'un ou plusieurs maxima locaux n'implique pas celle d'un maximum global. De plus, une fonction peut admettre un maximum global, en plusieurs points distincts, mais avec la même valeur maximale. Enfin, une fonction ne peut admettre un maximum global strict qu'en un seul point, mais il peut exister plusieurs maxima locaux stricts. Il en va évidemment de même pour les minima.

2 Propriétés

2.1 CONDITION SUFFISANTE D'EXISTENCE D'EXTREMA GLOBAUX

Le premier résultat garantit l'existence d'extrema globaux pour les fonctions définies et continues dans un intervalle fermé. Pour le reste, l'existence d'extrema, même locaux, n'est pas garantie.

Propriété Si f est continue dans $[a, b]$, alors f admet un maximum global et un minimum global dans $[a, b]$. □

2.2 CONDITION NÉCESSAIRE DU PREMIER ORDRE

Les propriétés suivantes concernent la détermination des extrema locaux. Tout d'abord, la condition nécessaire du premier ordre (basée sur la dérivée première de la fonction) offre la possibilité d'opérer une première sélection de « candidats » extrema.

1. $V(a)$ représente un voisinage du point a (voir chapitre 1 section 1.6). On peut également formuler la définition des extrema locaux en remplaçant ce voisinage par un intervalle $(a - \eta, a + \eta)$, où $\eta > 0$.

Propriété Si f est dérivable en $a \in D \cap D'$ et si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$. □

Définition Un point $a \in D \cap D'$ en lequel f est dérivable et $f'(a) = 0$ est appelé *point critique*. □

Les points critiques, caractérisés géométriquement par une tangente au graphe horizontale ($T_a \equiv y = f(a)$), constituent des extrema possibles. Toutefois, certains points critiques ne sont pas des extrema. Par ailleurs, certains extrema peuvent être situés hors de $D \cap D'$ (en un bord du domaine) ou en un point où la fonction n'est pas dérivable (un point anguleux, par exemple).

En résumé, la première étape de la recherche des extrema locaux consiste à dresser *la liste exhaustive* des « candidats » :

- les points critiques,
- les bords de D qui sont les points de $D \setminus D'$,
- les points de $D \cap D'$ en lesquels la fonction n'est pas dérivable.

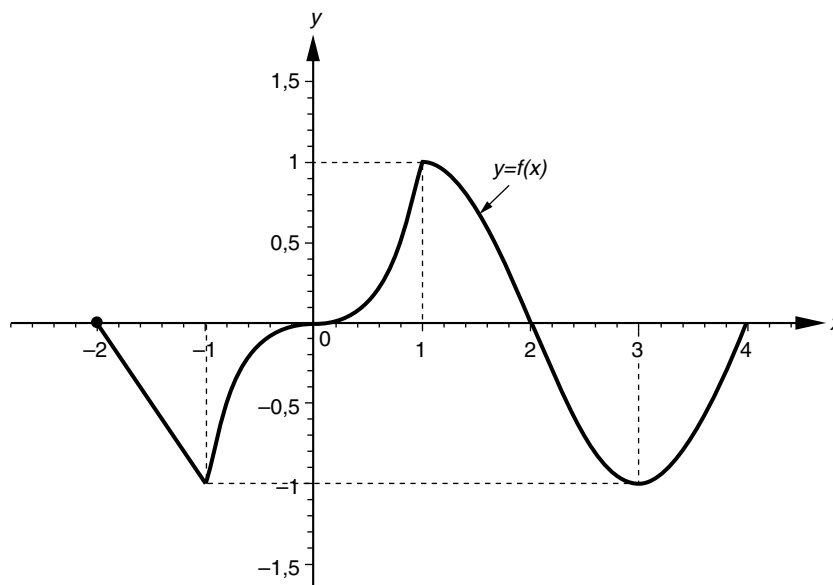
Un extremum situé en un bord du domaine (dans $D \setminus D'$) est parfois appelé *solution de coin* du problème d'optimisation.

Exemple

Cet exemple permet d'illustrer la diversité des cas possibles. En pratique, sauf à procéder de façon numérique, et donc approchée, on ne connaît pas *a priori* le graphe de la fonction et ce n'est qu'au terme d'une étude complète, incluant la détermination des extrema, que ce graphe peut être dressé.

La fonction $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$, dont le graphe est donné par la figure 4.1, présente les caractéristiques suivantes :

Figure 4.1



- f est continue dans son domaine $[-2, 4]$ (à vérifier à titre exercice) qui est un intervalle fermé. Donc, d'après la propriété en 2.1, f admet un maximum global et un minimum global dans $[-2, 4]$. La valeur minimale globale, $f(x) = -1$, est atteinte en $x = -1$ et en $x = 3$, tandis que la valeur maximale globale, $f(x) = 1$, est atteinte en $x = 1$.
- En 0, f admet un point critique (la tangente à la courbe est horizontale) mais pas d'extremum. Par contre, en 3, f admet un point critique et un extremum.
- f n'est dérivable ni en -1 , ni en 1 (expliquer pourquoi à titre d'exercice), alors qu'en ces points f admet des extrema (voir ci-dessus).
- Les bords du domaine sont -2 et 4 , puisque : $D \setminus D' = [-2, 4] \setminus (-2, 4) = \{-2, 4\}$. En chacun de ces deux points, f admet un maximum local non global.

