

Jaouad Madkour

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercices corrigés

Édition 2023

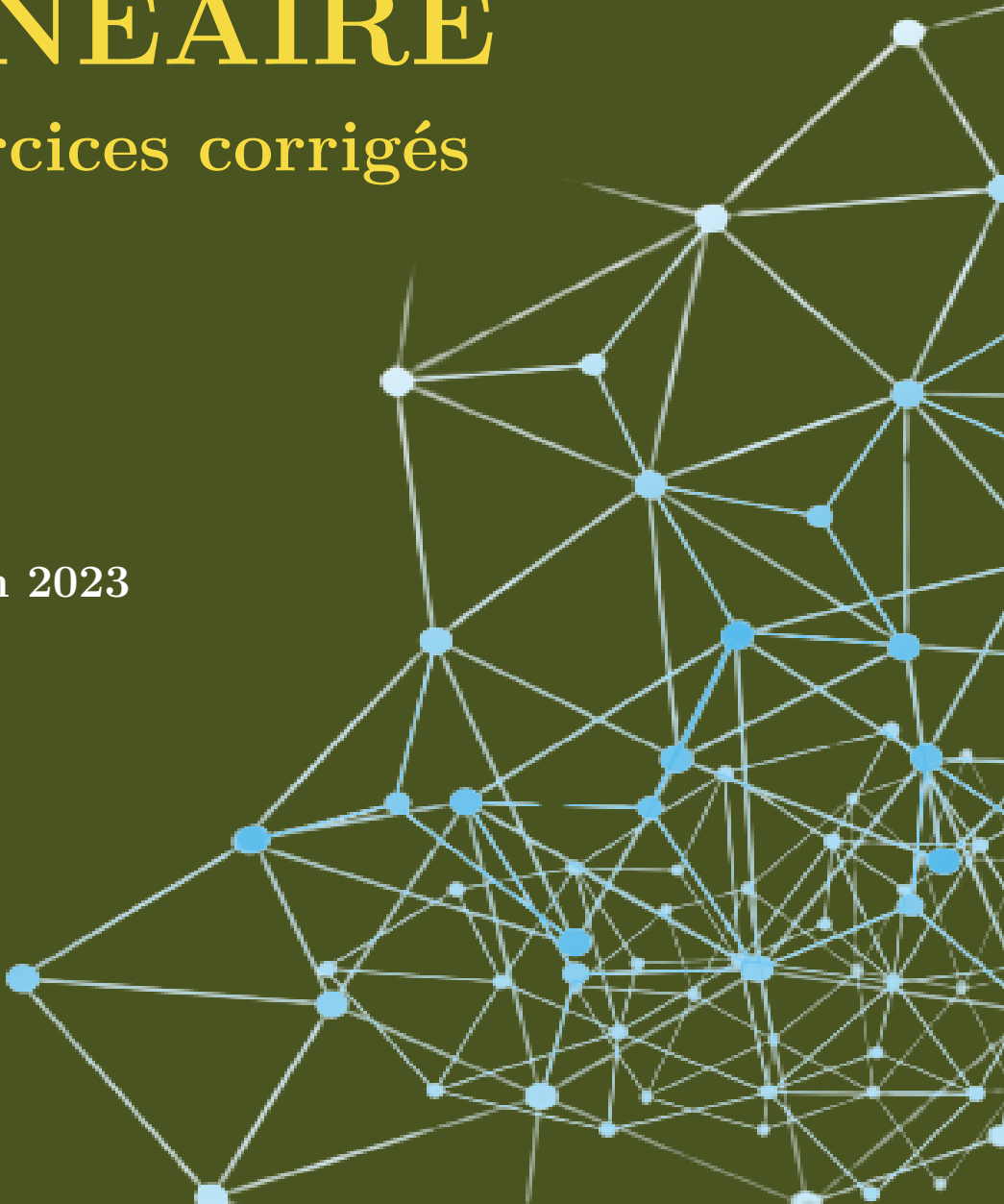


Table des matières

1 Opérations sur les vecteurs et les matrices	5
1.1 Comparaison	5
1.1.1 Comparaison de vecteurs	5
1.1.2 Comparaison de matrices	8
1.2 Addition et soustraction	10
1.2.1 Addition et soustraction de vecteurs	10
1.2.2 Addition et soustraction de matrices	15
1.3 Combinaisons	26
1.3.1 Combinaison linéaire de vecteurs	26
1.3.2 Combinaison convexe de vecteurs	34
1.3.3 Combinaison linéaire de matrices	41
1.3.4 Combinaison convexe de matrices	53
1.4 Produits	65
1.4.1 Produit scalaire de deux vecteurs	65
1.4.2 Carré scalaire d'un vecteur	73
1.4.3 Produit matriciel de deux matrices	76
1.4.4 Puissance d'une matrice carrée	158
2 Caractéristiques des matrices carrées	169
2.1 Trace d'une matrice carrée	169
2.2 Déterminant d'une matrice carrée	173
2.2.1 Cas simple de matrices carrées d'ordre 2	173
2.2.2 Cas particulier de matrices carrées d'ordre 3	175
2.2.3 Cas général de matrices carrées d'ordre n quelconque	178
2.3 Inverse d'une matrice carrée	181
2.4 Valeurs propres d'une matrice carrée	195

