

Les fonctions d'une seule variable

Les fonctions d'une seule variable	
1. Limites de fonctions	52
2. Continuité	58
3. Asymptotes	61
4. Dérivabilité	64
5. Théorème de Taylor	69
6. Caractéristiques des fonctions d'une variable	70
Problèmes et exercices	75
Limites de fonctions	75
Continuité	80
Asymptotes	83
Dérivabilité	85
Théorème de Taylor	91
Fonctions croissantes, décroissantes, concaves et convexes	93
Applications à la gestion	95

Les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définies dans le chapitre 1, constituent la manière naturelle d'exprimer la dépendance d'une grandeur par rapport à une autre.

Les modèles de la gestion quantitative sont évidemment basés sur des fonctions, puisque les variables aussi diverses que le chiffre d'affaire, le bénéfice, le coût des infrastructures, etc., dépendent, entre autres, de facteurs tels que les prix des inputs, le niveau des ventes, le taux d'intérêt du marché, etc.

En gestion, comme ailleurs, toute formalisation repose sur une réduction de la complexité inhérente au phénomène étudié. Afin de mettre en exergue l'essentiel, la représentation sous forme de modèle mathématique néglige inmanquablement certains aspects périphériques. La difficulté réside donc dans le choix des facteurs pertinents, c'est-à-dire ceux qui doivent absolument figurer dans la spécification. Ce choix varie d'un modèle à l'autre, comme varient les hypothèses relatives aux fonctions qui en constituent le cadre formel.

Dans la réalité, les éléments chiffrés qui interviennent dans la prise de décision des gestionnaires sont très souvent simultanément liés à de nombreux facteurs. Par exemple, le coût de production dépend du prix de tous les *inputs* nécessaires à l'entreprise, l'utilité du consommateur varie selon les quantités des divers biens accessibles. Naturellement, pour traiter ces questions, les mathématiques offrent le cadre de la théorie des fonctions de plusieurs variables, abordée dans les deux derniers chapitres de cet ouvrage. Néanmoins, cette théorie a pour préalable indispensable celle, plus simple, des fonctions d'une variable, présentée ici, qui offre une première approche de la notion de dépendance.

Dans le domaine de la dynamique en temps continu, la représentation en fonction d'une seule variable développée dans ce chapitre s'impose. En effet, lorsque l'unique variable réelle prise en compte représente la date, toute fonction correspondante décrit une évolution. Ainsi, les trajectoires de taux de change ou d'indices boursiers s'expriment volontiers sans référence à une autre variable dépendante. Toutefois, il nous faut bien reconnaître que la modélisation financière dont relèvent ces deux exemples, fait le plus souvent appel au cadre, lui aussi plus complexe, des processus stochastiques traitant de l'évolution de variables aléatoires.

En résumé, la théorie des fonctions d'une variable offre une première entrée dans le monde de la dépendance entre variables quantitatives. De par sa grande simplicité, l'utilisation en gestion de cette théorie reste limitée à quelques exemples élémentaires, mais l'assimilation des notions de ce chapitre conditionne la compréhension de la plupart des concepts plus sophistiqués des chapitres 7 et 8 qui font la richesse des modèles rencontrés dans la pratique. Qu'on ne s'y trompe pas, la matière présentée dans ce qui suit constitue un véritable sésame dans la voie du calcul différentiel et de son corollaire, l'optimisation.

1 Limites de fonctions

1.1 DOMAINES D'EXAMEN DES LIMITES : D' , D'_G ET D'_D

Dans le chapitre 1, la notion de fonction de A dans B (où $A, B \subset \mathbb{R}$) a été définie et l'écriture suivante a été adoptée : $f : A \rightarrow B : x \rightarrow f(x)$.

Par définition, chaque élément de A possède une image dans B . En pratique, l'ensemble B ne doit pas forcément être minimal, c'est-à-dire coïncider avec l'image de A par f . Dans plusieurs applications, seul le fait que la fonction est à valeurs réelles constitue une information pertinente (Une exception notable concerne la détermination du caractère injectif et/ou surjectif d'une fonction, qui a été abordée dans le chapitre 1). Dès lors, par souci de simplicité, nous indiquerons généralement l'ensemble \mathbb{R} en lieu et place de B .

À l'inverse, le contenu précis de l'ensemble A est crucial pour la suite de l'analyse. En effet, A ne peut pas contenir de points où la fonction ne serait pas définie. Par exemple, la fonction qui associe à la variable x sa racine carrée \sqrt{x} n'est pas définie pour les nombres strictement négatifs. Dans ce cas, l'ensemble A doit donc être un sous-ensemble de \mathbb{R}^+ . D'autre part, il se peut que pour des raisons d'interprétation des variables, certaines valeurs doivent également être écartées. Ainsi, lorsque la variable x représente un coefficient de pondération, elle doit se situer obligatoirement dans l'intervalle $[0, 1]$. La prise en compte de ces deux types de contraintes amène à délimiter le domaine, dorénavant noté D , de la fonction considérée. Sauf mention contraire, nous adopterons donc la notation suivante :

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) \quad \text{où } D \subset \mathbb{R}.$$

La notion de limite de fonction permet de définir la continuité et la dérivabilité qui, elles-mêmes, ouvrent la voie vers des théorèmes relatifs aux extrema. Les extrema (minima et maxima) de fonctions se situent au coeur de nombreux problèmes économiques et de gestion : le consommateur maximise sa fonction d'utilité, l'entreprise maximise son bénéfice ou minimise ses coûts, etc.

La limite bilatérale d'une fonction en un point indique le comportement de cette fonction « aussi près que l'on veut » du point désigné, sauf au point lui-même. Pour définir

ce concept, il est donc indispensable que le domaine de la fonction offre la possibilité « d'encercler » le point, mais sans que ce point fasse obligatoirement partie du domaine. Ainsi, une fonction définie dans l'intervalle $[0, 1]$ n'admettra pas de limite en 0, ni en 1. Par contre, il est concevable qu'une limite existe en 1 lorsque le domaine est $[0, 2] \setminus 1$.

Définition Le domaine d'examen des limites bilatérales, noté D' , est donné par :

$$D' = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\} \subset D\}. \quad \square$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on parle volontiers de « limite » pour désigner une « limite bilatérale ». En pratique, D' est déterminé à partir de D en enlevant les « bords » et en ajoutant les « trous ». Par extension, on définit les domaines d'examen des limites unilatérales.

Définitions

- Le domaine d'examen des limites à gauche, noté D'_G , est donné par :

$$D'_G = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x - \delta, x) \subset D\}.$$

- Le domaine d'examen des limites à droite, noté D'_D , est donné par :

$$D'_D = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x, x + \delta) \subset D\}. \quad \square$$

Exemple

Soit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2x$.

- Si $a \in (0, 1)$, on peut tendre vers a (approcher a d'aussi près que l'on veut), aussi bien par la droite que par la gauche, tout en restant dans le domaine $D = [0, 1] \Rightarrow \forall a \in (0, 1) : a \in D'$.
- Si $a = 0$, on ne peut tendre vers a que par la droite puisque les points situés à gauche de a n'appartiennent pas au domaine $D \Rightarrow 0 \in D'_D$ mais $0 \notin D'$.
- Si $a = 1$, on ne peut tendre vers a que par la gauche $\Rightarrow 1 \in D'_G$ mais $1 \notin D'$.
- Si $a \notin [0, 1]$, on ne peut pas approcher a d'aussi près que l'on veut, ni par la droite, ni par la gauche tout en restant dans le domaine. On en conclut que $D' = (0, 1)$, $D'_D = [0, 1)$, $D'_G = (0, 1]$.

L'exemple précédent fait apparaître que seul le domaine D est utilisé pour déterminer D' , D'_D et D'_G . L'expression analytique de la fonction a cependant joué un rôle en amont pour fixer D .

De plus, notons que $D'_G \cap D'_D = D'$.

1.2 LES NOTIONS DE LIMITES

Définitions de base

Suivant la logique mise en œuvre dans l'introduction des trois domaines d'examen des limites, les trois définitions suivantes présentent respectivement la limite bilatérale et les deux limites unilatérales.

Définitions Considérons la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ et le nombre réel $b \in \mathbb{R}$.

- Premier cas : $a \in D'$.

f a pour limite (bilatérale) b lorsque x tend vers a , ce qu'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left. \begin{array}{l} x \in (a - \eta, a + \eta) \setminus \{a\} \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

- Deuxième cas : $a \in D'_D$.

f a pour limite à droite b , lorsque x tend vers a , ce qu'on note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left. \begin{array}{l} x \in (a, a + \eta) \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

- Troisième cas : $a \in D'_G$.

f a pour limite à gauche b , lorsque x tend vers a , ce qu'on note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left. \begin{array}{l} x \in (a - \eta, a) \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad \square$$

Comme $|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, la première définition (par exemple) s'interprète de la manière suivante : on peut toujours trouver un intervalle centré autour de a tel que toutes les images des points de cet intervalle soient situées aussi près que l'on veut de b .

Exemple

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ et } a = 0.$$

$D = \mathbb{R} \Rightarrow D' = \mathbb{R}$ et la $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ peut être considérée.

Toutefois, le comportement de f (voir figure 3.1, page ci-contre) est différent à gauche et à droite de 0. Les limites à gauche et à droite sont données par : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et

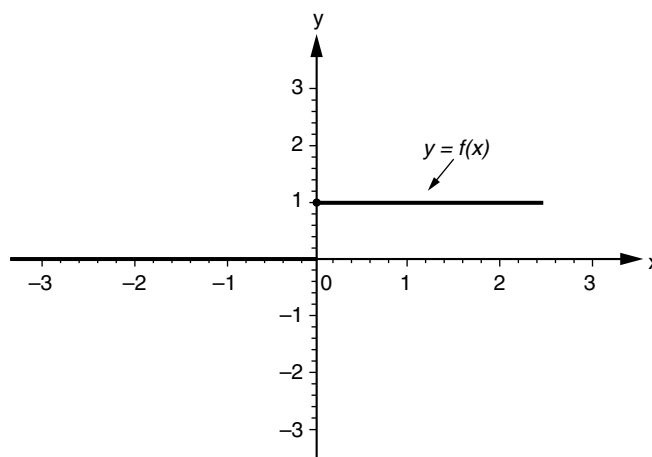
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Le lien entre les limites bilatérales et unilatérales est donné par la propriété suivante qui permet notamment d'établir formellement la non-existence de la limite bilatérale $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ dans l'exemple ci-dessus.

Propriété $\forall a \in D' = D'_G \cap D'_D : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \in \mathbb{R}.$ □

Toute valeur connue d'une limite bilatérale est immédiatement interprétable comme la valeur commune des deux limites unilatérales.

Figure 3.1



Si une des limites unilatérales n'existe pas ou si les deux limites unilatérales sont distinctes, alors la limite bilatérale n'existe pas. Cela permet d'étudier la limite bilatérale en des points charnières comme dans l'exemple ci-dessus où $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \nexists$.

Exemple

Pour la fonction définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Extensions des définitions

La première extension concerne les limites pour $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$.

Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$, où D contient une demi-droite $(-\infty, p)$ (resp. une demi-droite $(p, +\infty)$) et $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ \text{(resp. } x \rightarrow +\infty)}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \text{ tel que :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x < -K \text{ (resp. } x > K) \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad \square$$

Exemple

$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$. $D = \mathbb{R}_0^+$ contient la demi-droite $(0, +\infty)$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

En effet, selon la définition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 : \left. \begin{array}{l} x > K \\ x \in \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon.$

$$\text{Or } \left| \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ (car } x \in \mathbb{R}_0^+ \text{)}.$$

Il suffit alors de prendre $K = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ pour obtenir $K > 0$ et $x > K \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

La seconde extension concerne les limites infinies. Leur définition s'apparente à celle des limites infinies de suites, mais, du fait de la variété des possibilités au niveau des fonctions, plusieurs cas doivent être scindés.

Définitions

- Premier cas : $a \in D'$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ \text{(resp. } -\infty) \end{matrix} \text{ si } \forall L > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (a - \eta, a + \eta) \setminus \{a\} \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) > L \\ \text{(resp. } f(x) < -L) \end{array} .$$

- Deuxième cas : $a \in D'_G$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ \text{(resp. } -\infty) \end{matrix} \text{ si } \forall L > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (a - \eta, a) \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) > L \\ \text{(resp. } f(x) < -L) \end{array} .$$

(et de façon analogue pour la limite à droite).

- Troisième cas : $D \supset (-\infty, p)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ \text{(resp. } -\infty) \end{matrix} \text{ si } \forall L > 0, \exists K > 0 \text{ tel que :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x < -K \\ x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) > L \\ \text{(resp. } f(x) < -L) \end{array} .$$

(et de façon analogue pour la limite pour $x \rightarrow +\infty$). □

1.3 LIEN ENTRE LIMITES DE FONCTIONS ET LIMITES DE SUITES

Deux propriétés font le lien entre les limites de fonctions et de suites. En premier, le théorème de transfert, énoncé ci-dessous, est utilisé en pratique pour montrer la non-existence de limites de fonctions.

Théorème de transfert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall$ suite $(x_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{N}_0 : x_t \in D \setminus \{a\} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = a \end{array} \right. \text{ on a : } \lim_{t \rightarrow \infty} f(x_t) = b. \quad \square$$

Moyennant des changements évidents de formulation, on peut étendre ce théorème aux limites unilatérales, aux limites pour $x \rightarrow \pm\infty$ et aux limites infinies.