La seconde étape, souvent plus ardue en pratique, vise à trancher pour chacun des candidats. S'agit-il d'un extremum? Si oui, de quel type (maximum ou minimum, local ou global)? Malheureusement, aucun critère ne s'applique uniformément à tous les candidats de la première étape. Au cas par cas, des propriétés permettent de conclure dans la plupart des situations. En dernier ressort, les définitions restent évidemment d'application. Elles constituent le seul recours dans le cas d'une fonction très irrégulière, comme par exemple en un point de $D \cap D'$ où la fonction n'est pas continue.

2.3 CONDITION SUFFISANTE DU SECOND ORDRE

La condition suffisante du second ordre, permet de trancher pour les points critiques où la dérivée seconde existe et est non nulle.

Propriété Si f est deux fois dérivable en $a \in D \cap D'$ et si $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, alors f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a si $f''(a) < 0$ (resp. si $f''(a) > 0$). □

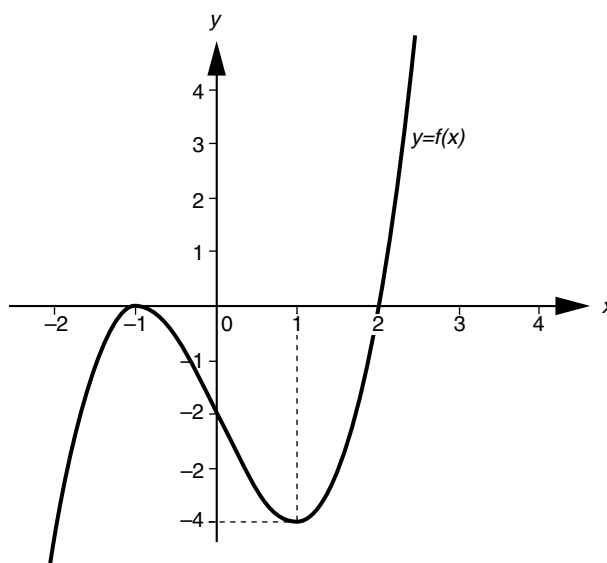
Exemple

On veut déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^3 - 3x - 2$. En dérivant, on obtient : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ et $f''(x) = 6x$. Il s'ensuit que : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Comme $f''(-1) = -6 < 0$ et $f''(1) = 6 > 0$, f admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1 (figure 4.2, page ci-contre).

2.4 CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'ORDRE n ($n \geq 2$)

Au terme de l'application de la condition suffisante d'ordre 2, restent encore en suspens diverses catégories de candidats, dont les points critiques en lesquels la dérivée seconde s'annule. La condition nécessaire et suffisante d'ordre n , s'applique aux fonctions suffisamment régulières pour qu'on puisse déterminer l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas. Selon que l'ordre est pair ou impair, il y a ou il n'y a pas un extremum en ce point.

Figure 4.2



Propriété Si f est n fois dérivable en $a \in D \cap D'$, si $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$, alors :

- n est pair et $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local en a ;
- n est pair et $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en a ;
- n est impair $\Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum en a .

□

Exemple

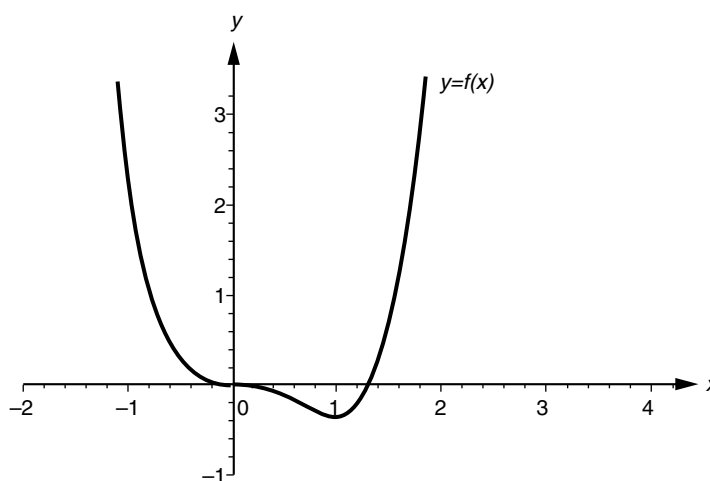
On veut déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^4 - \frac{4}{3}x^3$.

En dérivant, on obtient : $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x - 1)$ et $f''(x) = 12x^2 - 8x = 4x(3x - 2)$.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$. Comme $f''(1) = 4 > 0$, f admet un minimum local en 1.

Par contre, comme $f''(0) = 0$, on ne peut pas conclure à l'aide de la condition du second ordre. On observe alors que : $f'''(x) = 24x - 8 \Rightarrow f'''(0) = -8 < 0$. En vertu de la propriété ci-dessus où $n = 3$, on conclut que f n'admet pas d'extremum local en 0 (figure 4.3).

Figure 4.3



2.5 CONDITIONS SUFFISANTES

Les propriétés suivantes sont fondées sur les caractéristiques de croissance et de décroissance de la fonction étudiée autour d'un extremum. Ce sont des conditions suffisantes. La première ne fait appel à aucune hypothèse de continuité ou de dérivabilité. De plus, le point a peut se situer en tout endroit de D , y compris en un bord. La seconde, plus exigeante en terme de régularité, permet d'établir les extrema locaux en dressant un tableau des signes de la dérivée de la fonction.