Introduction

Ce manuel d'Algèbre linéaire est une collection d'exercices corrigés d'algèbre linéaire destinée aux étudiants de l'enseignement supérieur poursuivant leurs études dans des disciplines scientifiques (mathématiques, physique, biologie, sciences économiques, gestion...). L'objectif étant de se familiariser avec les notions de matrices et de vecteurs et de s'exercer sur le calcul matriciel. Ainsi, dans le chapitre 1, introductif à l'algèbre linéaire, sont traités des exercices sur le calcul matriciel et dans le chapitre 2 sont abordées des caractéristiques propres aux matrices carrées. La résolution des systèmes linéaires ne fait pas partie de la présente édition, elle fera l'objet d'éditions futures.

Chapitre 1

Opérations sur les vecteurs et les matrices

Dans ce chapitre premier, sont traités des exercices sur le calcul matriciel. En particulier, les exercices traités concernent la comparaison de matrices (section 1.1), leur addition et leur soustraction (section 1.2), leurs combinaisons linéaires (section 1.3) et enfin les différents produits faisant intervenir des matrices (section 1.4).

1.1 Comparaison

1.1.1 Comparaison de vecteurs

Exercice 1 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = (8 \ 9) \qquad \mathbf{z} = (8 \ 9)$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} ?
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} ayant la même taille, on peut les comparer.
2. Ayant la même taille et les mêmes éléments correspondants, les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} sont en conséquence égaux entre eux.

Exercice 2 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = (4 \ 7 \ 4) \qquad \mathbf{z} = (4 \ 2 \ 8)$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} ?

2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} ayant la même taille, on peut les comparer.
2. Bien que les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} aient la même taille, leurs éléments correspondants ne sont pas identiques, ils ne sont en conséquence pas égaux entre eux.

Exercice 3 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} ?
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} ayant la même taille, on peut les comparer.
2. Ayant la même taille et les mêmes éléments correspondants, les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} sont en conséquence égaux entre eux.

Exercice 4 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} ?
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} ayant la même taille, on peut les comparer.
2. Bien que les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} aient la même taille, leurs éléments correspondants ne sont pas identiques, ils ne sont en conséquence pas égaux entre eux.

Exercice 5 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = (4 \quad 7 \quad 1) \qquad \mathbf{x} = (4 \quad 7 \quad 1)$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} ?
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} ayant la même taille, on peut les comparer.
2. Ayant la même taille et les mêmes éléments correspondants, les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} sont en conséquence égaux entre eux.

Exercice 6 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{u} = (3 \quad 6) \qquad \mathbf{y} = (8 \quad 2 \quad 2)$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} ?
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} n'ayant pas la même taille, on ne peut pas les comparer.
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} n'étant pas comparables, ils ne sont en conséquence pas égaux entre eux.

Exercice 7 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} ?
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} ayant la même taille, on peut les comparer.
2. Ayant la même taille et les mêmes éléments correspondants, les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} sont en conséquence égaux entre eux.

Exercice 8 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} ?
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} sont-ils égaux entre eux ?

Solution :

1. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} n'ayant pas la même taille, on ne peut pas les comparer.
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} n'étant pas comparables, ils ne sont en conséquence pas égaux entre eux.

1.1.2 Comparaison de matrices**Exercice 9 :**

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les matrices A et E ?
2. Les matrices A et E sont-elles égales entre elles ?

Solution :

1. Les matrices A et E ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes, on peut les comparer.
2. Ayant les mêmes dimensions et les mêmes éléments correspondants, les matrices A et E sont en conséquence égales entre elles.

Exercice 10 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les matrices C et E ?

2. Les matrices C et E sont-elles égales entre elles ?

Solution :

1. Les matrices C et E n'ayant pas les mêmes dimensions, on ne peut pas les comparer.
2. Les matrices C et E n'étant pas comparables, elles ne sont en conséquence pas égales entre elles.

Exercice 11 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les matrices B et F ?
2. Les matrices B et F sont-elles égales entre elles ?