En pratique, pour montrer à l'aide de ce théorème que la $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas, on construira deux suites, $(x_t^{(1)})$ et $(x_t^{(2)})$, convergeant vers a et telles que $\forall t \in \mathbb{N}_0$: $x_t^{(1)}, x_t^{(2)} \in D \setminus \{a\}$, mais dont les limites des images sont telles que : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x_t^{(1)}) = u$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x_t^{(2)}) = v \neq u$.

Exemple

Montrons par le théorème de transfert que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} \right) \nexists$.

Les suites définies par $x_t^{(1)} = \frac{1}{2t\pi}$ et $x_t^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2t\pi}$ convergent toutes deux vers 0. En outre, les suites images sont telles que : $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(2t\pi) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\pi\right) = 1 \neq 0$. Ce qui établit le résultat de non-existence.

Propriété Si la suite réelle $(u_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ et la fonction $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ sont telles que $\forall t \in \mathbb{N}_0 : f(t) = u_t$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} u_t = a$. \square

Cette propriété sert à déterminer la valeur d'une limite de suite à partir de la limite pour $x \rightarrow +\infty$ d'une fonction dont le graphe passe par les points de la suite. Cette propriété permet notamment de lever des indéterminations dans les limites de suites, en faisant appel à la règle de l'Hospital (voir section 4.5.) qui s'applique uniquement aux limites de fonctions.

Exemple

Après avoir montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (voir exercice 8 **b**), la propriété permettra d'affirmer que la suite $\left(\frac{\sin t}{t} \right)_{t \in \mathbb{N}_0}$ converge vers 0.

1.4 AUTRES PROPRIÉTÉS DES LIMITES DE FONCTIONS

Les règles de calcul dans \mathbb{R} et dans $\overline{\mathbb{R}}$ des limites de fonctions, qu'elles soient bilatérales, unilatérales ou pour $x \rightarrow \pm\infty$, sont identiques à celles présentées au chapitre 2 (section 2) pour les limites de suites.

Exemple

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ impliquent que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty$.

Limites des fonctions composées

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,
alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$. \square

Exemple

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} x^2 = \pi$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = \cos \pi = -1$ impliquent que $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} \cos x^2 = -1$.

Principe du « pincement » Si f , g et h sont des fonctions telles que :
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, et si $\exists \eta > 0, \forall x \in (a - \eta, a + \eta) \setminus \{a\} : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$. \square

Moyennant des changements évidents de formulation, on peut étendre les propriétés citées aux limites unilatérales et aux limites pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Comme dans le chapitre 2, cette règle affirme l'existence d'une limite (et en donne la valeur). Pour l'utiliser, il faut, dans un voisinage du point a , encadrer la fonction dont on cherche la limite par deux fonctions qui tendent vers la même valeur.

Exemple

Appliquons la règle du pincement pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$. Notons qu'un exemple précédent (section 1.3) a établi que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} \right)$ n'existe pas. La règle de calcul relative au produit des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ n'est donc pas applicable ici. Par contre, le principe du pincement permet de prouver le résultat. En effet : $\forall x \in \mathbb{R}_0 : -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ et
 $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$.

2 Continuité

2.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

La continuité représente le premier niveau de régularité des fonctions. On définit d'une part la continuité en un point, d'autre part la continuité dans un domaine. Intuitivement, une fonction est continue dans un ensemble D si on peut tracer son graphe, pour les valeurs d'abscisses dans D , sans lever le crayon, sous réserve que D soit convexe et qu'en conséquence il n'y ait pas de sous-domaines déconnectés.

La définition générale est plus large et s'applique à tous les domaines possibles. Elle s'appuie sur les concepts de limites présentés dans la section précédente.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$.

- f est continue en $a \in (D' \cap D)$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;
- f est continue à gauche en $a \in (D'_G \cap D)$ si $\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} a} f(x) = f(a)$;
- f est continue à droite en $a \in (D'_D \cap D)$ si $\lim_{x \underset{>}{\rightarrow} a} f(x) = f(a)$. \square

La propriété suivante découle directement de celles des limites.

Propriété Soit $a \in (D' \cap D)$.

f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en a . □

Exemples

$$1. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0. \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 3 \Rightarrow f$ n'est pas continue à gauche en $0 \Rightarrow f$ n'est pas continue en 0 .

La fonction est cependant continue à droite en $0 : \lim_{x \searrow 0} f(x) = 3 = f(0)$.

$$2. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} (1 - x) = 0 = f(1) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} (x - 1)$. La fonction est donc continue en 1 .

La continuité dans un domaine exige que la fonction présente toutes les continuités possibles (unilatérales, et donc aussi bilatérales) dans ce domaine.

Définition La fonction f est *continue dans* D si elle vérifie toutes les conditions suivantes :

- (i) $\forall a \in (D' \cap D) : f$ est continue en a ;
- (ii) $\forall a \in ((D'_G \setminus D') \cap D) : f$ est continue à gauche en a ;
- (iii) $\forall a \in ((D'_D \setminus D') \cap D) : f$ est continue à droite en a . □

En conséquence, pour des domaines qui sont des intervalles ouverts ou fermés, on a la propriété suivante.

Propriété

- f est continue dans (c, d) si $\forall a \in (c, d) : f$ est continue en a .
- f est continue dans $[c, d]$ si f est continue dans (c, d) , f est continue à droite en c et f est continue à gauche en d . □

Définition Le *domaine de continuité* de f est le plus grand sous-ensemble de D dans lequel f est continue, il est noté DC . On a évidemment : $DC \subset D$. □

Exemples

$$1. f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \ln x.$$

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}_0^+ : f$ est continue en $a \Rightarrow f$ est continue dans $\mathbb{R}_0^+ \Rightarrow DC = \mathbb{R}_0^+$.

2. $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x}$.

$$\forall a \in (0, 1) : \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} = f(a) \Rightarrow \forall a \in (0, 1) : f \text{ est continue en } a.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1 = f(1) \Rightarrow f$ est continue à gauche en 1. Donc, f est continue dans $(0, 1]$ et $DC = (0, 1]$.

Notons que, comme $0 \notin D$, on ne se préoccupe pas de la $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2.2 FONCTIONS DE RÉFÉRENCE : LIMITES ET CONTINUITÉ

Lors la résolution des exercices, les limites évidentes relatives aux fonctions élémentaires seront supposées connues (sauf dans les exercices 1 et 2 qui en établissent certaines). Ces résultats concernent les fonctions puissances, sinus, cosinus, logarithme et exponentielle. Dans les deux derniers cas, rappelons que :

Si $a > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Si $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$$

En outre, on supposera dorénavant acquise la continuité des fonctions élémentaires suivantes dans leurs domaines de définition :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow b, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x,$$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ où } D \text{ est déterminé selon } \alpha,$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow a^x \ (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}), f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \log_a x \ (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}),$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin x, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \cos x.$$

À partir de là, les règles de calcul des limites dans \mathbb{R} permettent de déduire la continuité des fonctions sommes, produits et composées de fonctions continues.

2.3 MÉTHODE PRATIQUE DE L'ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Les diverses propriétés vues permettent de dresser une procédure pratique pour l'étude de la continuité d'une fonction donnée, dans un domaine D prédéfini.

- (i) Si la fonction est donnée par une seule expression analytique, décomposer f en somme, produit et/ou composée de fonctions dont le domaine de continuité est connu.
- (ii) Si la fonction est définie par plusieurs expressions analytiques (explicitement ou implicitement), appliquer d'abord (i) sur les plus grands sous-ensembles ouverts de D , puis étudier la continuité en le(s) point(s) charnière(s) à l'aide du calcul de limites.

Attention, il ne faut pas oublier de considérer les éventuels bords du domaine.

Exemples

$$1. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \text{signe}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dans $(-\infty, 0)$ et dans $(0, +\infty)$, f est constante donc continue. Il reste à étudier le point charnière 0 où $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq f(0) = 0$. Donc, f n'est pas continue à gauche en 0 $\Rightarrow f$

n'est pas continue en 0.

En conclusion, $DC = \mathbb{R}_0$.

$$2. f : [-8, 5) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} |2x - 2\pi| & \text{si } x \leq \pi \\ \frac{x \sin x}{\cos x + \sqrt{2}} & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Dans $[-8, \pi)$, f est continue comme composée et somme de fonctions continues dans \mathbb{R} et donc dans ses sous-ensembles. Notons au passage que la continuité à droite en -8 découle immédiatement du fait que la fonction $|2x - 2\pi|$ est continue dans \mathbb{R} .

Comme $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x + \sqrt{2} \neq 0$, dans $(\pi, 5)$, f est continue comme produit de x , $\sin x$ et $\frac{1}{\cos x + \sqrt{2}}$, qui sont toutes continues dans \mathbb{R} et donc dans ses sous-ensembles.

Enfin, f est continue en le point charnière π , puisque f est continue à gauche et à droite en π . En effet, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} |2x - 2\pi| = 2\pi - 2\pi = 0 = f(\pi) \Rightarrow f$ est continue à gauche en π .

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x \sin x}{\cos x + \sqrt{2}} = \frac{\pi \sin \pi}{\cos \pi + \sqrt{2}} = 0 = f(\pi) \Rightarrow f \text{ est continue à droite en } \pi.$$

En conclusion, $DC = D = [-8, 5)$.

2.4 THÉORÈME DU POINT FIXE DE BROUWER

Plusieurs problèmes économiques, notamment en théorie de l'équilibre général, amènent à rechercher les points fixes d'une fonction, c'est-à-dire les points laissés invariants par la fonction.

Définition Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$. Le point $a \in D$ est appelé *point fixe* de f si $f(a) = a$. \square

Théorème de Brouwer Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b] : x \rightarrow f(x)$ est continue dans $[a, b]$, alors : $\exists c \in [a, b] : f(c) = c$. \square

Le théorème du point fixe de Brouwer affirme l'existence (mais pas l'unicité) d'un point fixe lorsque la fonction est continue dans un intervalle fermé et que les images se situent dans ce même intervalle.

3 Asymptotes

La fonction f admet une asymptote lorsque son graphe tend vers une droite, dénommée alors *asymptote* de la fonction. Deux types de limites peuvent conduire à une asymptote. D'une part, une limite unilatérale infinie en un point de $D'_D \cup D'_G$ se traduit par l'existence d'une asymptote verticale. D'autre part, lorsque le graphe de la fonction tend vers une droite pour $x \rightarrow \pm\infty$, on parlera, selon le cas, d'une asymptote horizontale ou oblique.

Définition La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ admet une *asymptote verticale* à gauche (resp. à droite) en $a \in D'_D$ (resp. en $a \in D'_G$), notée $AV \equiv x = a$, si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$). \square

Notez que l'asymptote à droite est obtenue à l'aide d'une limite à gauche, et vice-versa, pour indiquer la position de l'asymptote par rapport au graphe de la fonction.

Remarques

- Une asymptote à droite et à gauche est dite bilatérale. Toutefois, l'existence de la limite bilatérale dans \mathbb{R} n'est pas nécessaire pour obtenir une asymptote bilatérale. En effet, on peut avoir, par exemple, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.
- Si $a \in DC$, la $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe automatiquement dans \mathbb{R} , et il n'y aura jamais d'asymptote verticale en a . Pour trouver les éventuelles asymptotes verticales d'une fonction, il suffit donc d'examiner les limites aux points de $(D'_D \cup D'_G) \setminus DC$.

Les asymptotes horizontales et/ou obliques concernent le comportement de la fonction lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, sous réserve que le domaine permette de considérer de telles limites.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$, où D contient une demi-droite $(-\infty, p)$ (resp. $(p, +\infty)$).

- f admet une *asymptote horizontale* à gauche (resp. à droite), notée $AH \equiv y = b$, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$).
- f admet une *asymptote oblique* à gauche (resp. à droite), notée $AO \equiv y = ax + b$, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}_0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}_0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$). \square

Remarque

Si f admet une AH à gauche (resp. à droite), elle n'admettra pas d'AO à gauche (resp. à droite), et réciproquement.

Les exemples suivants montrent la marche à suivre pour la détermination des asymptotes.

Exemples

1. $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x}$.

Recherche d'asymptotes verticales :

$D'_D = \mathbb{R}^+$, $D'_G = \mathbb{R}_0^+ = DC \Rightarrow (D'_D \cup D'_G) \setminus DC = \{0\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow AV \equiv x = 0$ à gauche.