Propriétés

- Soit $a \in D$. Si $\exists \eta > 0$ tel que, f est croissante (resp. décroissante) dans $(a - \eta, a) \cap D$ et décroissante (resp. croissante) dans $(a, a + \eta) \cap D$, alors f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a .
- Soit $a \in DC$. Si $\exists \eta > 0$ tel que f est dérivable dans $[(a - \eta, a + \eta) \setminus \{a\}] \cap D$ et

$$\text{et } \begin{cases} \forall x \in (a - \eta, a) \cap D : f'(x) \geq 0 & (\text{resp. } f'(x) \leq 0) \\ \forall x \in (a, a + \eta) \cap D : f'(x) \leq 0 & (\text{resp. } f'(x) \geq 0) \end{cases},$$
 alors f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a . □

La réciproque de la seconde propriété est fautive. Voici un contre-exemple.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On a $0 \in DC = \mathbb{R}$. De plus, f est dérivable dans \mathbb{R}_0 et

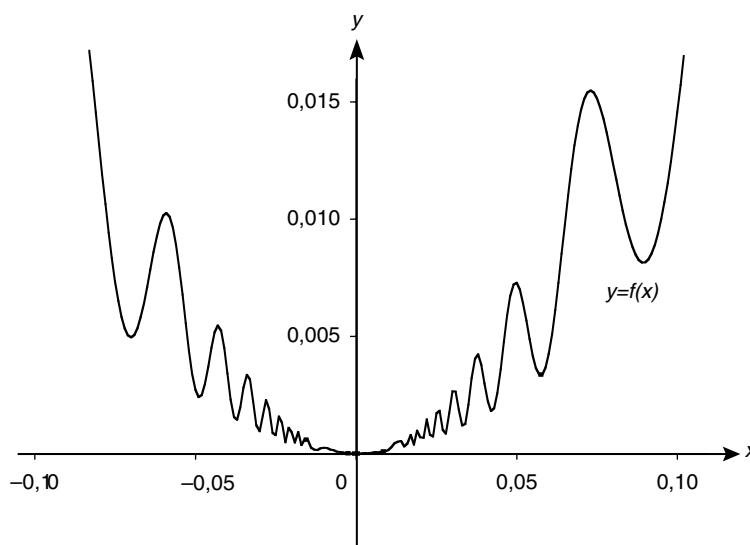
$$\forall x \in \mathbb{R}_0 : f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Cette dérivée est négative en tous les points du type : $x = \frac{1}{2k\pi}$, où $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ (figure 4.4), et donc :

$$\forall \eta > 0, \exists x \in (0, \eta) : f'(x) < 0,$$

pourtant f admet un minimum local (strict) en 0.

Figure 4.4



La propriété qui permet d'utiliser le signe de f' comme indicateur de la présence d'un extremum au point a exige, d'une part, l'appartenance de a au domaine de continuité de f et, d'autre part, la dérivabilité de f « autour » de a , mais pas au point lui-même. Elle s'applique, par exemple, en un point anguleux ou même en un bord du domaine pour autant que ce bord appartienne au domaine de continuité. Elle peut aussi être vue comme une alternative à la condition suffisante du second ordre pour les points critiques en permettant, le cas échéant, de ne pas aborder le calcul de la dérivée seconde qui, pour certaines fonctions, s'avère fastidieux.

En pratique, on se sert souvent d'un tableau pour étudier les signes de f' (et de f'' pour étudier la concavité/convexité de f). Voici quelques cas typiques ($\eta > 0$ dans tous les cas) :

- Si f admet un point critique en a et

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } x \in (a - \eta, a) \\ = 0 & \text{si } x = a \\ > 0 & \text{si } x \in (a, a + \eta) \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet un minimum local en } a.$$

- Si f est continue en a et dérivable dans un voisinage de a , sauf en a , et

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (a - \eta, a) \\ \nexists & \text{si } x = a \\ < 0 & \text{si } x \in (a, a + \eta) \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet un maximum local en } a.$$

- Si f est continue à droite en le bord gauche a , dérivable dans un intervalle $(a, a + \eta)$ et $f'(x) < 0$ si $x \in (a, a + \eta) \Rightarrow f$ admet un maximum local en a .

3 Extrema globaux

Alors que le mathématicien s'intéresse principalement aux extrema locaux, le gestionnaire est le plus souvent préoccupé par la recherche d'extrema globaux. Ainsi, ayant déterminé tous les extrema locaux de la fonction dans le domaine considéré, il voudra identifier parmi eux les extrema globaux.

La propriété de la section 2.1 affirme l'existence des extrema globaux pour les fonctions continues dans un intervalle fermé. Dans ce cas, les extrema globaux sont obtenus en comparant les valeurs optimales locales. Ainsi, pour déterminer un maximum global, on procède comme suit :

- $MAXL = \{x \in D : f \text{ admet un maximum local en } x\}$.
- $M = \{f(x) : x \in MAXL\}$ est la valeur maximale globale, dont l'existence est assurée.
- Enfin, f admet un maximum global en tout point de $f^{-1}(\{M\}) = \{a \in D : f(a) = M\}$.

Remarque

La valeur maximale globale M est unique mais peut être atteinte en plusieurs points (lorsque $f^{-1}(\{M\})$ comporte plus d'un élément).