Solution :

1. Les matrices B et F ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes, on peut les comparer.
2. Ayant les mêmes dimensions et les mêmes éléments correspondants, les matrices B et F sont en conséquence égales entre elles.

Exercice 12 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 7 \\ 8 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on comparer les matrices C et F ?
2. Les matrices C et F sont-elles égales entre elles ?

Solution :

1. Les matrices C et F n'ayant pas les mêmes dimensions, on ne peut pas les comparer.
2. Les matrices C et F n'étant pas comparables, elles ne sont en conséquence pas égales entre elles.

1.2 Addition et soustraction

1.2.1 Addition et soustraction de vecteurs

Exercice 13 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{v} = (1 \quad 7) \qquad \mathbf{z} = (7 \quad 4)$$

1. Calculer la somme $\mathbf{v} + \mathbf{z}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{v} - \mathbf{z}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{v} + \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{v} + \mathbf{z} = (1 \quad 7) + (7 \quad 4) = (1 + 7 \quad 7 + 4) = (8 \quad 11)$$

2. La différence $\mathbf{v} - \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{v} - \mathbf{z} = (1 \quad 7) - (7 \quad 4) = (1 - 7 \quad 7 - 4) = (-6 \quad 3)$$

Exercice 14 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $\mathbf{u} + \mathbf{z}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{u} - \mathbf{z}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{u} + \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{u} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 3 \\ 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. La différence $\mathbf{u} - \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{u} - \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 3 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{u} = (2 \quad 4 \quad 3) \qquad \mathbf{y} = (2 \quad 1 \quad 3)$$

1. Calculer la somme $\mathbf{u} + \mathbf{y}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{u} - \mathbf{y}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{u} + \mathbf{y}$ est égale à :

$$\mathbf{u} + \mathbf{y} = (2 \ 4 \ 3) + (2 \ 1 \ 3) = (2+2 \ 4+1 \ 3+3) = (4 \ 5 \ 6)$$

2. La différence $\mathbf{u} - \mathbf{y}$ est égale à :

$$\mathbf{u} - \mathbf{y} = (2 \ 4 \ 3) - (2 \ 1 \ 3) = (2-2 \ 4-1 \ 3-3) = (0 \ 3 \ 0)$$

Exercice 16 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $\mathbf{u} + \mathbf{z}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{u} - \mathbf{z}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{u} + \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{u} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+8 \\ 3+7 \\ 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2. La différence $\mathbf{u} - \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{u} - \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 \\ 3-7 \\ 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = (5 \ 9 \ 3 \ 5) \qquad \mathbf{x} = (8 \ 7 \ 6 \ 6)$$

1. Calculer la somme $\mathbf{w} + \mathbf{x}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{w} - \mathbf{x}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{w} + \mathbf{x}$ est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbf{w} + \mathbf{x} &= (5 \ 9 \ 3 \ 5) + (8 \ 7 \ 6 \ 6) \\ &= (5+8 \ 9+7 \ 3+6 \ 5+6) \\ &= (13 \ 16 \ 9 \ 11)\end{aligned}$$

2. La différence $\mathbf{w} - \mathbf{x}$ est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbf{w} - \mathbf{x} &= (5 \ 9 \ 3 \ 5) - (8 \ 7 \ 6 \ 6) \\ &= (5-8 \ 9-7 \ 3-6 \ 5-6) \\ &= (-3 \ 2 \ -3 \ -1)\end{aligned}$$

Exercice 18 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $\mathbf{u} + \mathbf{x}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{u} - \mathbf{x}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{u} + \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+3 \\ 7+4 \\ 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

2. La différence $\mathbf{u} - \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{u} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-3 \\ 7-4 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{v} = (2 \ 5) \qquad \mathbf{y} = (9 \ 7)$$

1. Calculer la somme $\mathbf{v} + \mathbf{y}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{v} - \mathbf{y}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{v} + \mathbf{y}$ est égale à :

$$\mathbf{v} + \mathbf{y} = (2 \ 5) + (9 \ 7) = (2 + 9 \ 5 + 7) = (11 \ 12)$$

2. La différence $\mathbf{v} - \mathbf{y}$ est égale à :

$$\mathbf{v} - \mathbf{y} = (2 \ 5) - (9 \ 7) = (2 - 9 \ 5 - 7) = (-7 \ -2)$$

Exercice 20 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $\mathbf{v} + \mathbf{x}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{v} - \mathbf{x}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{v} + \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{v} + \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 8 \\ 7 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2. La différence $\mathbf{v} - \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{v} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 8 \\ 7 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = (8 \ 5 \ 1) \qquad \mathbf{x} = (9 \ 5 \ 7)$$