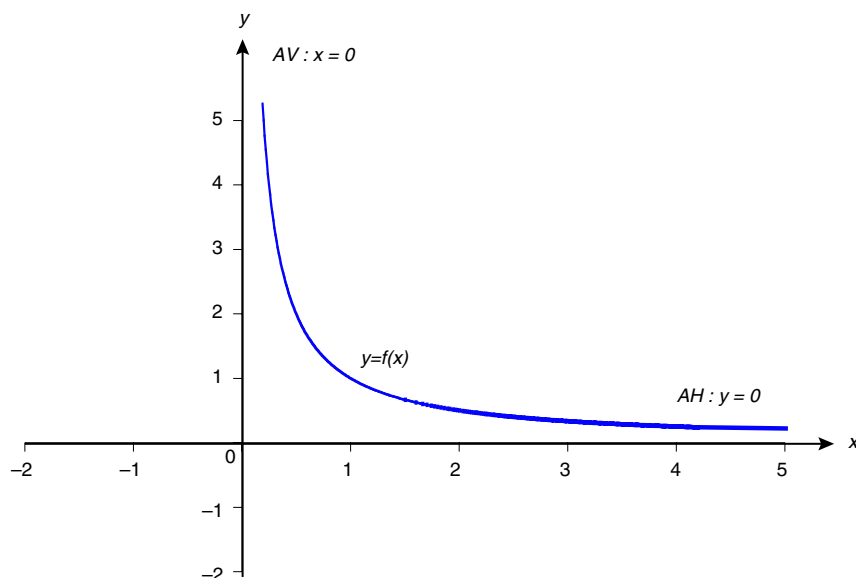
Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

$D = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \nexists \text{AH à gauche et } \nexists \text{AO à gauche.}$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{AH} \equiv y = 0 \text{ à droite} \Rightarrow \nexists \text{AO à droite.}$

En outre, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+.$ Le graphe est donc situé au-dessus de l'AH (voir figure 3.2).

Figure 3.2



2. $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}.$

Recherche d'asymptotes verticales :

$$D'_D = D'_G = \mathbb{R}, DC = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \Rightarrow (D'_D \cup D'_G) \setminus DC = \{1, -1\},$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = \pm\infty \Rightarrow \text{AV} \equiv x = 1 \text{ (bilatérale)}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = \mp\infty \Rightarrow \text{AV} \equiv x = -1 \text{ (bilatérale)}.$$

Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \supset (-\infty, -2) \text{ et } (2, +\infty)$$

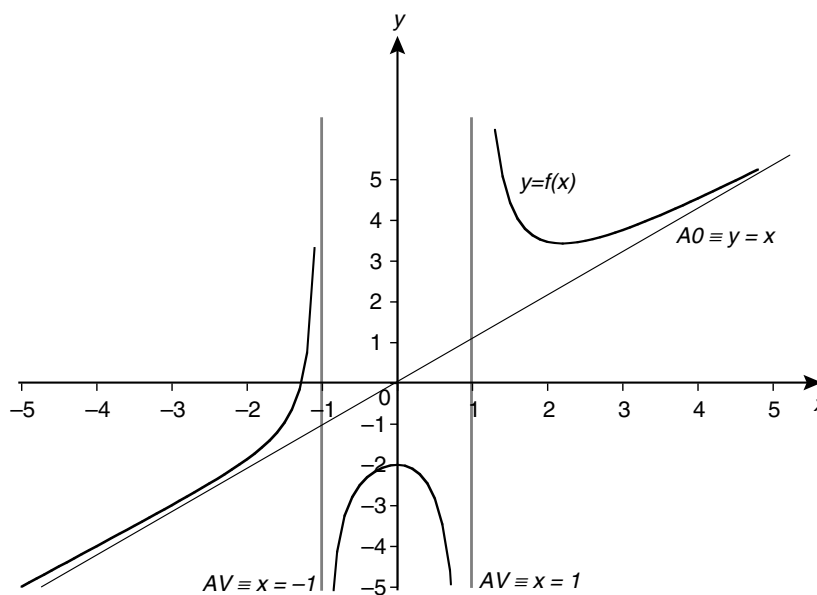
$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = \mp\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow \nexists \text{AH}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - x} = 1 \in \mathbb{R}_0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x^3 + 2 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = 0$$

$\Rightarrow \text{AO} \equiv y = x$ bilatérale (voir figure 3.3, page suivante).

Figure 3.3



4 Dérivabilité

Les dérivées jouent un rôle fondamental dans l'étude de la variation des fonctions. Au plan théorique, elles permettent d'aborder la caractérisation des fonctions monotones et la détermination des extrema. Au plan appliqué, elles conduisent à la formalisation de notions aussi importantes que la vitesse et l'accélération en physique, le coût marginal ou l'utilité marginale en gestion.

4.1 DÉFINITIONS

Avant de calculer la dérivée d'une fonction, il convient d'examiner si la fonction est suffisamment régulière. Ainsi, on définira les notions de dérivabilités unilatérale et bilatérale en un point et dans un ensemble, ce qui conduira au domaine de dérivabilité. La notion de dérivée repose sur la limite du taux de variation. Des propriétés et des règles pratiques sont également fournies pour en faciliter le calcul.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$.

- f est dérivable en $a \in (D' \cap D)$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \exists$ dans \mathbb{R} . Dans ce cas, cette limite est appelée *dérivée* de f en a et est notée $f'(a)$.
- f est dérivable à gauche (resp. à droite), en $a \in (D'_G \cap D)$, (resp. $a \in (D'_D \cap D)$), si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (<)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \exists$ dans \mathbb{R} . Dans ce cas, cette limite est appelée *dérivée à gauche* (resp. à droite) de f en a et est notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

- f est dérivable dans D si toutes les conditions suivantes sont remplies :
 - (i) $\forall a \in (D' \cap D) : f$ est dérivable en a ;
 - (ii) $\forall a \in ((D'_G \setminus D') \cap D) : f$ est dérivable à gauche en a ;
 - (iii) $\forall a \in ((D'_D \setminus D') \cap D) : f$ est dérivable à droite en a .
- Le domaine de dérivabilité de f , noté DD , est le plus grand sous-ensemble de D dans lequel f est dérivable.
- La fonction dérivée de f est la fonction $f' : DD \cap D' \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f'(x)$. □

4.2 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA DÉRIVÉE

Lorsqu'elle existe, la dérivée $f'(a)$ est le coefficient angulaire de la tangente T_a au graphe de la fonction au point d'abscisse a , dont l'équation est : $T_a \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x$.

On a : $D = D' = \mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1 \in \mathbb{R}$. f est donc dérivable dans $\mathbb{R} : DD = \mathbb{R}$ et $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 1$.

En tout point $a \in \mathbb{R}$, la tangente, $T_a \equiv y = x$, coïncide avec le graphe de la fonction.

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Cette fonction est définie et continue dans \mathbb{R} , mais :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \Rightarrow f'_g(0) = -1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow f'_d(0) = 1.$$

La fonction f est donc dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

$$DD = \mathbb{R}_0 \text{ et } f' : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^- : T_a \equiv y = -x \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}_0^+ : T_a \equiv y = x.$$

4.3 FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

On supposera dorénavant acquise la dérivabilité des fonctions de référence suivantes dans leurs domaines respectifs, ainsi que les expressions de leurs dérivées :

$f(x)$	D	$f'(x)$	$f(x)$	D	$f'(x)$
b	\mathbb{R}	0	x^α	\mathbb{R} ou \mathbb{R}_0	$\alpha x^{\alpha-1}$
			$(\alpha \in \mathbb{Q})$		
e^x	\mathbb{R}	e^x	$\ln x$	\mathbb{R}_0^+	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$	$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

4.4 PROPRIÉTÉS

Les notions de continuité et de dérivabilité sont liées de manière très simple.

Propriétés

- f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a .
- f est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a \Rightarrow f$ est continue à droite (resp. à gauche) en a . \square

On a donc $DD \subset DC \subset D$. Notons que les réciproques de ces propriétés sont fausses. Par exemple, la fonction « valeur absolue » est continue mais non dérivable en 0.

Propriété f est dérivable en $a \in D \cap D' \Leftrightarrow f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont égales. \square

La dérivabilité de chaque côté ne suffit pas à garantir la dérivabilité en un point. Ainsi, les points en lesquels la fonction est dérivable à gauche et à droite, sans être dérivable (dérivées à gauche et à droite distinctes), sont appelés des « points anguleux », parce que les deux « demi-tangentes » unilatérales forment un angle.

Règles de calcul des dérivées

- Si f et g sont dérivables en a , alors :
 - $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f$ est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;
 - $(f + g)$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
 - $(f \cdot g)$ est dérivable en a et $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;
 - Si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
 - Si $f(a) > 0$, f^g est dérivable en a et

$$[f(a)^{g(a)}]' = f(a)^{g(a)} \left(g'(a) \ln f(a) + g(a) \frac{1}{f(a)} f'(a) \right).$$

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$. \square

Ces propriétés s'étendent à la dérivabilité à gauche (resp. à droite).

En pratique, l'étude de la dérivabilité d'une fonction s'effectue selon la même démarche que celle de la continuité. En outre, la dérivabilité est d'emblée exclue en les points où la fonction est discontinue. S'ajoute ici le calcul de la fonction dérivée.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x|$. $DC = \mathbb{R}, DD = \mathbb{R}_0$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \text{signe}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $DC = DD = \mathbb{R}_0$.
3. $f : [-8, 5) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} |2x - 2\pi| & \text{si } x \leq \pi \\ \frac{x \sin x}{\cos x + \sqrt{2}} & \text{si } x > \pi \end{cases}$. $DC = [-8, 5)$ et $DD = [-8, 5) \setminus \{\pi\}$.

En effet, dans $[-8, \pi)$, f est dérivable comme composée d'un polynôme, dérivable dans \mathbb{R} , et de $|x|$ dérivable dans \mathbb{R}_0 . Dans $(\pi, 5)$, f est dérivable comme quotient de $x \sin x$, dérivable dans \mathbb{R} en tant que produit de fonctions de référence dérivables dans \mathbb{R} , et de $\cos x + \sqrt{2}$, dérivable dans \mathbb{R} en tant que somme non nulle de fonctions de référence dérivables dans \mathbb{R} . Au point charnière π :

- $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|2x - 2\pi| - 0}{x - \pi} = 2 \frac{\pi - x}{x - \pi} = -2 \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f$ est dérivable à gauche en π et $f'_g(\pi) = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x \cdot \sin x - 0}{(\cos x + \sqrt{2})(x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-x \cdot \sin(\pi - x)}{(\cos x + \sqrt{2})(\pi - x)}$
 $= \frac{-\pi}{-1 + \sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} - 1} \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f$ est dérivable à droite en π et $f'_d(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2} - 1} \neq f'_g(\pi)$.

Donc, f admet un point anguleux en π .

4. Considérons la fonction $(\text{tg } x)^{\cos x}$ dans un domaine D tel que $\forall x \in D : \text{tg } x > 0$.

$$\begin{aligned} \forall x \in D' : [(\text{tg } x)^{\cos x}]' &= (\text{tg } x)^{\cos x} \left[-(\sin x) \ln(\text{tg } x) + \cos x \frac{1}{\text{tg } x} \frac{1}{\cos^2 x} \right] \\ &= (\text{tg } x)^{\cos x} \left[\frac{1}{\sin x} - (\sin x) \ln(\text{tg } x) \right]. \end{aligned}$$

4.5 LA RÈGLE DE L'HOSPITAL

La règle de l'Hospital est utile pour lever des indéterminations qui se présentent dans les calculs de limites de fonctions. Elle est, au départ, formulée pour le cas « $\frac{0}{0}$ », mais elle s'adapte simplement à toutes les formes indéterminées.

Règle de l'Hospital Soit $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow g(x)$ et $a \in (D'_1 \cap D'_2)$.

Si :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;

(ii) $\exists \eta > 0 : f$ et g sont dérivables dans $(a - \eta, a + \eta) \setminus \{a\}$;

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$;

alors : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Moyennant des modifications évidentes de formulation, ce résultat est également applicable aux limites unilatérales et pour $x \rightarrow \pm\infty$.

L'hypothèse (i) fait référence à la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». En fait, la règle s'adapte également aux autres formes indéterminées de la manière suivante :

- Directement pour $\frac{\infty}{\infty}$.

- Pour $0 \times \infty$, la transformation $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ permet de se ramener au cas $\frac{0}{0}$.

- Pour $\infty - \infty$, la transformation $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$

permet de se ramener au cas $\frac{0}{0}$.

Toutefois, cette transformation complique souvent les calculs. Il est donc préférable de l'utiliser en dernier recours, après avoir tenté de factoriser et de simplifier l'expression initiale ou, tout simplement, de mettre au même dénominateur.

- Pour les formes indéterminées de type exponentiel ($0^0, 1^\infty, \infty^0$), l'écriture $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ place l'indétermination au niveau du logarithme de la limite recherchée, sous la forme $0 \times \infty$ traitée précédemment.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2}} \right)}{\frac{1}{x}}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$ qui se ramène à $0 \times \infty$, puis à $\frac{0}{0}$. Les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées. On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{4}{3} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)^{-2/3} x^{-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\left(1 - \frac{2}{x^2} \right)^{2/3}} = +\infty.$$

Enfin, la règle de l'Hospital s'applique uniquement aux formes indéterminées. On ne peut donc pas en faire usage pour calculer toute limite de quotient.

5 Théorème de Taylor

Le théorème de Taylor permet d'approcher des fonctions par un polynôme tout en établissant une majoration de l'erreur commise. Il utilise les dérivées successives, dont la dérivée seconde.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ et $a \in DD \cap D'$.

- f est deux fois dérivable en a si sa dérivée première f' est dérivable en a .
- Dans ce cas, $f''(a) = (f')'(a)$ est appelée *dérivée seconde* de f en a . □

De manière générale, on peut ainsi définir la notion de fonction p fois dérivable, le cas échéant à droite et/ou à gauche, en un point, puis dans un ensemble. De même, on définit les dérivées d'ordre p , unilatérales ou bilatérales.