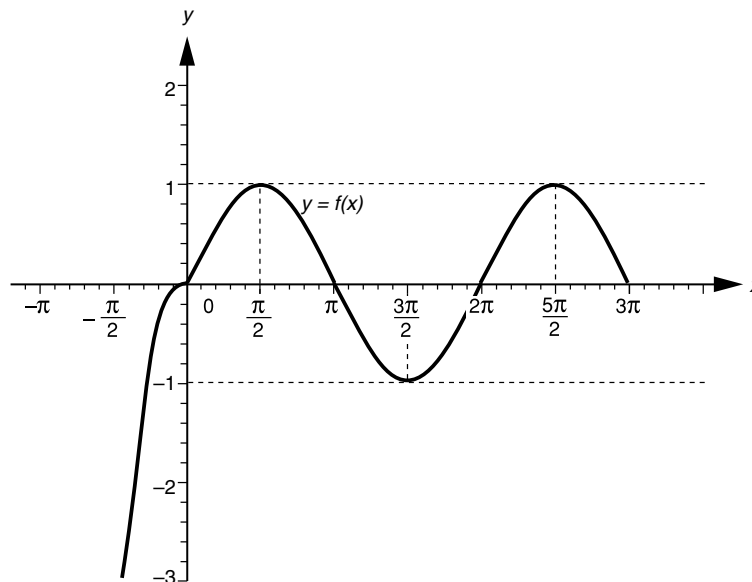
Dans le cas moins favorable où le domaine n'est pas un intervalle fermé et/ou si la fonction est discontinue, l'existence d'extrema globaux n'est pas assurée, même s'il existe des extrema locaux. Toutefois, s'il existe des extrema globaux, alors ils sont forcément parmi les extrema locaux. L'étude doit cependant être menée au cas par cas, aucune possibilité n'étant *a priori* exclue. Pour pouvoir conclure, il faut prendre en compte le comportement de la fonction :

- au voisinage des bords exclus du domaine D ;
- au voisinage des points de $D \setminus DC$, c'est-à-dire des points de discontinuité;
- pour $x \rightarrow +\infty$ et/ou pour $x \rightarrow -\infty$ (si le domaine est non borné).

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ admet un minimum local en une infinité de points mais ne possède aucun minimum global puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Par contre, elle atteint la valeur maximale globale 1 en une infinité de points (figure 4.5).

Figure 4.5



4 Concavité, convexité et extrema

Les fonctions concaves et convexes ont été définies et étudiées dans le chapitre 3. Toutefois, la connaissance préalable de la concavité ou de la convexité d'une fonction simplifie considérablement la recherche de ses extrema, en transformant la condition nécessaire du premier ordre en une condition nécessaire et suffisante pour un extremum global.

Propriétés Soit un sous-ensemble D convexe de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ dérivable dans D' .

- Si f est convexe dans D , alors $\forall a \in D' : f'(a) = 0 \Leftrightarrow f$ admet un maximum global en a .
- Si f est concave dans D , alors $\forall a \in D' : f'(a) = 0 \Leftrightarrow f$ admet un minimum global en a . □

Ce résultat n'affirme ni l'existence, ni l'unicité des extrema. Il ne s'applique pas aux cas où la condition nécessaire du premier ordre n'est pas valide : les bords éventuels de D et les points de discontinuité.

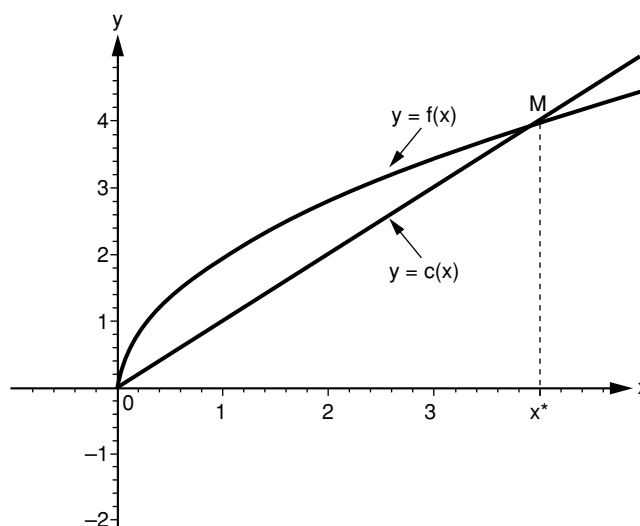
Exemples

1. La fonction définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2$ est convexe et dérivable dans \mathbb{R} et $f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Elle admet donc un minimum global en 0 et aucun maximum (par absence de candidat).
2. Monsieur X a pour seule activité productive la culture d'huîtres, pour laquelle il n'utilise que son propre travail. Si $f(x)$ désigne la valeur de marché de la quantité d'huîtres x produites en une semaine, la fonction de production de Monsieur X, définie pour $x \geq 0$, est donnée par : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$. Nous supposons que cette fonction est concave et dérivable dans son domaine.

D'autre part, la fonction de coût liée au travail hebdomadaire de Monsieur X est linéaire (proportionnelle au temps consacré à la production) : $C : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow cx$.

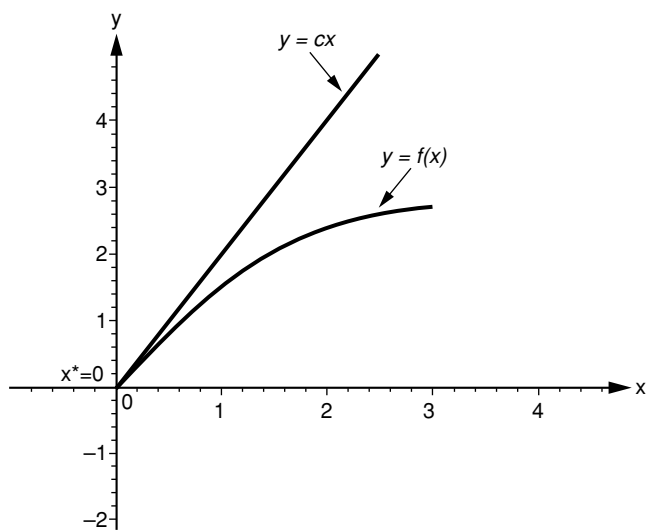
Si Monsieur X souhaite fixer sa quantité de travail de façon à optimiser son profit, il doit déterminer le maximum global de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) - cx$, qui est concave et dérivable dans \mathbb{R}^+ . La solution de son problème (figure 4.6) se situera en $x^* \in \mathbb{R}_0^+$ tel que : $g'(x^*) = 0 \Leftrightarrow f'(x^*) = c$ (productivité marginale = coût marginal).