1. Calculer la somme $\mathbf{u} + \mathbf{x}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{u} - \mathbf{x}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{u} + \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = (8 \ 5 \ 1) + (9 \ 5 \ 7) = (8 + 9 \ 5 + 5 \ 1 + 7) = (17 \ 10 \ 8)$$

2. La différence $\mathbf{u} - \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{u} - \mathbf{x} = (8 \ 5 \ 1) - (9 \ 5 \ 7) = (8 - 9 \ 5 - 5 \ 1 - 7) = (-1 \ 0 \ -6)$$

Exercice 22 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $\mathbf{w} + \mathbf{z}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{w} - \mathbf{z}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{w} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 8 \\ 6 + 1 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. La différence $\mathbf{w} - \mathbf{z}$ est égale à :

$$\mathbf{w} - \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 8 \\ 6 - 1 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{w} = (1 \ 5 \ 3 \ 7) \qquad \mathbf{y} = (7 \ 5 \ 4 \ 3)$$

1. Calculer la somme $\mathbf{w} + \mathbf{y}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{w} - \mathbf{y}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{w} + \mathbf{y}$ est égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} + \mathbf{y} &= (1 \ 5 \ 3 \ 7) + (7 \ 5 \ 4 \ 3) \\ &= (1 + 7 \ 5 + 5 \ 3 + 4 \ 7 + 3) \\ &= (8 \ 10 \ 7 \ 10) \end{aligned}$$

2. La différence $\mathbf{w} - \mathbf{y}$ est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbf{w} - \mathbf{y} &= (1 \ 5 \ 3 \ 7) - (7 \ 5 \ 4 \ 3) \\ &= (1 - 7 \ 5 - 5 \ 3 - 4 \ 7 - 3) \\ &= (-6 \ 0 \ -1 \ 4)\end{aligned}$$

Exercice 24 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $\mathbf{w} + \mathbf{x}$;
2. Calculer la différence $\mathbf{w} - \mathbf{x}$.

Solution :

1. La somme $\mathbf{w} + \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{w} + \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 2 + 3 \\ 2 + 1 \\ 9 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2. La différence $\mathbf{w} - \mathbf{x}$ est égale à :

$$\mathbf{w} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 8 \\ 2 - 3 \\ 2 - 1 \\ 9 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Addition et soustraction de matrices

Exercice 25 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $A + F$;
2. Calculer la différence $A - F$.

Solution :

1. La somme $A + F$ est égale à :

$$A + F = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+7 & 3+3 \\ 1+1 & 5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

2. La différence $A - F$ est égale à :

$$A - F = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-7 & 3-3 \\ 1-1 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 26 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + E$;
2. Calculer la différence $B - E$.

Solution :

1. La somme $B + E$ est égale à :

$$B + E = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+7 & 1+2 & 2+1 \\ 9+7 & 6+9 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 3 \\ 16 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

2. La différence $B - E$ est égale à :

$$B - E = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-7 & 1-2 & 2-1 \\ 9-7 & 6-9 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + F$;
2. Calculer la différence $B - F$.

Solution :

1. La somme $B + F$ est égale à :

$$B + F = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+9 & 8+2 \\ 8+7 & 2+4 \\ 6+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 15 & 6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

2. La différence $B - F$ est égale à :

$$B - F = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-9 & 8-2 \\ 8-7 & 2-4 \\ 6-3 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 28 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 8 & 9 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 7 \\ 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $C + D$;
2. Calculer la différence $C - D$.

Solution :

1. La somme $C + D$ est égale à :

$$C + D = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 8 & 9 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 9 & 7 \\ 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+9 & 9+9 & 5+7 \\ 8+6 & 9+9 & 4+4 \\ 1+2 & 6+7 & 8+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 18 & 12 \\ 14 & 18 & 8 \\ 3 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

2. La différence $C - D$ est égale à :

$$C - D = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 8 & 9 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 9 & 7 \\ 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-9 & 9-9 & 5-7 \\ 8-6 & 9-9 & 4-4 \\ 1-2 & 6-7 & 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 29 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $A + E$;
2. Calculer la différence $A - E$.

Solution :

1. La somme $A + E$ est égale à :

$$\begin{aligned} A + E &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+7 & 5+3 & 2+1 & 7+5 \\ 6+2 & 2+1 & 4+6 & 2+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 & 12 \\ 8 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La différence $A - E$ est égale à :

$$\begin{aligned} A - E &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-7 & 5-3 & 2-1 & 7-5 \\ 6-2 & 2-1 & 4-6 & 2-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 30 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 6 \\ 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $C + F$;
2. Calculer la différence $C - F$.