Exemple

La fonction $f(x) = \sin x$ est dérivable dans \mathbb{R} et sa dérivée, $f'(x) = \cos x$, est aussi dérivable dans \mathbb{R} . Elle est donc deux fois dérivable dans \mathbb{R} et $f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$.

Le théorème de Taylor offre une approximation polynomiale locale (au voisinage d'un point) d'une fonction pour autant qu'elle soit suffisamment régulière. La formule décompose la valeur de la fonction en deux termes : l'approximation dite de Taylor et le terme d'erreur, ou « reste », dont l'expression permet d'en établir une majoration spécifique (fonction de la dérivée d'ordre $p+1$ de la fonction considérée). Sachant que la « factorielle » d'un nombre $n \in \mathbb{N}_0$, notée $n!$, est définie par : $n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$, avec, par convention, $0! = 1$, on formule le *théorème de Taylor* comme suit.

Théorème de Taylor Si f est $(p+1)$ fois dérivable dans l'intervalle $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, alors :

$$\forall x \in (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2) : f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^p \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i}_{\text{approximation de Taylor d'ordre } p} + \underbrace{\frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} (x-a)^{p+1}}_{\text{reste d'ordre } p}$$

développement de Taylor d'ordre p

où $\alpha = a + \theta(x-a)$, $\theta \in (0, 1)$. □

Dans le cas particulier où $a = 0$, le développement de Taylor est appelé *développement de Mac Laurin*.

Exemple

Le développement de Mac Laurin d'ordre pair $2k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) de la fonction $f(x) = \sin x$ est donné par :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \underbrace{\frac{(-1)^k (\cos \alpha)}{(2k+1)!} x^{2k+1}}_{\text{Reste d'ordre } 2k}, \quad \text{où } 0 < \alpha < x,$$

puisque f est indéfiniment dérivable et $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, etc.

6 Caractéristiques des fonctions d'une variable

6.1 FONCTIONS MONOTONES

Les fonctions partout croissantes, ou partout décroissantes, dans un domaine donné sont dites monotones dans ce domaine. Cette classe de fonctions, aisément caractérisable à l'aide de la dérivée première (sous réserve de régularité suffisante), joue un rôle pratique important, puisque la formalisation de plusieurs problèmes de gestion exige d'emblée des fonctions de ce type. Par exemple, la quantité globale demandée d'un bien de consommation est décroissante en fonction du prix, la quantité offerte généralement croissante, l'utilité attendue des investisseurs dépend positivement du rendement attendu (fonction croissante) et négativement du risque (fonction décroissante), etc.

Les fonctions qui sont tantôt croissantes, tantôt décroissantes dans leur domaine d'étude ne sont pas globalement monotones. Cependant, en découpant de façon cohérente le domaine, il est le plus souvent possible de dégager des sous-domaines dans lesquels une fonction donnée est monotone. Donc, même dans ce cas, les notions définies ci-dessous prennent tout leur intérêt.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$

- f est (strictement) croissante⁽¹⁾ dans D si $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2)$.
- f est (strictement) décroissante dans D si $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2)$.
- f est monotone dans D si f est croissante dans D ou décroissante dans D . \square

La propriété suivante permet d'établir la monotonie d'une fonction suffisamment régulière grâce au signe de sa dérivée première. En pratique, elle constitue un outil fondamental. En particulier, lorsque la fonction exprime l'évolution d'une variable au cours du temps (modélisation en temps continu), elle permet d'identifier, en fonction de la spécification retenue, les périodes de hausse et de baisse de cette variable.

Propriété Si D est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ est continue dans D et dérivable dans D' , alors :

- f est croissante dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f'(x) \geq 0$;
- f est décroissante dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f'(x) \leq 0$;
- f est strictement croissante dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f'(x) < 0$. \square

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3x - 1$ est continue et dérivable dans \mathbb{R} et $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3$. On a $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est strictement croissante dans \mathbb{R} .

1. Alternativement, on peut utiliser les qualificatifs « non décroissante » et « croissante » en lieu et place de « croissante » et « strictement croissante », respectivement.

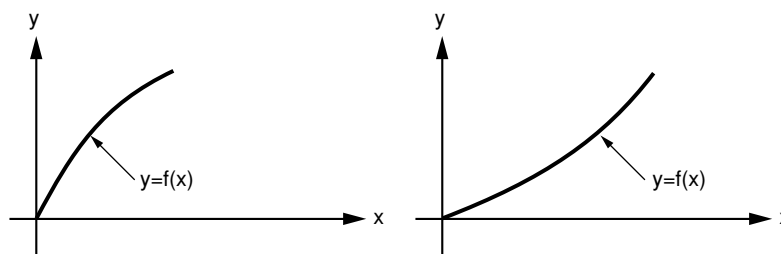
Lorsque le domaine D n'est pas convexe, la propriété n'est pas applicable directement. On peut cependant l'utiliser dans les sous-domaines convexes de D . Par ailleurs, dans le cas des fonctions strictement monotones, la condition de signe (strict) de la dérivée est suffisante, mais pas nécessaire. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^3$, qui est continue et dérivable dans \mathbb{R} (avec $f'(x) = 3x^2$), est strictement croissante dans \mathbb{R} ($\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow x^3 < y^3$) et pourtant sa dérivée s'annule en 0 ($f'(0) = 0$).

6.2 FONCTIONS CONCAVES ET CONVEXES

Une fonction de production, ici à un facteur, est naturellement croissante puisque, avec une quantité supérieure du facteur de production, on ne peut qu'accroître le niveau produit. Elle peut être concave (fonction de production à rendements décroissants) ou convexe (fonction de production à rendements croissants). Les figures 3.4 illustrent ces possibilités dans le cas particulier où la fonction f est croissante et $f(0) = 0$, ce qui est typique pour une fonction de production puisque, sans facteur, la production est nulle.

Figure 3.4

**Fonction de production concave (à gauche).
Fonction de production convexe (à droite)**



De façon générale, c'est la courbure du graphe qui est visée. Orientée vers le bas, l'allure de la courbe est dite concave, et, vers le haut, convexe. En outre, ces notions sont déterminantes dans l'étude des extrema ou optimisation. Les définitions de fonctions concaves et convexes s'énoncent dans les domaines D qui sont des *sous-ensembles convexes* de \mathbb{R} , ce qui implique que $D' \subset D$.

Définitions Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$, où D est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R} .

- f est *concave* dans D si :

$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$
- f est *convexe* dans D si :

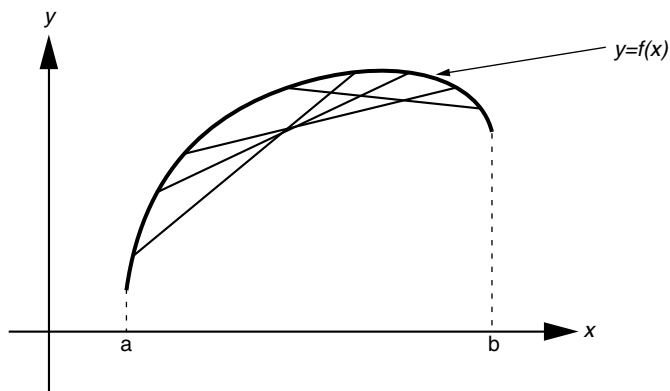
$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$
- f est *strictement concave* (resp. *convexe*) dans D si :

$$\forall x, y \in D(x \neq y), \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \underset{\text{(resp. <)}}{>} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

Ces inégalités offrent une interprétation géométrique directe : les fonctions concaves (voir la figure 3.5, page suivante) (resp. convexes), sont telles que toute sécante joignant deux points du graphe se situe sous le graphe, (resp. au-dessus du graphe). En outre, la concavité et la convexité strictes excluent la présence de « morceaux linéaires » dans le graphe.

De façon générale, le graphe d'une fonction continue dans un domaine convexe est tantôt concave, tantôt convexe. Les points où se situe la transition de l'une à l'autre de ces situations sont appelés « points d'inflexion ».

Figure 3.5



Définition f admet un *point d'inflexion* en a si f est continue en a et si

$$\exists \eta > 0 : \begin{cases} f \text{ est convexe (resp. concave) dans } (a - \eta, a) \\ f \text{ est concave (resp. convexe) dans } (a, a + \eta) \end{cases} \quad \square$$

En un point d'inflexion en lequel la fonction est dérivable (figure 3.6), le graphe de la fonction traverse la tangente. Si le point d'inflexion est situé en un point anguleux (figure 3.7), le graphe traverse la droite brisée constituée de deux « demi-tangentes » droite et gauche.

Figure 3.6

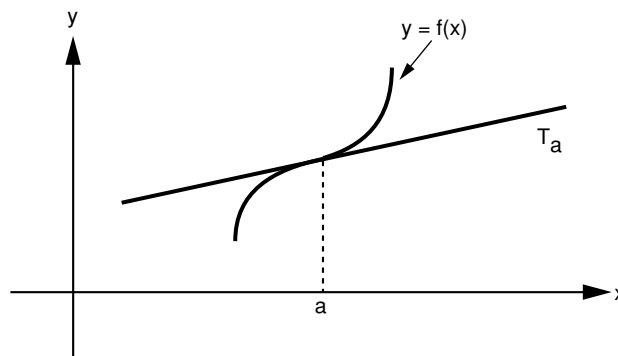
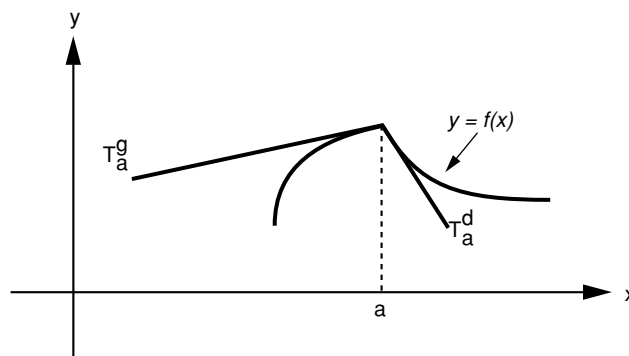


Figure 3.7



Dans toutes les propriétés qui suivent, le domaine D est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R} .

Propriétés

- f_1 et f_2 sont concaves (resp. convexes) dans $D \Rightarrow f_1 + f_2$ est concave (resp. convexe) dans D .
- Si f est concave (resp. convexe) dans D , alors :
 αf est concave (resp. convexe) dans D si $\alpha \geq 0$,
 αf est convexe (resp. concave) dans D si $\alpha \leq 0$.
- f est concave (resp. convexe) dans $D \Leftrightarrow \forall a \in D, \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est une fonction décroissante (resp. croissante) dans $D \setminus \{a\}$. □

La dernière propriété concerne la monotonie du taux de variation des fonctions concaves et convexes. Elle s'applique notamment aux fonctions de production. En effet, comme $f(0) = 0$, en choisissant $a = 0$, on obtient que la productivité moyenne, $\frac{f(x)}{x}$, est décroissante pour une fonction de production concave et croissante pour une fonction de production convexe.

Le lien entre la concavité et la convexité d'une part, la continuité et la dérivabilité de l'autre est donné par la propriété suivante.

Propriété f est concave dans D ou convexe dans $D \Rightarrow f$ est continue, dérivable à gauche et à droite dans D' . □

Néanmoins, f n'est pas nécessairement dérivable dans D' . Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable dans \mathbb{R} (non dérivable en 0) et pourtant convexe dans \mathbb{R} puisque :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1] : \\ |(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)| \leq |\lambda x_1| + |(1 - \lambda)x_2| = \lambda |x_1| + (1 - \lambda) |x_2|.$$

La propriété suivante est probablement la plus importante en pratique. Elle permet de caractériser les fonctions concaves et convexes régulières à l'aide du signe de leur dérivée seconde.

Propriété Si f est 2 fois dérivable dans D , alors :

- f est concave dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f''(x) \leq 0$;
- f est convexe dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f''(x) \geq 0$. □

Exemple

$f(x) = x^2 - 5x + 1$ est deux fois dérivable dans \mathbb{R} et $f'(x) = 2x - 5$, $f''(x) = 2$. On a $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est strictement convexe dans \mathbb{R} .

Les fonctions « minimum » et « maximum » sont utiles, par exemple, dans la modélisation des marchés en déséquilibre. Elles apparaissent ici parce qu'elles bénéficient de propriétés intéressantes au niveau de la concavité/convexité.

Définitions Soit deux fonctions f_1 et $f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- $\min \{f_1, f_2\} : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \min \{f_1(x), f_2(x)\}$.
- $\max \{f_1, f_2\} : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \max \{f_1(x), f_2(x)\}$. □

En chaque point de D , la fonction $\min \{f_1, f_2\}$ (resp. $\max \{f_1, f_2\}$) prend la plus petite (resp. la plus grande), des valeurs prises en ce point par les deux fonctions de départ.