Figure 4.6



Toutefois, lorsque cette condition ne fournit pas de valeur $x^* \in \mathbb{R}_0^+$, il demeure la possibilité d'une solution de coin : $x^* = 0$. Ce sera le cas lorsque lorsqu'il n'est jamais rentable de produire : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq cx$ (figure 4.7, page suivante).

Figure 4.7



Problèmes et exercices

Tous les exercices de cette section visent évidemment le même but : trouver les extrema locaux et globaux d'une fonction donnée. Toutefois, dans les applications pratiques à la gestion, poser le problème et établir la fonction d'objectif constituent souvent des préalables à la phase d'optimisation elle-même.

Recherche des extrema

EXERCICE 1

Énoncé

Dans chaque cas, utilisez la dérivée première pour déterminer les extrema éventuels des fonctions données.

- a** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow -x^2 + 6x - 11.$
- b** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$
- c** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ x^4 + \frac{4}{5}x^5 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}.$
- c** $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sqrt[3]{x^2}.$

Solution

- a** La fonction est un polynôme, donc dérivable dans son domaine \mathbb{R} . Le seul candidat extremum est le point critique tel que $f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$. L'étude du signe de la dérivée première et ses conséquences sur le comportement de la fonction sont résumées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x) = -2x + 6$	$+$	0	$-$
$f(x) = -x^2 + 6x - 11$	$-\infty$	-2	$-\infty$

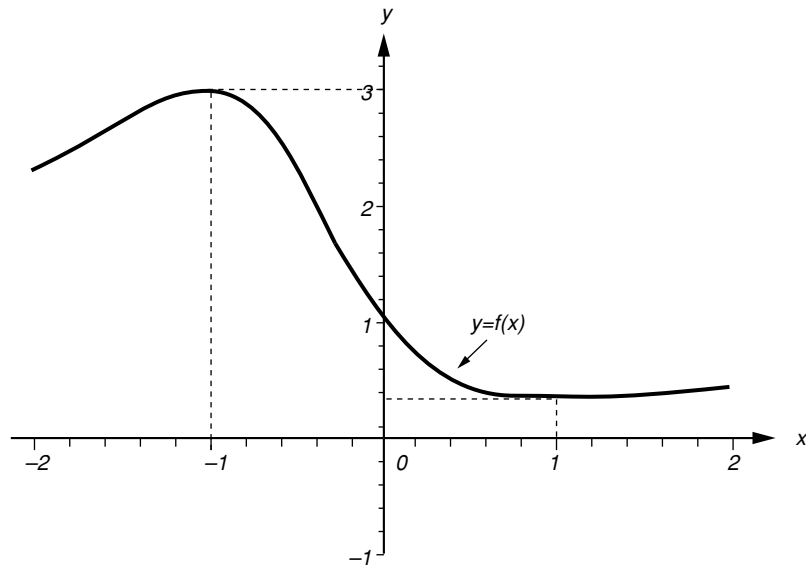
En conséquence, f admet un maximum global strict en 3, la valeur maximale associée est $f(3) = -2$.

- b** La fonction est dérivable dans son domaine \mathbb{R} , en tant que quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul (à vérifier !). Les seuls candidats sont les points critiques :

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

L'étude de signe montre que : $f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ > 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$. Il s'ensuit que f admet un maximum local strict en -1 et un minimum local strict en 1 (figure 4.8).