Solution :

1. La somme $C + F$ est égale à :

$$C + F = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 6 \\ 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9 & 4+3 \\ 8+1 & 5+6 \\ 2+4 & 7+6 \\ 4+1 & 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 9 & 11 \\ 6 & 13 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2. La différence $C - F$ est égale à :

$$C - F = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 6 \\ 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-9 & 4-3 \\ 8-1 & 5-6 \\ 2-4 & 7-6 \\ 4-1 & 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 7 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 31 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $C + E$;
2. Calculer la différence $C - E$.

Solution :

1. La somme $C + E$ est égale à :

$$\begin{aligned} C + E &= \begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8+7 & 8+8 & 5+5 & 3+4 \\ 5+7 & 3+2 & 5+1 & 7+1 \\ 5+3 & 9+9 & 7+9 & 3+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 16 & 10 & 7 \\ 12 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 18 & 16 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La différence $C - E$ est égale à :

$$\begin{aligned} C - E &= \begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8-7 & 8-8 & 5-5 & 3-4 \\ 5-7 & 3-2 & 5-1 & 7-1 \\ 5-3 & 9-9 & 7-9 & 3-5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 32 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 1 & 9 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + F$;

2. Calculer la différence $B - F$.

Solution :

1. La somme $B + F$ est égale à :

$$B + F = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 1 & 9 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+6 & 8+2 & 8+6 \\ 1+7 & 9+7 & 2+7 \\ 8+8 & 9+8 & 7+6 \\ 7+5 & 5+9 & 7+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 14 \\ 8 & 16 & 9 \\ 16 & 17 & 13 \\ 12 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

2. La différence $B - F$ est égale à :

$$B - F = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 1 & 9 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6 & 8-2 & 8-6 \\ 1-7 & 9-7 & 2-7 \\ 8-8 & 9-8 & 7-6 \\ 7-5 & 5-9 & 7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 8 & 6 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $C + D$;

2. Calculer la différence $C - D$.

Solution :

1. La somme $C + D$ est égale à :

$$\begin{aligned} C + D &= \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 8 & 6 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7+6 & 7+2 & 5+5 & 3+9 \\ 2+2 & 2+1 & 3+6 & 2+1 \\ 4+8 & 4+6 & 1+1 & 3+4 \\ 3+8 & 7+9 & 6+4 & 2+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 9 & 10 & 12 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \\ 12 & 10 & 2 & 7 \\ 11 & 16 & 10 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La différence $C - D$ est égale à :

$$\begin{aligned} C - D &= \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 8 & 6 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7-6 & 7-2 & 5-5 & 3-9 \\ 2-2 & 2-1 & 3-6 & 2-1 \\ 4-8 & 4-6 & 1-1 & 3-4 \\ 3-8 & 7-9 & 6-4 & 2-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 34 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $A + D$;
2. Calculer la différence $A - D$.

Solution :

1. La somme $A + D$ est égale à :

$$A + D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7 & 7+8 \\ 5+2 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

2. La différence $A - D$ est égale à :

$$A - D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & 7-8 \\ 5-2 & 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 35 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + E$;
2. Calculer la différence $B - E$.

Solution :

1. La somme $B + E$ est égale à :

$$B + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+8 & 5+1 \\ 1+7 & 3+3 & 4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 6 \\ 8 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

2. La différence $B - E$ est égale à :

$$B - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 2-8 & 5-1 \\ 1-7 & 3-3 & 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 36 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculer la somme $A + D$;
- Calculer la différence $A - D$.

Solution :

1. La somme $A + D$ est égale à :

$$A + D = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+1 & 7+9 \\ 5+3 & 7+9 \\ 9+3 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 16 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

2. La différence $A - D$ est égale à :

$$A - D = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-1 & 7-9 \\ 5-3 & 7-9 \\ 9-3 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 37 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

- Calculer la somme $B + D$;
- Calculer la différence $B - D$.

Solution :

1. La somme $B + D$ est égale à :

$$B + D = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+1 & 2+3 & 9+1 \\ 5+5 & 9+1 & 8+5 \\ 1+3 & 4+6 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 10 & 10 & 13 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

2. La différence $B - D$ est égale à :

$$B - D = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-1 & 2-3 & 9-1 \\ 5-5 & 9-1 & 8-5 \\ 1-3 & 4-6 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 38 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 8 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + D$;
2. Calculer la différence $B - D$.