Propriétés

- f_1 et f_2 sont concaves dans $D \Rightarrow \min \{f_1, f_2\}$ est concave dans D .
- f_1 et f_2 sont convexes dans $D \Rightarrow \max \{f_1, f_2\}$ est convexe dans D . □

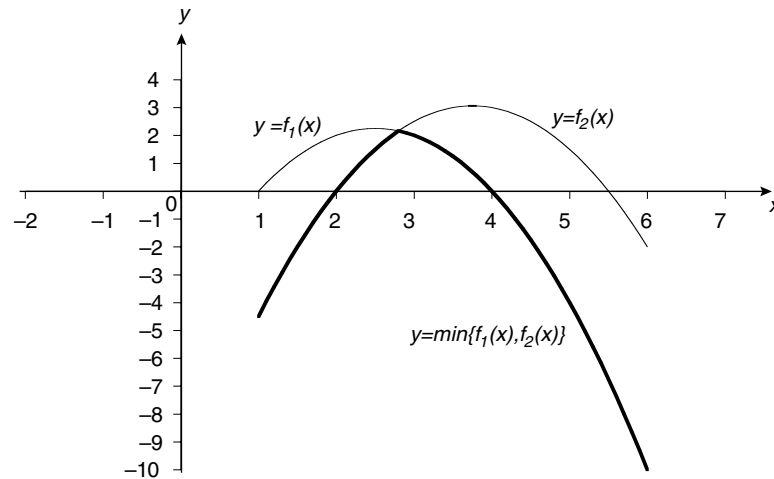
Exemple

Les fonctions $f_1 : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow -x^2 + 5x - 4$ et $f_2 : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow -x^2 + \frac{15}{2}x - 11$, sont toutes deux concaves dans $[1, 6]$. Il s'ensuit que :

$$\min \{f_1, f_2\} : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} -x^2 + \frac{15}{2}x - 11 & \text{si } x \in \left[1, \frac{14}{5}\right] \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \in \left[\frac{14}{5}, 6\right] \end{cases} \text{ est également concave dans}$$

$[1, 6]$ (voir figure 3.8).

Figure 3.8



Problèmes et exercices

Techniquement, ce sont à coup sûr les limites de fonctions qui occupent la majeure partie des exercices. D'abord étudiées pour elles-mêmes, elles apparaissent ensuite dans l'étude de la continuité, de la dérivabilité et des asymptotes. Les techniques de dérivation sont aussi à l'honneur, tant pour établir les équations de tangentes et les développements de Taylor que pour discuter la croissance/décroissance et la concavité/convexité des fonctions. Des applications à la gestion clôturent ces exercices.

Limites de fonctions

EXERCICE 1

Énoncé

Pour les fonctions suivantes, déterminez les domaines D , D' , D'_D , D'_G .

- a** $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \ln x$.
- b** $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x}$.
- c** $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{\ln(3-x)}$.
- d** $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x^2-9}$.

Solution

a $D = D' = \mathbb{R}_0^+$. En effet :

$$\forall x \in (0, +\infty), \exists \delta = \frac{x}{2} > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subset D \Rightarrow \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\} \subset D.$$

Par exemple pour $x = 1$, on peut choisir $\delta = \frac{1}{2}$ pour obtenir $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\} \subset (0, +\infty)$.

Aucun autre point ne vérifie la définition de D' .

$D'_G = (0, +\infty)$ car

- (i) $D' \subset D'_G \Rightarrow D'_G \supset (0, +\infty)$
- (ii) $0 \notin D'_G$ puisque $\forall \delta > 0 : (-\delta, 0) \not\subset D$
- (iii) aucun autre point ne vérifie la définition de D'_G .

$D'_D = [0, +\infty)$ car

(i) $D' \subset D'_D \Rightarrow D'_D \supset (0, +\infty)$

(ii) $0 \in D'_D$ puisque $\exists \delta = 1 > 0 : (0, \delta) = (0, 1) \subset D$

(iii) aucun autre point ne vérifie la définition de D'_D .

b $D = \mathbb{R}_0$ car la fonction n'est pas définie en $x = 0$. $D'_G = D'_D = D' = \mathbb{R}$.

c $D = (-\infty, 3) \setminus \{2\}$, $D' = (-\infty, 3)$, $D'_G = (-\infty, 3]$ et $D'_D = (-\infty, 3)$.

d $D = [0, +\infty) \setminus \{-3, 3\}$, $D' = (0, +\infty)$, $D'_G = (0, +\infty)$, $D'_D = [0, +\infty)$.

EXERCICE 2

Énoncé

À l'aide de la définition de la notion de limite bilatérale, démontrez les résultats suivants.

a $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} x = a$.

b $\forall a, b \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} b = b$.

Solution

a Pour montrer que $\forall a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$, on prend par exemple $\eta = \varepsilon$.

b On doit montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |b - b| < \varepsilon$.
Comme $|b - b| = 0 < \varepsilon$ est toujours vrai, on peut prendre un $\eta > 0$ quelconque.

EXERCICE 3

Énoncé

À l'aide des définitions, déterminez les limites suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)$.

b $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \sqrt{x + 1}$.

c $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x}$.

d $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.

Solution

a $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - 2| < \eta \Rightarrow |(3x - 5) - 1| < \varepsilon$

Comme $|3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$, il suffit de prendre $0 < \eta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

b $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \sqrt{x + 1} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < x + 1 < \eta \Rightarrow |(\sqrt{x + 1}) - 0| < \varepsilon$.

Comme $|\sqrt{x + 1}| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} < \varepsilon \Leftrightarrow x + 1 < \varepsilon^2$ (car $\sqrt{x + 1} \geq 0$), il suffit de prendre $0 < \eta \leq \varepsilon^2$.

c $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0, \exists \eta > 0 : \underbrace{0 < 0 - x < \eta}_{0 > x > -\eta} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x}}_{(*)} < -L$.

Comme (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{L} > -x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{L}$ (car $x < 0$), il suffit de prendre un nombre η tel que $-\eta > -\frac{1}{L}$ et $\eta > 0$, c'est-à-dire tel que : $0 < \eta < \frac{1}{L}$.

d $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0, \exists K > 0 : \begin{cases} x > K \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{e^x}_{(*)} > L.$

Comme (*) $\Leftrightarrow x > \ln L$, il suffit de prendre $K > \min\{0, \ln L\}$.

EXERCICE 4

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$.

Calculez $\lim_{x \rightarrow \alpha} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$.

Solution

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0)$$

Démontrons ce résultat par récurrence.

Il est vérifié pour $n = 0$: $\lim_{x \rightarrow \alpha} a_0 = a_0$ (limite d'une fonction constante).

En supposant qu'il est vérifié pour un polynôme de degré $n = k - 1$, montrons-le pour un polynôme de degré $n = k$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) &= \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_k x^k) + \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_k x^k) + (a_{k-1} \alpha^{k-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_k x^{k-1} \cdot x) + (a_{k-1} \alpha^{k-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_k x^{k-1}) \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} x + (a_{k-1} \alpha^{k-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= (a_k \alpha^{k-1}) \cdot \alpha + (a_{k-1} \alpha^{k-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= (a_k \alpha^k + a_{k-1} \alpha^{k-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0). \end{aligned}$$

EXERCICE 5

Énoncé

À l'aide des propriétés, calculez les limites suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - 1)$.

b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x \cdot x}{(x - 2)^2}$.

c $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(\sqrt{x + 1})$.

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 6x + 3}{2x^3 + 3x - 1}$.

Solution

$$\mathbf{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + (-1)) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) + \lim_{x \rightarrow 1} (-1) = 0 + (-1) = -1$$

$$\mathbf{b} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x \cdot x}{(x-2)^2} = +\infty \text{ (r\`egle de calcul dans } \overline{\mathbb{R}} : \frac{e^2 \cdot 2}{0^{(+)}}).$$

$$\mathbf{c} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \sqrt{x+1} = 0^{(+)} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \ln(\sqrt{x+1}) = -\infty \\ \text{(limite d'une compos\`ee de fonctions).}$$

$$\mathbf{d} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 6x + 3}{2x^3 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 6

\`Enonc\`e

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et a_i ($i = 0, 1, \dots, n$), b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) $\in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

D\`eterminez dans $\overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$.

Solution

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n \cdot \overbrace{\left(\underbrace{a_n}_{\rightarrow a_n} + a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_0 x^{-n} \right)}^{\rightarrow 0}}{x^m \cdot \overbrace{\left(\underbrace{b_m}_{\rightarrow b_m} + b_{m-1} x^{-1} + \dots + b_0 x^{-m} \right)}^{\rightarrow 0}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_n}{b_m} = \begin{cases} \pm\infty (*) & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \text{ o\`u le signe de } (*) \text{ est d\`etermin\`e par celui de} \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

$\frac{a_n}{b_m}$ et, pour $x \rightarrow -\infty$, par la parit\`e de $(n - m)$.

EXERCICE 7

Enonc\`e

Dans chaque cas, les limites suivantes existent-elles dans $\overline{\mathbb{R}}$? Si oui, donnez leur valeur.

$$\mathbf{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ o\`u } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} -\ln(x-1) & \text{si } x > 1 \\ \frac{2}{(x-1)^2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

$$\mathbf{b} \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x), \text{ o\`u } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 4 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \end{cases}.$$

$$\mathbf{c} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} h(x), \text{ o\`u } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} \cos x + 1 & \text{si } x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \\ 2 & \text{si } x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{cases}$$

$$\mathbf{d} \quad \lim_{x \rightarrow 4} i(x), \text{ où } i : \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x < 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 4 \end{cases}.$$

Solution

$$\mathbf{a} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1}^- f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1}^- \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1}^+ f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1}^+ (-\ln(x-1)) = -(-\infty) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

$$\mathbf{b} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1}^- g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1}^- \frac{2x+3}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1}^+ g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1}^+ \frac{2x+3}{x^2-1} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \notin \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\mathbf{c} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (\cos x + 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (\cos x) + \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} 1 = 0 + 1 = 1.$$

$$\mathbf{d} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4}^- i(x) &= \lim_{x \rightarrow 4}^- \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 4}^+ i(x) &= \lim_{x \rightarrow 4}^+ \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} i(x) = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 8

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la limite.

- a** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$.
- b** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$.
- c** $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$.
- d** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Solution

a Par le théorème de transfert, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$. En effet, la suite $(x_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ définie par $x_t = \frac{\pi}{2} + t\pi$ est telle que $x_t \rightarrow +\infty$ mais $f(x_t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\pi\right) = (-1)^t$ n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

b Par pincement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \underbrace{\frac{-1}{x}}_0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_0.$$

c Par pincement : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$. En effet :

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \setminus \{0\} : |\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{|\sin x|} &\geq \frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|\operatorname{tg} x|} \\ \Rightarrow \frac{|\sin x|}{|\sin x|} &\geq \frac{|\sin x|}{|x|} \geq \frac{|\sin x|}{|\operatorname{tg} x|} \\ \Rightarrow \underbrace{1}_{\rightarrow 1} &\geq \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{\sin x}{x} \geq \underbrace{\frac{1}{|\cos x|}}_{\rightarrow 1}. \end{aligned}$$

d $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Les suites définies par $x_t = \frac{1}{t} + 2 (\in \mathbb{R})$ et $y_t = \frac{\pi}{t} + 2 (\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sont telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 2 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} y_t = 2 \text{ mais } \lim_{t \rightarrow \infty} f(x_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{t} + 2\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(y_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{\pi}{t} + 2\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Par le théorème de transfert, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \nexists$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Continuité

EXERCICE 9

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2x + 4$.

Montrez, en revenant à la définition, que f est continue en 3.

Solution

$$f \text{ est continue en } x = 3 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \left. \begin{array}{l} x \in (3 - \eta, 3 + \eta) \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(3)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \left. \begin{array}{l} |x - 3| < \eta \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{|(2x + 4) - 10|}_{(*)} < \varepsilon.$$

Comme $(*) \Leftrightarrow |2x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$, il suffit de prendre $0 < \eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

EXERCICE 10

Énoncé

Donnez un exemple de fonction définie dans $D = [-2, 2)$ et dont le domaine de continuité est $DC = [-2, 2) \setminus \{1\}$.

Solution

On peut prendre, par exemple, $f : [-2, 2) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

EXERCICE 11

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les domaines de définition et de continuité.

a $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x - 3}}$.

b $f(x) = e^x(x + 1) - \cos x$, où $x \in [-1, 7]$.

c $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x x}{(x - 2)^2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

d $f(x) = \begin{cases} \cos x + 1 & \text{si } x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ 2 & \text{si } x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$.

e $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} & \text{si } x \leq 3 \text{ et } x \notin \{-2, 2\} \\ (x - 3) \sin\left(\frac{1}{x - 3}\right) + 2 & \text{si } x > 3 \\ e^x & \text{si } x \in \{-2, 2\} \end{cases}$.

f $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{e-x}} & \text{si } x > e \\ \ln x^2 - 2 & \text{si } x \leq e \end{cases}$.

Solution

a $D = (3, +\infty) = DC$. En effet, dans $(3, +\infty)$, f est continue comme quotient de $\ln(x^2 + 1)$ (continue dans \mathbb{R} en tant que composée de fonctions continues) et de $\sqrt{x - 3}$ (continue comme composée de fonctions continues).

b $D = [-1, 7] = DC$, puisque f est obtenue par somme et produit de fonctions continues dans \mathbb{R} et donc dans $[-1, 7]$.

c $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. En effet, f est continue dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ mais $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x \cdot x}{(x - 2)^2} = +\infty$.

d $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Dans $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, f est continue par les propriétés usuelles.

En outre, $\forall k \in \mathbb{Z} : \lim_{x \rightarrow 2k\pi} (\cos x + 1) = 2 = f(2k\pi)$ et la fonction est continue en ces points, mais $\lim_{x \rightarrow \pi + 2k\pi} (\cos x + 1) = 0 \neq 2 = f(\pi + 2k\pi)$ et la fonction est discontinue en ces points.

e $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. En effet, dans $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$, f est continue par les propriétés usuelles.