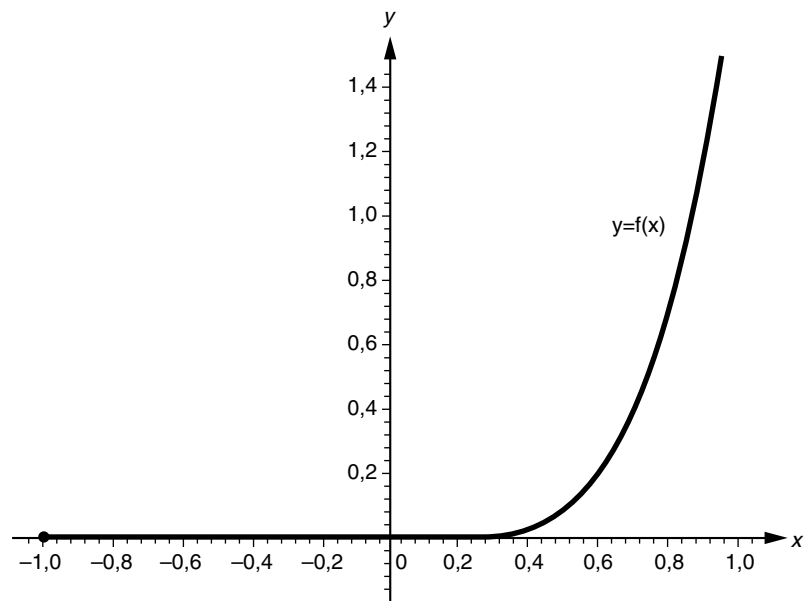
Figure 4.8



- c** La fonction n'admet pas d'extremum dans l'intervalle $(0, 1)$ puisque

$$\forall x \in (0, 1) : f'(x) = 4x^3 + 4x^4 > 0.$$

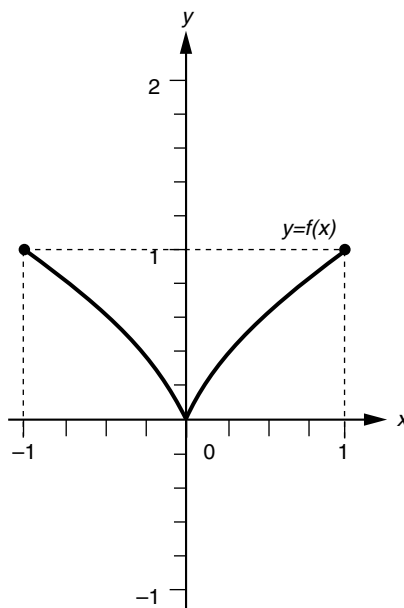
Figure 4.9



Par contre, tous les points de l'intervalle $(-1, 0]$ sont des points critiques en lesquels f atteint sa valeur minimale globale. Ces minima sont donc forcément non stricts (figure 4.9, page ci-contre). Notons aussi qu'en tout point de $(-1, 0)$, la fonction atteint une valeur maximale locale (non globale, non stricte). Cette situation apparemment paradoxale résulte du fait que la fonction est constante dans une partie de son domaine.

- d** La fonction est continue dans son domaine et dérivable dans $[-1, 1] \setminus \{0\}$ mais ne possède aucun point critique. Cependant, le signe de la dérivée première permet de conclure que f admet un minimum (global) en 0 et deux maxima (globaux) en -1 et 1 (figure 4.10).

Figure 4.10



EXERCICE 2

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions données.

- a** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow e^x \cdot \cos x.$
b $f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}.$
c $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{|x|}{1+x^2}.$
d $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3x^5 - 10x^3 - 45x + 7.$
e $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2 + \frac{2}{x}.$
f $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Solution

- a** La fonction est dérivable dans son domaine \mathbb{R} . Les seuls candidats extrema sont donc les éventuels points critiques. On a : $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

f est deux fois dérivable dans \mathbb{R} et $f''(x) = -2e^x \sin x$. D'autre part :

- $f''\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -2e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local (strict) en $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $f''\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = -2e^{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = \sqrt{2}e^{(2k+1)\pi} > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local (strict) en $\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La fonction n'étant bornée ni supérieurement, ni inférieurement, aucun extremum n'est global.

- b** La fonction est deux fois dérivable dans son domaine, l'ouvert \mathbb{R}_0^+ . La liste des candidats extrema est alors réduite au seul point critique :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

L'examen de la dérivée première permet de conclure qu'en e , la fonction admet un maximum global.

- c** La fonction est continue dans \mathbb{R} , dérivable dans l'ouvert \mathbb{R}_0 et non dérivable en 0, avec :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1 + x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

La fonction est cependant dérivable à gauche et à droite en 0 avec :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 1 \neq f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 + x^2}{1 + x^2} = -1.$$

Les points critiques sont ceux qui vérifient soit $1 - x^2 = 0$ et $x > 0$, soit $x^2 - 1 = 0$ et $x < 0$. Il s'agit donc des points 1 et -1 . S'ajoute le candidat extremum 0 où la fonction est non dérivable.

À l'aide de la dérivée première, on vérifie qu'en 1 et en -1 , f admet un maximum global (non strict) avec $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$.

D'autre part, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_0 : f(x) > 0 = f(0)$, donc f admet en 0 un minimum global strict.

Deux remarques peuvent être faites :

- La fonction est paire : $f(-x) = \frac{|-x|}{1 + (-x)^2} = \frac{|x|}{1 + x^2} = f(x)$. Il aurait pu suffire de déterminer ses extrema dans $[0, +\infty)$ et conclure par symétrie pour $(-\infty, 0]$.
- Les maxima en 1 et -1 peuvent aussi être obtenus en utilisant l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 1 \cdot |x| \leq \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2}(1 + x^2)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{|x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2} = f(1) = f(-1).$$

d La fonction n'admet pas de point critique (à vérifier). Comme f est continue dans un intervalle fermé, les extrema globaux, dont l'existence est assurée, sont automatiquement situés aux bords de l'intervalle : $f(-1) = 59$ et $f(1) = -45 \Rightarrow f$ admet un maximum global en -1 et un minimum global en 1 .

e La fonction est deux fois dérivable dans son domaine \mathbb{R}_0 .

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ admet un minimum local (et global) en } 1.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ n'admet pas de maximum global.

f La fonction admet un minimum global (strict) en 0 . Il s'agit du seul extremum de la fonction. En effet, f est dérivable dans l'ouvert $(-1, 1)$ et admet pour seul point critique le point 0 et

$$\forall x \in (-1, 1) : f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1 = f(0).$$

EXERCICE 3

Énoncé

- a** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k , la fonction $f(x) = \cos(2x) + k \cos x$ admet-elle un extremum en $\frac{\pi}{3}$?
- b** Déterminez $n \in \mathbb{N}_0$ tel que la fonction $f(x) = (x-1)^n e^x$ admette un extremum en $x = -3$. Quelle est la nature de cet extremum ?