Solution :

1. La somme $B + D$ est égale à :

$$\begin{aligned} B + D &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 8 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8+3 & 2+2 & 3+1 & 2+8 \\ 8+9 & 6+7 & 6+2 & 1+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 4 & 10 \\ 17 & 13 & 8 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La différence $B - D$ est égale à :

$$\begin{aligned} B - D &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 8 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8-3 & 2-2 & 3-1 & 2-8 \\ 8-9 & 6-7 & 6-2 & 1-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 39 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 5 \\ 2 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + F$;
2. Calculer la différence $B - F$.

Solution :

1. La somme $B + F$ est égale à :

$$B + F = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 5 \\ 2 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7 & 7+2 \\ 8+9 & 5+3 \\ 2+5 & 9+9 \\ 3+4 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 17 & 8 \\ 7 & 18 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

2. La différence $B - F$ est égale à :

$$B - F = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 5 \\ 2 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-7 & 7-2 \\ 8-9 & 5-3 \\ 2-5 & 9-9 \\ 3-4 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 40 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + F$;
2. Calculer la différence $B - F$.

Solution :

1. La somme $B + F$ est égale à :

$$\begin{aligned} B + F &= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9+3 & 9+6 & 6+3 & 5+4 \\ 7+6 & 6+2 & 7+1 & 7+3 \\ 6+4 & 2+1 & 4+5 & 6+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 15 & 9 & 9 \\ 13 & 8 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La différence $B - F$ est égale à :

$$\begin{aligned} B - F &= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9-3 & 9-6 & 6-3 & 5-4 \\ 7-6 & 6-2 & 7-1 & 7-3 \\ 6-4 & 2-1 & 4-5 & 6-4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 41 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $B + D$;
2. Calculer la différence $B - D$.

Solution :

1. La somme $B + D$ est égale à :

$$B + D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+8 & 3+2 \\ 2+4 & 8+3 & 1+3 \\ 8+7 & 7+1 & 7+4 \\ 2+6 & 7+6 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 6 & 11 & 4 \\ 15 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 9 \end{pmatrix}$$

2. La différence $B - D$ est égale à :

$$B - D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-8 & 3-2 \\ 2-4 & 8-3 & 1-3 \\ 8-7 & 7-1 & 7-4 \\ 2-6 & 7-6 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 42 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la somme $A + D$;
2. Calculer la différence $A - D$.

Solution :

1. La somme $A + D$ est égale à :

$$\begin{aligned}
 A + D &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 9+8 & 3+2 & 3+6 & 2+9 \\ 8+3 & 2+3 & 7+8 & 6+6 \\ 7+4 & 1+2 & 2+4 & 8+8 \\ 7+2 & 8+6 & 8+7 & 7+7 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 17 & 5 & 9 & 11 \\ 11 & 5 & 15 & 12 \\ 11 & 3 & 6 & 16 \\ 9 & 14 & 15 & 14 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. La différence $A - D$ est égale à :

$$\begin{aligned}
 A - D &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 9-8 & 3-2 & 3-6 & 2-9 \\ 8-3 & 2-3 & 7-8 & 6-6 \\ 7-4 & 1-2 & 2-4 & 8-8 \\ 7-2 & 8-6 & 8-7 & 7-7 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -7 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.3 Combinaisons

1.3.1 Combinaison linéaire de vecteurs

Exercice 43 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{u} par le scalaire 8 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{y} par le scalaire 7 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $8\mathbf{u} + 7\mathbf{y}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{u} par le scalaire 8 est égale à :

$$8\mathbf{u} = 8 \times \begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix} = (8 \times 6 \quad 8 \times 6) = (48 \quad 48)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{y} par le scalaire 7 est égale à :

$$7\mathbf{y} = 7 \times \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} = (7 \times 6 \quad 7 \times 5) = (42 \quad 35)$$

3. La combinaison linéaire $8\mathbf{u} + 7\mathbf{y}$ est égale à :

$$8\mathbf{u} + 7\mathbf{y} = (48 \quad 48) + (42 \quad 35) = (90 \quad 83)$$

Exercice 44 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 8 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 6 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $8\mathbf{w} + 6\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 8 est égale à :

$$8\mathbf{w} = 8 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 6 \\ 8 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 6 est égale à :

$$6\mathbf{x} = 6 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 6 \\ 6 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 30 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $8\mathbf{w} + 6\mathbf{x}$ est égale à :

$$8\mathbf{w} + 6\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 48 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 38 \end{pmatrix}$$

Exercice 45 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = (1 \quad 2 \quad 3) \qquad \mathbf{z} = (9 \quad 5 \quad 3)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{u} par le scalaire 9 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 4 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $9\mathbf{u} + 4\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{u} par le scalaire 9 est égale à :

$$9\mathbf{u} = 9 \times (1 \quad 2 \quad 3) = (9 \times 1 \quad 9 \times 2 \quad 9 \times 3) = (9 \quad 18 \quad 27)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 4 est égale à :

$$4\mathbf{z} = 4 \times (9 \quad 5 \quad 3) = (4 \times 9 \quad 4 \times 5 \quad 4 \times 3) = (36 \quad 20 \quad 12)$$