En $x = \pm 2 : \lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \nexists$ dans \mathbb{R} , donc la fonction n'est pas continue en $x = \pm 2$.

En $x = 3$: sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-3) \sin \left(\frac{1}{x-3} \right) + 2 \right] = 0 + 2 = 2 = f(3)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = 2 = f(3)$$

donc la fonction est continue en 3.

f $D = DC = \mathbb{R}_0$. La continuité en e résulte du fait que $\lim_{x \rightarrow e} 3^{\frac{1}{e-x}} = 0 = f(e)$.

EXERCICE 12

Énoncé

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sin x + \alpha & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Pour quelles valeurs du paramètre réel α , la fonction f est-elle continue dans \mathbb{R} ?

Solution

D'après les propriétés usuelles, f est continue dans \mathbb{R}_0 . Donc, pour qu'elle soit continue dans \mathbb{R} , il faut et il suffit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) = \sin 0 + \alpha = \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ est la seule valeur admissible.}$$

EXERCICE 13

Énoncé

Dans chaque cas, vérifiez que les fonctions données satisfont aux hypothèses du théorème de Brouwer. Déduisez-en l'existence de point(s) fixe(s) que vous déterminerez.

a $f : [0, 20] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{2}x + 7$.

b $g : [-10, 100] \rightarrow [-10, 100] : x \rightarrow \begin{cases} -8 & \text{si } x \in [-10, 0] \\ -x^2 + 7x - 8 & \text{si } x \in (0, 6) \\ x - 8 & \text{si } x \in [6, 100] \end{cases}$.

Solution

a f est une fonction polynôme, continue dans tout sous-ensemble de \mathbb{R} et telle que : $\text{Im}_f([0, 20]) = [7, 17] \subset [0, 20]$. Elle satisfait donc aux hypothèses du théorème de Brouwer et admet au moins un point fixe x_0 tel que : $\frac{1}{2}x_0 + 7 = x_0 \Rightarrow x_0 = 14$.

- b** g est définie de $[-10, 100] \rightarrow [-10, 100]$ et est continue dans $[-10, 100]$. La continuité dans $[-10, 100] \setminus \{0, 6\}$ découle des propriétés usuelles. En outre :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-8) = -8 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 7x - 8) = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -8 = g(0) \\ \text{et } g \text{ est continue en } 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 6^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (-x^2 + 7x - 8) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (x - 8) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6} g(x) = -2 = g(6) \\ \text{et } g \text{ est continue en } 6.$$

La fonction satisfait donc aux hypothèses du théorème de Brouwer et admet au moins un point fixe x_0 tel que $g(x_0) = x_0$. Pour les déterminer, on considère chacun des sous-domaines.

Dans $[-10, 0]$: $-8 = x_0 \Rightarrow x_0 = -8$; dans $[0, 6]$: $-x_0^2 + 7x_0 - 8 = x_0 \Leftrightarrow -x_0^2 + 6x_0 - 8 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ ou $x_0 = 4$; dans $[6, 100]$: $x_0 - 8 = x_0$ n'admet pas de solution. En conclusion, la fonction admet trois points fixes situés en $-8, 2$ et 4 .

Asymptotes

EXERCICE 14

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez les asymptotes éventuelles de la fonction donnée.

- a** $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
- b** $f(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi}$.
- c** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \ln x & \text{si } x < \pi \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$.
- d** $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2} - 3x^2}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -6 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
- e** $f(x) = e^x \cos x$.

Solution

- a** Conditions d'existence : $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ et $x+1 \neq 0 \Rightarrow D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

Il s'ensuit que : $D' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $D'_G = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$, $D'_D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

Recherche d'asymptotes verticales :

Comme $DC = D$, $D'_D \setminus DC = \emptyset$ et $D'_G \setminus DC = \{-1\}$, la seule possibilité se situe à gauche du point $x = -1$. Le calcul de la limite correspondante donne :

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} -1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\rightarrow} -1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty.$$

On en déduit qu'il existe une AV $\equiv x = -1$ à droite.

Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

Le domaine permet cette recherche puisque $D \supset (1, +\infty)$ et $D \supset (-\infty, -1)$. En outre, on a : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, de sorte que la fonction admet une AH $\equiv y = 1$ à droite et à gauche, et donc pas d'asymptote oblique.

b $D = [(-\infty, -\sqrt{\pi}) \cup [\sqrt{\pi}, +\infty)] \setminus \{2\}$.

Recherche d'asymptotes verticales :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \right) = \frac{1}{\pm\sqrt{\pi} - 2} \neq \pm\infty$$

\Rightarrow pas d'asymptote verticale en $x = \pm\sqrt{\pi}$.

$$\lim_{x \underset{\begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix}}{\rightarrow} 2} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \right) = \mp\infty \Rightarrow AV \equiv x = 2, \text{ bilatérale.}$$

Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \right) = -\infty \Rightarrow \text{pas d'asymptote horizontale.}$$

Cependant, il existe une asymptote oblique $AO_1 \equiv y = -x$ à droite et une asymptote oblique $AO_2 \equiv y = x$ à gauche. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{(x-2)x}}_{=0} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{-\sqrt{x^2 - \pi}}{x}}_{\text{E.I. } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-|x| \sqrt{1 - \frac{\pi}{x^2}}}{x} = \mp 1$$

$$\begin{aligned} \text{et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) \pm x] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \pm x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x-2} \right)}_{=0} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(-\sqrt{x^2 - \pi} \pm x \right)}_{\text{E.I. } \frac{\infty}{\infty}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm (x - \sqrt{x^2 - \pi}) (x + \sqrt{x^2 - \pi})}{(x \pm \sqrt{x^2 - \pi})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm (x^2 - x^2 + \pi)}{(x \pm \sqrt{x^2 - \pi})} = \frac{\pm \pi}{\pm \infty} = 0. \end{aligned}$$

c AV $\equiv x = 0$, à droite.

d AV $\equiv x = 0$, bilatérale, et AH $\equiv y = -3$, bilatérale.

e Aucune asymptote. On utilise le théorème de transfert pour montrer l'absence d'asymptote oblique.

Dérivabilité

EXERCICE 15

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la dérivée des fonctions données.

a $f(x) = x + x^2 + x^3.$

b $f(x) = (a + bx) + (a + bx)^2 + (a + bx)^3 \quad (a, b \in \mathbb{R}).$

c $f(x) = \frac{1}{(3x^2 + 7x)^3}.$

d $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (a \in \mathbb{R}).$

e $f(x) = x^2 \sin x.$

f $f(x) = \frac{e^x}{x}.$

g $f(x) = \frac{1}{\sin x}.$

h $f(x) = (\sqrt{1 + \cos^2 x})^{-1}.$

i $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x.$

j $f(x) = \ln(\ln x).$

k $f(x) = (1 - \operatorname{tg}^2 x)^{-\frac{1}{3}}.$

l $f(x) = 2^{(5x^2 + \sqrt{x^3 - 1})}.$

m $f(x) = \operatorname{cotg}(2x^2).$

n $f(x) = (\sqrt[4]{x})^{x(\log_{10} x^2)}.$

Solution

a $f'(x) = (x + x^2 + x^3)' = (x)' + (x^2)' + (x^3)' = 1 + 2x + 3x^2.$

b $f'(x) = ((a + bx) + (a + bx)^2 + (a + bx)^3)' = (a + bx)' + ((a + bx)^2)' + ((a + bx)^3)'$
 $= b + 2(a + bx)b + 3(a + bx)^2 b = b(1 + 2a + 3a^2 + 3b^2 x^2 + 8abx).$

c $f'(x) = -3(3x^2 + 7x)^{-4} (6x + 7) = \frac{-3(6x + 7)}{(3x^2 + 7x)^4}.$

d $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$

e $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$

f $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x - 1)}{x^2}.$

g $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$

h $f'(x) = \sin x \cos x (1 + \cos^2 x)^{-\frac{3}{2}}.$

i $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0.$

j $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}.$

k $f'(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{3 \sqrt[3]{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^4} \cos^2 x}.$

l $f'(x) = 2^{(5x^2 + \sqrt{x^3 - 1})} \cdot \left(10x + \frac{3}{2} \sqrt{x}\right) \cdot \ln 2.$

$$\mathbf{m} \quad f'(x) = \frac{-4x}{\sin^2(2x^2)}.$$

$$\mathbf{n} \quad f'(x) = \frac{1}{4} (\sqrt[4]{x})^{x^{2\log_{10} x}} x^{2\log x - 1} (4 \log_{10} x \ln x + 1).$$

EXERCICE 16

Énoncé

Déterminez le domaine de dérivabilité des fonctions données dans l'exercice 11 **a**, **b** et **e**.

Solution

a $DD = D = (3, +\infty)$.

En effet, f est le quotient de $\ln(x^2 + 1)$, qui est dérivable dans \mathbb{R} en tant que composée de fonctions dérivables (fonctions polynôme et $\ln x$), et de $\sqrt{x-3}$ qui est également composée de fonctions dérivables (fonctions polynôme et \sqrt{x}).

b $DD = D = [-1, 7]$, car f est obtenue par somme et produit de fonctions dérivables dans \mathbb{R} .

e $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ (voir exercice 11 **e**). Donc, $DD \subset \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

En 3, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \sin\left(\frac{1}{x-3}\right) + 2 - 2}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \sin\left(\frac{1}{x-3}\right) \notin \text{dans } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En conclusion, f est non dérivable en 3 et $DD = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$.

EXERCICE 17

Énoncé

Déterminez le domaine de dérivabilité des fonctions données.

a $f(x) = \ln(2x + 4) + \frac{1}{x}$.

b $f(x) = |5x + 2|$.

c $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$.

Solution

a $DD = D = (-2, +\infty) \setminus \{0\}$. En effet, f est la somme de la fonction $\ln(2x + 4)$, qui est dérivable dans $(-2, +\infty)$ en tant que composée de fonctions dérivables, et de $\frac{1}{x}$ qui est dérivable dans \mathbb{R}_0 .

b $f(x) = |5x - 2| = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \geq \frac{2}{5} \\ 2 - 5x & \text{si } x < \frac{2}{5} \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \quad DD = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}.$

En effet, f est dérivable dans $(-\infty, \frac{2}{5})$ et $(\frac{2}{5}, +\infty)$ en tant que polynôme et, en $\frac{2}{5}$, on a :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} \frac{5x - 2 - 0}{x - \frac{2}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} \frac{5\left(x - \frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^-} \frac{-5x + 2 - 0}{x - \frac{2}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^-} \frac{-5\left(x - \frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} = -5 \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow f \text{ est non dérivable en } \frac{2}{5}.$$

c $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right], DD = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

La fonction est dérivable dans $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ car elle l'est en tout point de chacun de ces intervalles ouverts en tant que composée de fonctions dérivables (fonctions polynôme, trigonométrique et \sqrt{x}). Aux bords des intervalles, c'est-à-dire en $k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + k\pi$, la fonction n'est pas dérivable car :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k\pi^+} \frac{\sqrt{\sin(2x)} - 0}{x - k\pi} &= \lim_{x \rightarrow k\pi^+} \frac{\sqrt{\sin(2x)}}{2(x - k\pi)} \\ &= \lim_{x \rightarrow k\pi^+} \frac{2}{\sqrt{\sin(2(x - k\pi))}} \underbrace{\frac{\sin(2(x - k\pi))}{2(x - k\pi)}}_{\rightarrow 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi^-} \frac{\sqrt{\sin(2x)} - 0}{x - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = +\infty.$$

EXERCICE 18

Énoncé

Écrivez l'équation de la tangente au graphe de la fonction $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ au point d'abscisse $x = 1$.

Solution

On a : $T_1 \equiv y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. Or $f(1) = \frac{e}{e + 1}$ et $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$
 $\Rightarrow f'(1) = \frac{e}{(e + 1)^2}$.
 Donc : $T \equiv y - \frac{e}{e + 1} = \frac{e}{(e + 1)^2}(x - 1)$.

EXERCICE 19

Énoncé

Dans chaque cas, construisez un exemple de fonction répondant aux conditions données. Donnez-en la forme analytique et tracez-en le graphe.

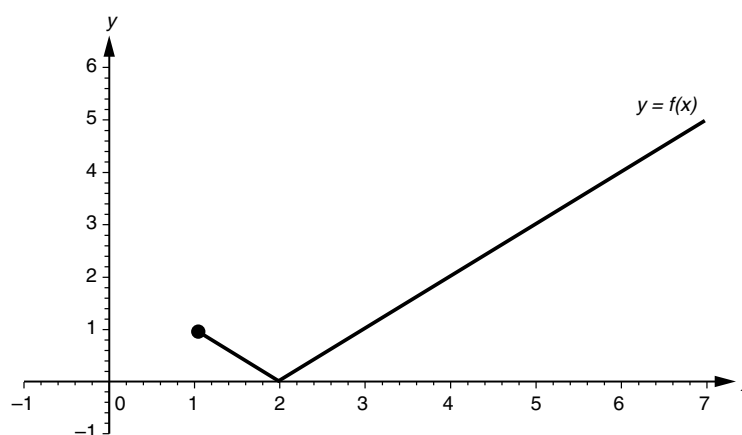
- a** $f : [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable dans $[1, 7] \setminus \{2\}$ et continue en 2.
b $f : [-1, +\infty) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, surjective, dérivable dans $(-1, +\infty) \setminus \{0, 1\}$ et admettant deux asymptotes verticales et une asymptote horizontale.