Solution

- a** La fonction $f(x) = \cos(2x) + k \cos x$ est dérivable dans \mathbb{R} pour toute valeur de k , donc tout extremum est un point critique. Dès lors, si f admet un extremum en $x = \frac{\pi}{3}$, alors :

$$f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -2 \sin \left(2 \frac{\pi}{3} \right) - k \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0 \Rightarrow k = -\frac{2 \sin \left(2 \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)} = -2.$$

- b** $f'(x) = n(x-1)^{n-1} e^x + (x-1)^n e^x = (x-1)^{n-1} e^x (x+n-1)$.
Comme $f'(-3) = 0 \Leftrightarrow n = 4$, la fonction doit avoir la forme : $f(x) = (x-1)^4 e^x$.
En outre, comme $f''(x) = e^x(x-1)^2(x^2+5x+2) \Rightarrow f''(-3) = -64e^{-3} < 0$, il s'agit d'un maximum local (non global).

Applications à la gestion

EXERCICE 4

Énoncé

La firme X fabrique des boîtes métalliques (sans couvercle) à partir de plaques carrées dont la surface mesure 4 dm^2 . Les boîtes sont obtenues en ôtant en chaque coin de la plaque des pièces carrées identiques, puis en pliant les morceaux restants.

Quelles sont les dimensions des boîtes ainsi construites qui présentent un volume maximal?

Solution

Désignons par x la longueur (en dm) du côté de la pièce à ôter. Comme la plaque de départ a 2 dm de côté, il faut imposer la contrainte : $0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$. Par ailleurs, la boîte à construire se caractérise par une hauteur de x et une base carrée de côté $(2 - 2x)$, et donc un volume (en dm^3) de $V(x) = x(2 - 2x)^2$. Le problème se ramène donc à la maximisation de la fonction :

$$V : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow V(x) = x(2 - 2x)^2 = 4(x^3 - 2x^2 + x).$$

L'existence d'une solution est assurée puisque la fonction est continue dans un intervalle fermé. La fonction V est dérivable dans $(0, 1)$ et les points critiques sont déterminés par :

$$V'(x) = 4(3x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

Comme $1 \notin (0, 1)$, le seul point critique est $\frac{1}{3}$. S'ajoutent comme candidats les deux bords de l'intervalle : 0 et 1.

La comparaison des valeurs de $V(x)$ en les trois candidats révèle que le maximum global est atteint en $\frac{1}{3}$ et que la valeur maximale du volume est : $V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{27}$.

En conclusion, la boîte de volume optimal $\frac{16}{27} \text{ dm}^3$, a pour hauteur $\frac{1}{3} \text{ dm}$ et une base carrée de côté $\frac{4}{3} \text{ dm}$.

EXERCICE 5

Énoncé

Un carton publicitaire doit contenir 54 cm^2 de texte imprimé. Les marges imposées sont de 1 cm en haut et bas de page et de 1, 5 cm de chaque côté du texte.

Sachant que le prix du carton est proportionnel à sa superficie, quelles seront les dimensions du carton le moins cher possible?

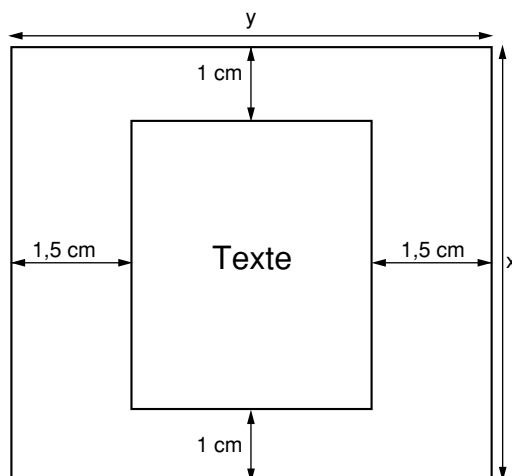
Solution

Désignons par x et y les dimensions du carton (figure 4.11, page ci-contre). Les dimensions recherchées minimisent la surface du carton : $S = x.y$.

Le texte occupe donc une surface égale à $(y - 3)(x - 2) = 54$. Il s'ensuit que :

$$y = \frac{54}{x - 2} + 3, \quad x > 2 \text{ et } y > 3$$

Figure 4.11



Le problème se ramène alors à minimiser la fonction $S(x) = \frac{54x}{x-2} + 3x$ dans l'ensemble ouvert $(2, +\infty)$. Les seuls points candidats seront donc les points critiques de la fonction S qui est deux fois dérivable dans $(2, +\infty)$.

$$S'(x) = \frac{-108}{(x-2)^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2 - 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 36 \Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -4.$$

Comme $x = -4 \notin (2, +\infty)$, le seul candidat est $x = 8$.

Le signe de la dérivée seconde est donné par : $S''(x) = \frac{216}{(x-2)^3} > 0$ dans $(2, +\infty)$.

La fonction S est donc strictement convexe dans $(2, +\infty)$ et admet dès lors un minimum global en $x = 8$. Les dimensions du carton optimal sont données par $x = 8$ et $y = \frac{54}{6} + 3 = 12$.

EXERCICE 6

Énoncé

Considérons une boîte cylindrique à base circulaire dont les deux couvercles sont fabriqués à partir d'une plaque métallique qui coûte p_1 cents le cm^2 et dont la surface latérale est fabriquée à partir d'une autre plaque métallique qui coûte p_2 cents le cm^2 .

Quelles seront, en fonction des paramètres p_1 et p_2 , les dimensions de la boîte la moins chère ayant un volume de 100 cm^3 ?