3. La combinaison linéaire $9\mathbf{u} + 4\mathbf{z}$ est égale à :

$$9\mathbf{u} + 4\mathbf{z} = (9 \quad 18 \quad 27) + (36 \quad 20 \quad 12) = (45 \quad 38 \quad 39)$$

Exercice 46 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 3 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 5 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $3\mathbf{v} + 5\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 3 est égale à :

$$3\mathbf{v} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times 8 \\ 3 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 21 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 5 est égale à :

$$5\mathbf{z} = 5 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 6 \\ 5 \times 9 \\ 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 20 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $3\mathbf{v} + 5\mathbf{z}$ est égale à :

$$3\mathbf{v} + 5\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 69 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Exercice 47 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = (5 \quad 6 \quad 3 \quad 5) \qquad \mathbf{x} = (1 \quad 2 \quad 7 \quad 6)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 9 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 8 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $9\mathbf{w} + 8\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 9 est égale à :

$$9\mathbf{w} = 9 \times (5 \quad 6 \quad 3 \quad 5) = (9 \times 5 \quad 9 \times 6 \quad 9 \times 3 \quad 9 \times 5) = (45 \quad 54 \quad 27 \quad 45)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 8 est égale à :

$$8\mathbf{x} = 8 \times (1 \quad 2 \quad 7 \quad 6) = (8 \times 1 \quad 8 \times 2 \quad 8 \times 7 \quad 8 \times 6) = (8 \quad 16 \quad 56 \quad 48)$$

3. La combinaison linéaire $9\mathbf{w} + 8\mathbf{x}$ est égale à :

$$9\mathbf{w} + 8\mathbf{x} = (45 \quad 54 \quad 27 \quad 45) + (8 \quad 16 \quad 56 \quad 48) = (53 \quad 70 \quad 83 \quad 93)$$

Exercice 48 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{u} par le scalaire 5 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 2 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $5\mathbf{u} + 2\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{u} par le scalaire 5 est égale à :

$$5\mathbf{u} = 5 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 3 \\ 5 \times 4 \\ 5 \times 9 \\ 5 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 45 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 2 est égale à :

$$2\mathbf{z} = 2 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 \\ 2 \times 3 \\ 2 \times 7 \\ 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $5\mathbf{u} + 2\mathbf{z}$ est égale à :

$$5\mathbf{u} + 2\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 45 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 26 \\ 59 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Exercice 49 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = (9 \ 5) \qquad \mathbf{x} = (9 \ 5)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{u} par le scalaire 4 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 4 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $4\mathbf{u} + 4\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{u} par le scalaire 4 est égale à :

$$4\mathbf{u} = 4 \times (9 \ 5) = (4 \times 9 \ 4 \times 5) = (36 \ 20)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 4 est égale à :

$$4\mathbf{x} = 4 \times (9 \ 5) = (4 \times 9 \ 4 \times 5) = (36 \ 20)$$

3. La combinaison linéaire $4\mathbf{u} + 4\mathbf{x}$ est égale à :

$$4\mathbf{u} + 4\mathbf{x} = (36 \ 20) + (36 \ 20) = (72 \ 40)$$

Exercice 50 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 7 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 5 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $7\mathbf{v} + 5\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 7 est égale à :

$$7\mathbf{v} = 7 \times \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 7 \\ 7 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 63 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 5 est égale à :

$$5\mathbf{x} = 5 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 4 \\ 5 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 45 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $7\mathbf{v} + 5\mathbf{x}$ est égale à :

$$7\mathbf{v} + 5\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 49 \\ 63 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 108 \end{pmatrix}$$

Exercice 51 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = (8 \quad 9 \quad 3) \qquad \mathbf{x} = (1 \quad 7 \quad 7)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 7 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 2 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $7\mathbf{v} + 2\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 7 est égale à :

$$7\mathbf{v} = 7 \times (8 \quad 9 \quad 3) = (7 \times 8 \quad 7 \times 9 \quad 7 \times 3) = (56 \quad 63 \quad 21)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 2 est égale à :

$$2\mathbf{x} = 2 \times (1 \quad 7 \quad 7) = (2 \times 1 \quad 2 \times 7 \quad 2 \times 7) = (2 \quad 14 \quad 14)$$