Solution

Ces exemples ne sont évidemment pas les seuls possibles.

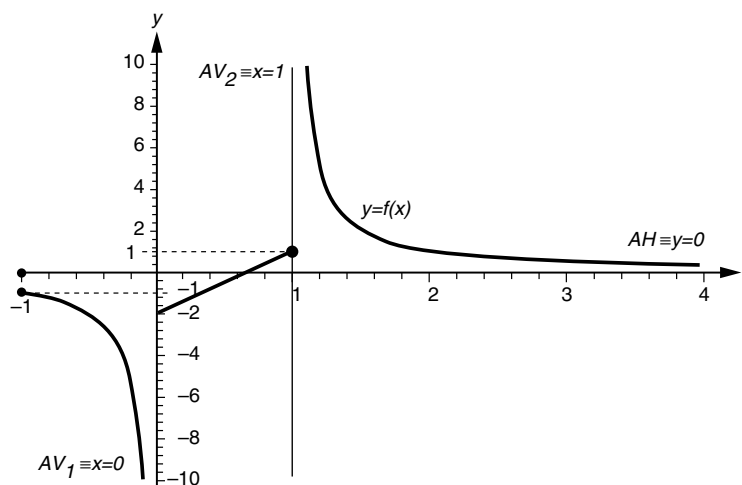
- a** $f : [1, 7] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x - 2|$ (voir figure 3.9).

Figure 3.9



$$\mathbf{b} \quad f : [-1, +\infty) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 3x - 2 & \text{si } x \in (0, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Figure 3.10



Asymptotes (figure 3.10, page ci-contre) : $AV_1 \equiv x = 0$ à droite, $AV_2 \equiv x = 1$ à gauche, $AH \equiv y = 0$ à droite.

EXERCICE 20

Énoncé

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -\sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Déterminez la fonction dérivée de f .

Solution

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

En effet, en 1, f n'est pas dérivable puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\sqrt{x-1} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty$.

EXERCICE 21

Énoncé

$$\text{Soit la fonction } f(x) = \begin{cases} -4x + x(\sin x) \left(\sin \frac{1}{x} \right) + x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Déterminez $f'(0)$.

Solution

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x + x(\sin x) \left(\sin \frac{1}{x} \right) + x^2 - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sin x) \left(\sin \frac{1}{x} \right)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = -4 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + 0 = -4 \end{aligned}$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$.

EXERCICE 22

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la limite demandée, en utilisant, le cas échéant, la règle de l'Hospital.

a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\text{tg } x} \right).$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}.$

c $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x).$

d $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}.$

Solution

a Il s'agit d'une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$ et les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées (les deux fonctions sont dérivables dans $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$). On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$$

b Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ et les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées. Il s'ensuit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$.

c Il s'agit d'une forme indéterminée du type $0 \times \infty$ qui se ramène à $\frac{\infty}{\infty}$ comme suit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées. Il s'ensuit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

d Comme :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{-\sin x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\rightarrow 1} \right) = 0,$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \cdot \ln x} = e^0 = 1.$$

EXERCICE 23**Énoncé**

On cherche à déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$. Montrez que la règle de l'Hospital n'est pas applicable et déterminez cette limite autrement.

Solution

En vertu du théorème de transfert, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \notin \mathbb{R}$, de sorte qu'une hypothèse de la règle de l'Hospital n'est pas vérifiée.

$$\text{Par contre, comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \text{ on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)} = 1.$$

EXERCICE 24

Énoncé

Déterminez les asymptotes de la fonction $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ en faisant appel, si nécessaire, à la règle de l'Hospital.

Solution

$$D = \mathbb{R}_0 = DC = DD \text{ et } D' = D'_D = D'_G = \mathbb{R}.$$

Recherche d'asymptotes verticales :

Comme $D'_D \setminus DC = \{0\} = D'_G \setminus DC$, la seule possibilité se situe au point $x = 0$. Le calcul de la limite à droite donne, grâce à la règle de l'Hospital :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = +\infty \Rightarrow AV \equiv x = 0 \text{ à gauche}$$

tandis que la limite à gauche est immédiate : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ pas d'AV à droite.

Recherche d'asymptotes horizontales et obliques :

Le domaine permet cette recherche. Le calcul des limite révèle l'absence d'asymptotes horizontales puisque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

Il existe cependant une asymptote oblique bilatérale, $AO \equiv y = x + 1$. En effet, en appliquant la règle de l'Hospital dans le second calcul de limite, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \in \mathbb{R}_0.$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = 1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Théorème de Taylor

EXERCICE 25

Énoncé

Établissez les approximations de Taylor d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de $x = 2$.

Solution

La fonction f est indéfiniment dérivable dans \mathbb{R} et $f(x) = f'(x) = e^x \Rightarrow f(2) = f'(2) = e^2$.
L'approximation d'ordre 1 est donc donnée par :

$$f(x) \simeq f(2) + f'(2)(x-2) = e^2 + e^2(x-2) = e^2(x-1).$$

L'approximation d'ordre 2 est donnée par :

$$f(x) \simeq f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)\frac{(x-2)^2}{2!} = e^2 + e^2(x-2) + e^2\frac{(x-2)^2}{2}.$$

EXERCICE 26**Énoncé**

Dans chaque cas, établissez les développements de Mac Laurin d'ordre $n \in \mathbb{N}_0$ des fonctions données.

- a** $f(x) = e^x$.
- b** $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
- c** $f(x) = \ln(1+x)$.
- d** $f(x) = \cos x$.
- e** $f(x) = (1+x)^m$, où $m \in \mathbb{N}_0$ et $m > n$.

Solution

Notons d'emblée que toutes les fonctions proposées sont indéfiniment dérivables dans un voisinage de 0, de sorte que ces développements sont tous possibles.

a $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$
 $\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{reste d'ordre } n} e^\alpha$, où $0 < \alpha < x$.

b $\forall i \in \mathbb{N} : f^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i i!}{(1+x)^{i+1}} \Rightarrow f^{(i)}(0) = (-1)^i i!$
 $\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\alpha)^{n+2}}}_{\text{Reste d'ordre } n} \frac{x^{n+1}}{(1+\alpha)^{n+2}}$, où $0 < \alpha < x$.

c $\ln(1+x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{i+1} x^i}{i} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+\alpha)^{n+1}}}_{\text{Reste d'ordre } n}$ où $0 < \alpha < x$.

d Comme seules les puissances impaires de x sont affectées d'un coefficient nul, tout développement d'ordre impair $n = 2k + 1$ coïncide avec celui de l'ordre pair précédent $n = 2k$:

$$\cos x = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} x^{2i}}{(2i)!} + \underbrace{\frac{(-1)^k (\cos \alpha)}{(2k+2)!} x^{2k+2}}_{\text{Reste d'ordre } 2k \text{ ou } 2k+1}, \quad \text{où } 0 < \alpha < x.$$

e $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i$, où $\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)! i!}$ est appelé « coefficient binomial ».

L'expression du reste est nulle car il s'agit d'un polynôme de degré $m < n$.

EXERCICE 27

Énoncé

Soit la fonction $f(x) = \ln(1+x)$.

- a** En utilisant le développement de Mac Laurin de $f(x)$, calculez la valeur de $\ln(1,1)$ avec une erreur inférieure à 0,001.
- b** Majorez l'erreur commise dans le calcul de $\ln(1,1)$ si on remplace $\ln(1+x)$ par son développement de Mac Laurin d'ordre 38.

Solution

- a** Le développement a été obtenu dans l'exercice précédent :

$$\ln(1+x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{i+1} x^i}{i} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+\alpha)^{n+1}}}_{\text{Reste d'ordre } n}, \text{ où } 0 < \alpha < x.$$

Pour que l'erreur soit inférieure à 0,001 : la valeur absolue du reste d'ordre p , noté R_p , doit être inférieure à 0,001 : $|R_p| = \left| \frac{(-1)^p p!}{(1+\alpha)^{p+1} (p+1)!} x^{p+1} \right| < 0,001$.

Or $\alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+\alpha)^{p+1}} < 1$. Comme on prend ici $x = 0,1$, il apparaît que si $p = 2$, alors :

$$|R_p| < \left| \frac{(-1)^p p!}{(p+1)!} (0,1)^{p+1} \right| = \frac{(0,1)^{p+1}}{p+1} < 0,001$$

L'approximation d'ordre 2 atteint donc la précision voulue : $\ln(1,1) \simeq 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} = 0,095$.

- b** L'erreur commise si on remplace $\ln(1+x)$ par son développement de Mac Laurin d'ordre 38 peut être majorée comme suit : $\left| \frac{f^{38}(\alpha)}{38!} (x)^{38} \right| = \left| \frac{(0,1)^{38}}{(1+\alpha)^{38} 38} \right| < \frac{(0,1)^{38}}{38}$.

Fonctions croissantes, décroissantes, concaves et convexes

EXERCICE 28

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez le domaine de définition, les régions de croissance, de décroissance, de concavité et de convexité des fonctions données.

- a** $f(x) = -x^2 - 1$.
- b** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.
- c** $f : [-5, 5] : x \rightarrow \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \in [-5, 1] \\ \ln x + 4 & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$.

Solution

a $D = \mathbb{R}$ (fonction polynôme) et f est deux fois dérivable dans \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -2x, \quad f''(x) = -2.$$

La fonction est croissante dans \mathbb{R}^- et décroissante dans \mathbb{R}^+ . Elle est concave dans \mathbb{R} .

b $D = \mathbb{R}$ (fonction polynôme) et f est deux fois dérivable dans \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4), \quad f''(x) = 6x + 4.$$

La fonction est croissante dans $(-\infty, -\frac{4}{3})$, puis décroissante dans $(-\frac{4}{3}, 0)$ et à nouveau croissante dans $(0, +\infty)$. Elle est concave dans $(-\infty, -\frac{2}{3})$, puis convexe dans $(-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Notons que, comme la fonction est partout continue, on peut indifféremment utiliser des sous-domaines ouverts ou fermés.

c $D = [-5, 5], f : [-5, 5] : x \rightarrow \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \in [-5, -3) \\ x + 3 & \text{si } x \in [-3, 1] \\ \ln x + 4 & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$ est dérivable dans $[-5, 5] \setminus \{-3\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-5, -3) \\ 1 & \text{si } x \in (-3, 1] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}, \text{ et } f \text{ est deux fois dérivable dans } [-5, 5] \setminus \{-3, 1\}.$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-5, 1) \setminus \{-3\} \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}.$$

La fonction est décroissante dans $[-5, -3)$ et croissante dans $(-3, 5]$. Elle est convexe dans $[-5, 1]$ et concave dans $[-3, 5]$ (à montrer en utilisant la définition). Notons que la fonction est concave et convexe sur $[-3, 1]$ où elle est linéaire.

EXERCICE 29**Énoncé**

Soit $f(x) = |2x + 1|$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

a Montrez, en revenant à la définition, que f est convexe dans \mathbb{R} .

b Montrez, en revenant à la définition, que g n'est pas convexe dans \mathbb{R}^+ .

Solution

a $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} |2(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) + 1| &= |2\lambda x_2 + 2(1 - \lambda)x_1 + 1| \\ &= |\lambda(2x_2 + 1) + (1 - \lambda)(2x_1 + 1)| \\ &\leq \lambda|2x_2 + 1| + (1 - \lambda)|2x_1 + 1| \end{aligned}$$

b On peut prendre par exemple :

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 14; \quad \lambda = \frac{1}{2} :$$

$$\sqrt{\frac{4}{2} + \frac{14}{2}} = \sqrt{9} = 3 > \frac{1}{2}\sqrt{4} + \frac{1}{2}\sqrt{14} = 1 + 1,87 = 2,87.$$

Applications à la gestion

EXERCICE 30

Énoncé

La fonction logistique, définie de façon générale par $f(x) = \frac{k}{1 + be^{-ax}}$ (avec $a, b, k \in \mathbb{R}$), est souvent utilisée pour modéliser des phénomènes de croissance avec saturation progressive. En marketing, elle permet de décrire, par exemple, la diffusion d'innovations technologiques dans le domaine industriel.

- a** Pour quelles valeurs de a et b cette fonction est-elle définie dans \mathbb{R} ?
b On donne les deux fonctions logistiques suivantes.

$$g(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad h(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Déterminez les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ainsi que les asymptotes éventuelles de ces deux fonctions. Esquissez-en le graphe. Déduisez-en laquelle des deux semble la mieux adaptée à représenter la diffusion d'une innovation technologique.

Solution

- a** La fonction est définie à condition que $1 + be^{-ax} \neq 0$
- si $b \geq 0$ et $a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 + be^{-ax} \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}$.
 - si $b < 0$ et $a \neq 0 : 1 + be^{-ax} \neq 0 \Leftrightarrow be^{-ax} \neq -1 \Leftrightarrow e^{-ax} \neq -\frac{1}{b} \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{a} \ln\left(-\frac{1}{b}\right)$.
 - si $b < 0, b \neq -1$ et $a = 0 : D = \mathbb{R}$.
 - si $b = -1$ et $a = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ n'est pas définie.

En conclusion : soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$, soit $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}_0^- \setminus \{-1\}$.