Solution

Si r désigne le rayon de la base et h désigne la hauteur de la boîte, le volume est donné par : $V = \pi r^2 h$. En imposant la contrainte $V = 100$, on peut exprimer la hauteur en fonction du rayon : $100 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{100}{\pi r^2}$ et déterminer le coût de fabrication d'une boîte en fonction de son rayon :

$$C(r) = 2p_1(\pi r^2) + 2p_2\pi r h = 2p_1\pi r^2 + 2p_2\pi r \frac{100}{\pi r^2} = 2 \left(\pi p_1 r^2 + \frac{100p_2}{r} \right)$$

Le rayon optimal r^* doit vérifier la condition du premier ordre :

$$C'(r) = 2 \left(\pi p_1 r^2 + \frac{100 p_2}{r} \right)' = 2 \left(\pi 2 p_1 r - \frac{100 p_2}{r^2} \right)' = 0, \text{ qui implique que } r^* = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi} \cdot \frac{p_1}{p_2}} \text{ cm.}$$

D'autre part $\forall r > 0 : C''(r) > 0 \Rightarrow C$ admet en r^* un minimum global.

$$\text{La hauteur optimale correspondante est } h^* = \frac{100}{\pi (r^*)^2} = 100 \sqrt[3]{\frac{p_1^2}{2500 \pi p_2}} \text{ cm.}$$

On observe que seul le rapport des prix intervient dans la détermination des dimensions de la boîte la moins chère.

EXERCICE 7

Énoncé

Soit $C_i(x)$ le prix (en euro) d'une isolation d'épaisseur x visant à réduire la consommation en chauffage. On suppose que $C_i(x) = ax$, $a > 0$ (le prix de l'isolation croît proportionnellement à son épaisseur). Désignons ensuite par $C_{ch}(x)$ le coût annuel du chauffage lorsqu'une isolation d'épaisseur x est installée. Ce coût décroît évidemment avec x . Supposons, par exemple, que $C_{ch}(x) = \frac{b}{x}$, $b > 0$.

Quelle sera, en fonction du paramètre b , l'épaisseur x^* de l'isolation qui minimise le coût total (non actualisé) sur une période de 10 ans?

Solution

La fonction à minimiser est $C(x) = C_i(x) + 10C_{ch}(x) = ax + \frac{10b}{x}$, $x > 0$.

$$C'(x) = a - \frac{10b}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10b}{a}} \quad \text{et} \quad C''(x) = \frac{20b}{x^3} > 0.$$

Donc l'épaisseur optimale recherchée est $x^* = \sqrt{\frac{10b}{a}}$.

EXERCICE 8

Énoncé

Le profit qu'une firme cherche à maximiser est égal à son revenu moins son coût de production : $\pi(q) = R(q) - C(q)$, où q désigne la quantité produite.

- Montrez qu'au niveau optimal de production q^* , le coût marginal (dérivée de la fonction de coût) est égal au revenu marginal (dérivée de la fonction de revenu).
- Déterminez le niveau optimal de production q^* pour les fonctions de revenu et coût suivantes :

$$R(q) = 179q - 3q^2 \quad \text{et} \quad C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 10q + 4$$

Solution

a Par définition : $\pi(q) = R(q) - C(q)$.

Donc si q^* maximise le profit π , la condition du premier ordre impose que :

$$\pi'(q^*) = R'(q^*) - C'(q^*) = 0, \quad \text{et donc } R'(q^*) = C'(q^*).$$

b Dans ce cas, le profit vaut : $\pi(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 169q - 4$. En vertu de la condition du premier ordre, on a : $\pi'(q) = -q^2 + 169 = 0$ et $q > 0 \Rightarrow q = 13$. Comme $\pi''(q) = -2q < 0$, la production optimale est donc $q^* = 13$ et le profit maximal est $\pi(13) = 1\,460,67$.

EXERCICE 9

Énoncé

Une firme en position de monopole fait face à deux fonctions de demande pour le même produit, émanant de deux marchés distincts : $q_1 = 40 - 2p_1$ et $q_2 = 20 - \frac{1}{2}p_2$. Sachant que le coût de production est de $C = 25 + 4q$ où $q = q_1 + q_2$, déterminez, dans chacun des cas suivants, le prix qui maximise le profit de la firme.

a La firme pratique une discrimination de prix entre les deux marchés.

b La firme pratique un prix unique sur les deux marchés.

Solution

a Le revenu du premier marché au prix p_1 est $R_1(q_1) = p_1 q_1 = \frac{1}{2}(40 - q_1)q_1 = 20q_1 - \frac{1}{2}q_1^2$ et le revenu du second au prix p_2 est $R_2(q_2) = p_2 q_2 = 2(20 - q_2)q_2 = 40q_2 - 2q_2^2$.

D'après l'exercice 8 **a**, on égale le coût marginal de la firme à chacun des deux revenus marginaux (maximisation séparée sur chaque marché) pour obtenir :

$$C'(q_1) = R'_1(q_1) \Rightarrow 4 = 20 - q_1 \Rightarrow q_1 = 16$$

et

$$C'(q_2) = R'_2(q_2) \Rightarrow 4 = 40 - 4q_2 \Rightarrow q_2 = 9.$$

Les prix correspondants sont $p_1 = \frac{1}{2}(40 - 16) = 12$ et $p_2 = (40 - 18) = 22$.

b S'il n'y a pas de discrimination entre les deux marchés, alors $p_1 = p_2 = p$ et la fonction de la demande globale est $q = q_1 + q_2 = 40 - 2p + 20 - \frac{1}{2}p = 60 - \frac{5}{2}p$.

Il s'ensuit que $R(q) = pq = \frac{2}{5}(60 - q)q = 24q - \frac{2}{5}q^2$ le prix qui maximise le profit de la firme est tel que $C'(q) = R'(q) \Rightarrow 4 = 24 - \frac{4}{5}q \Rightarrow q = 25$. Le prix est alors $p = \frac{2}{5}(60 - 25) = 14$.