- b** Pour la fonction g , on a $D = DC = DD = \mathbb{R}_0$ et $D'_D = D'_G = \mathbb{R}$.

Recherche des asymptotes verticales :

$$D'_G \setminus DC = D'_D \setminus DC = \{0\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - e^{-x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - e^{-x}} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow AV \equiv x = 0 \text{ bilatérale.}$$

Recherche des asymptotes horizontales/obliques :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1 \Rightarrow AH_1 \equiv y = 1 \text{ à droite.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 0 \Rightarrow AH_2 \equiv y = 0 \text{ à gauche.}$$

Pour la fonction h , on a : $D = DC = DD = \mathbb{R}$, pas d'AV, $AH_1 \equiv y = 1$ à droite et $AH_2 \equiv y = 0$ à gauche.

Cette seconde fonction (voir figure 3.12, page suivante), d'allure sigmoïdale (en « S »), est clairement la mieux adaptée à la modélisation du processus de diffusion d'une innovation technologique (interpréter x comme le temps et $h(x)$ comme la part de pénétration) La fonction est en effet croissante d'abord convexe puis concave (saturation progressive) et tend asymptotiquement vers 100 %.

Figure 3.11

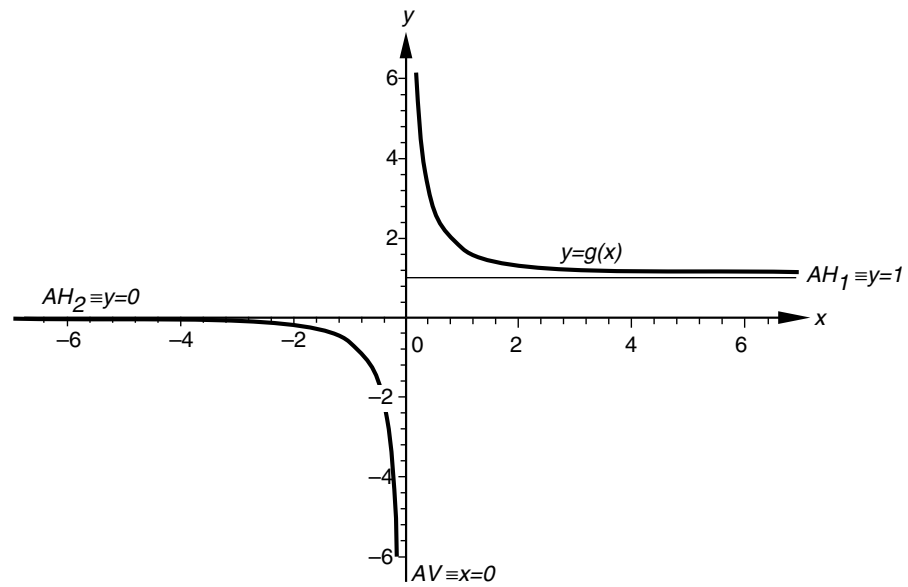
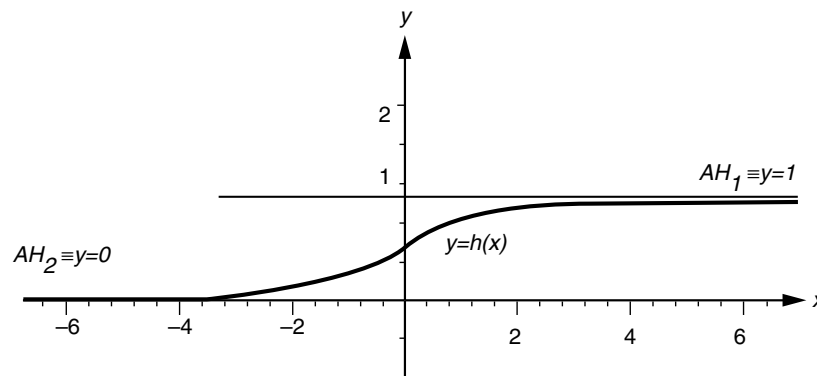


Figure 3.12



EXERCICE 31

Énoncé

Montrez que la fonction de production définie par $y = \sqrt{q}$ est croissante et déterminez si les rendements sont croissants ou décroissants.

Solution

Cette fonction, définie et continue dans \mathbb{R}^+ , y est bien croissante puisque :

$$\forall q \in \mathbb{R}_0^+ : y' = \frac{1}{2\sqrt{q}} > 0.$$

Les rendements sont décroissants (fonction concave) puisque :

$$\forall q \in \mathbb{R}_0^+ : y'' = -\frac{1}{4\sqrt{q}^3} < 0.$$

EXERCICE 32

Énoncé

La fonction d'offre Q exprime la quantité produite q d'un bien en fonction de son prix p : $q = Q(p)$, où :

$$Q(p) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 < p < 2 \\ 8(6-p)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } 2 \leq p < 5 \\ (p-3)^3 & \text{si } p \geq 5 \end{cases}$$

- a** Montrez que Q est continue dans \mathbb{R}_0^+ et qu'elle est convexe dans chacun des sous-domaines $(0, 2)$; $(2, 5)$ et $(5, +\infty)$.
- b** Sur le graphe de la fonction, constatez visuellement qu'elle est globalement convexe dans \mathbb{R}_0^+ .

Solution

- a** Dans $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{2, 5\}$, $Q(p)$ est continue d'après les propriétés usuelles.

$$\text{En } p = 2 : \lim_{p \rightarrow 2^-} Q(p) = \lim_{p \rightarrow 2^+} Q(p) = 4 = Q(2)$$

$$\text{En } p = 5 : \lim_{p \rightarrow 5^-} Q(p) = \lim_{p \rightarrow 5^+} Q(p) = 8 = Q(5)$$

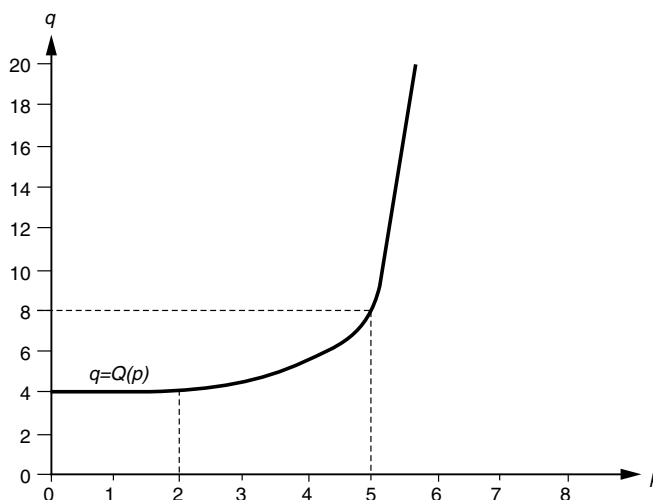
$$Q'(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 2 \\ \frac{4}{\sqrt{(6-p)^3}} & \text{si } 2 < p < 5 \\ 3(p-3)^2 & \text{si } p > 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad Q''(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 2 \\ \frac{6}{\sqrt{(6-p)^5}} & \text{si } 2 < p < 5 \\ 6(p-3) & \text{si } p > 5 \end{cases}$$

Cette fonction est convexe dans chacun des trois sous-domaines car :

$$\forall p \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{2, 5\} : Q''(p) \geq 0.$$

- b** La convexité de $Q(p)$ dans l'ensemble du domaine \mathbb{R}_0^+ est plus difficile à établir. On se contente ici de l'observer sur la figure 3.13. En effet, tout segment liant deux points du graphe $q = Q(p)$ est entièrement situé au-dessus de la courbe.

Figure 3.13



EXERCICE 33

Énoncé

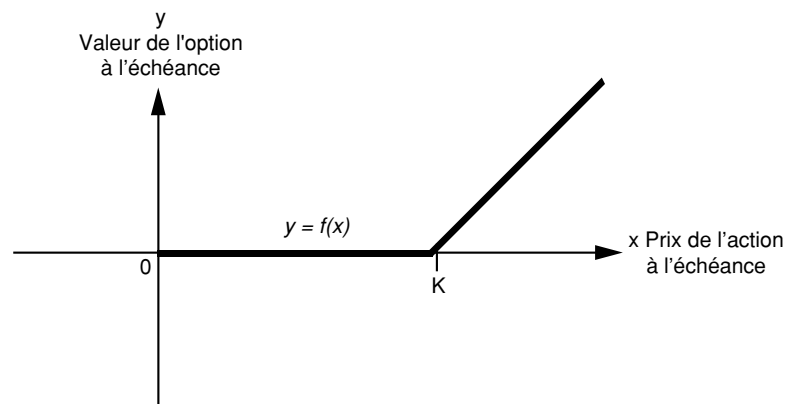
Une option d'achat CALL (européen) sur une action est un contrat qui confère à son détenteur, le droit (et non l'obligation) d'acheter cette action à l'échéance donnée pour un prix fixé (K). Déterminez analytiquement et graphiquement la valeur de cette option à l'échéance en fonction du prix de l'action sous-jacente. Donnez le domaine de définition, le domaine de continuité et de dérivabilité de cette fonction.

Solution

La fonction est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = \max\{x - K, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < K \\ x - K & \text{si } x \geq K \end{cases}$.

Le graphe est donné par la figure 3.14.

Figure 3.14



$DC = \mathbb{R}^+$ et $DD = \mathbb{R}^+ \setminus \{K\}$. En effet :

Dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{K\}$, la fonction est continue, (resp. dérivable) car les fonctions constante et polynôme sont continues, (resp. dérivables) dans \mathbb{R} ;

La fonction est continue en K : $\lim_{x \rightarrow K^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow K^-} 0 = 0 = f(K)$;

La fonction est non-dérivable en K : en effet, $\lim_{x \rightarrow K^-} \frac{f(x) - f(K)}{x - K} = \lim_{x \rightarrow K^-} \frac{0 - 0}{x - K} = 0$, et

$$\lim_{x \rightarrow K^+} \frac{f(x) - f(K)}{x - K} = \lim_{x \rightarrow K^+} \frac{x - K - 0}{x - K} = 1 \neq 0.$$

EXERCICE 34

Énoncé

La courbe d'expérience (« *experience curve* ») est un outil de planning stratégique utilisé pour la gestion des coûts de production d'une entreprise. Elle représente le coût marginal de fabrication d'un produit en fonction du volume de production accumulé.

Considérons la fonction suivante : $C_t = C_0 \left(\frac{V_t}{V_0} \right)^{-a}$, où $a \in \mathbb{R}^+$ est une constante qui dépend de l'industrie considérée, C_0 et C_t représentent les coûts par unité (déflatés)

respectivement en 0 et en t . V_0 et V_t sont les volumes de production accumulés respectivement en 0 et en t .

On prend, par exemple, le secteur de fabrication des circuits intégrés, pour lequel la valeur $a = 0,5$ est considérée comme raisonnable.

- a** Déterminez la courbe d'expérience C d'une société x en t fixé sachant qu'en 0, cette société fabriquait 1 000 unités à 10 000 € la pièce ;
- b** Déterminez ses domaines de définition, de continuité et de dérivabilité et les éventuelles asymptotes.
- c** Esquissez et interprétez le graphe de la fonction.

Solution

a $C = 10\,000 \left(\frac{V}{1\,000} \right)^{-0.5}$.

b $D = \mathbb{R}_0^+$ (les volumes de production accumulés sont toujours positifs) et la fonction est continue et dérivable en tout point de son domaine. Donc : $DC = DD = \mathbb{R}_0^+$

Recherche d'asymptotes verticales :

$D = D' = D'_G = DC = \mathbb{R}_0^+$ et $D'_D = \mathbb{R}^+ \Rightarrow D'_G \setminus DC = \emptyset$ et $D'_D \setminus DC = \{0\}$

$$\lim_{\substack{V \rightarrow 0 \\ V > 0}} C = \lim_{\substack{V \rightarrow 0 \\ V > 0}} 10\,000 \left(\frac{V}{1\,000} \right)^{-0.5} = \lim_{\substack{V \rightarrow 0 \\ V > 0}} 10\,000 (1\,000)^{0.5} \underbrace{\left(\frac{1}{V} \right)^{0.5}}_{\rightarrow +\infty}$$

$= +\infty \Rightarrow AV \equiv V = 0$ à gauche.

Recherche d'asymptotes horizontales ou obliques :

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} C = \lim_{V \rightarrow +\infty} 10\,000 \left(\frac{V}{1\,000} \right)^{-0.5} = \lim_{V \rightarrow +\infty} 10\,000 (1\,000)^{0.5} \underbrace{\left(\frac{1}{V} \right)^{0.5}}_{\rightarrow 0}$$

$= 0 \Rightarrow AH \equiv C = 0$ à droite.

c Le graphe est donné par la figure 3.15, page suivante.

Le graphe de cette courbe d'expérience montre que le coût de fabrication marginal d'un produit diminue à mesure que le nombre total d'unités produites augmente. Le coût de production évolue donc dans le temps : l'expérience, les économies d'échelle, et l'exécution de tâches répétitives contribuent à la baisse du coût de production d'une unité supplémentaire lorsque le volume total de production s'accroît. En outre, si le volume de production est quasi nul, le coût de fabrication de la première unité s'avère considérable (asymptote verticale à gauche en 0). À l'opposé, lorsque le volume de production devient très grand, le coût d'une unité de production supplémentaire apparaît négligeable (asymptote horizontale à droite).

Figure 3.15