3. La combinaison linéaire $7\mathbf{v} + 2\mathbf{x}$ est égale à :

$$7\mathbf{v} + 2\mathbf{x} = (56 \ 63 \ 21) + (2 \ 14 \ 14) = (58 \ 77 \ 35)$$

Exercice 52 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 2 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 4 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $2\mathbf{w} + 4\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 2 est égale à :

$$2\mathbf{w} = 2 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 \\ 2 \times 5 \\ 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 4 est égale à :

$$4\mathbf{z} = 4 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 \\ 4 \times 2 \\ 4 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $2\mathbf{w} + 4\mathbf{z}$ est égale à :

$$2\mathbf{w} + 4\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Exercice 53 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = (6 \ 8 \ 8 \ 3) \qquad \mathbf{x} = (3 \ 3 \ 3 \ 5)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 6 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 9 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $6\mathbf{w} + 9\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 6 est égale à :

$$6\mathbf{w} = 6 \times (6 \ 8 \ 8 \ 3) = (6 \times 6 \ 6 \times 8 \ 6 \times 8 \ 6 \times 3) = (36 \ 48 \ 48 \ 18)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 9 est égale à :

$$9\mathbf{x} = 9 \times (3 \ 3 \ 3 \ 5) = (9 \times 3 \ 9 \times 3 \ 9 \times 3 \ 9 \times 5) = (27 \ 27 \ 27 \ 45)$$

3. La combinaison linéaire $6\mathbf{w} + 9\mathbf{x}$ est égale à :

$$6\mathbf{w} + 9\mathbf{x} = (36 \ 48 \ 48 \ 18) + (27 \ 27 \ 27 \ 45) = (63 \ 75 \ 75 \ 63)$$

Exercice 54 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 8 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 6 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $8\mathbf{w} + 6\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 8 est égale à :

$$8\mathbf{w} = 8 \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 5 \\ 8 \times 1 \\ 8 \times 8 \\ 8 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 64 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 6 est égale à :

$$6\mathbf{z} = 6 \times \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 9 \\ 6 \times 8 \\ 6 \times 2 \\ 6 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 48 \\ 12 \\ 42 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $8\mathbf{w} + 6\mathbf{z}$ est égale à :

$$8\mathbf{w} + 6\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 64 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 \\ 48 \\ 12 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 56 \\ 76 \\ 50 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Combinaison convexe de vecteurs

Exercice 55 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{u} par le scalaire 0.7 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{y} par le scalaire 0.3 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.7\mathbf{u} + 0.3\mathbf{y}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{u} par le scalaire 0.7 est égale à :

$$0.7\mathbf{u} = 0.7 \times \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \times 2 & 0.7 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 & 6.3 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{y} par le scalaire 0.3 est égale à :

$$0.3\mathbf{y} = 0.3 \times \begin{pmatrix} 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \times 9 & 0.3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.7\mathbf{u} + 0.3\mathbf{y}$ est égale à :

$$0.7\mathbf{u} + 0.3\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1.4 & 6.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.7 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 & 6.6 \end{pmatrix}$$

Exercice 56 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.41 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.59 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.41\mathbf{w} + 0.59\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.41 est égale à :

$$0.41\mathbf{w} = 0.41 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.41 \times 1 \\ 0.41 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.82 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.59 est égale à :

$$0.59\mathbf{z} = 0.59 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.59 \times 4 \\ 0.59 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.36 \\ 2.95 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.41\mathbf{w} + 0.59\mathbf{z}$ est égale à :

$$0.41\mathbf{w} + 0.59\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.82 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.36 \\ 2.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.77 \\ 3.77 \end{pmatrix}$$

Exercice 57 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = (9 \quad 2 \quad 8) \qquad \mathbf{x} = (4 \quad 4 \quad 9)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.73 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.27 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.73\mathbf{v} + 0.27\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.73 est égale à :

$$0.73\mathbf{v} = 0.73 \times (9 \quad 2 \quad 8) = (0.73 \times 9 \quad 0.73 \times 2 \quad 0.73 \times 8) = (6.57 \quad 1.46 \quad 5.84)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.27 est égale à :

$$0.27\mathbf{x} = 0.27 \times (4 \quad 4 \quad 9) = (0.27 \times 4 \quad 0.27 \times 4 \quad 0.27 \times 9) = (1.08 \quad 1.08 \quad 2.43)$$

3. La combinaison convexe $0.73\mathbf{v} + 0.27\mathbf{x}$ est égale à :

$$0.73\mathbf{v} + 0.27\mathbf{x} = (6.57 \quad 1.46 \quad 5.84) + (1.08 \quad 1.08 \quad 2.43) = (7.65 \quad 2.54 \quad 8.27)$$

Exercice 58 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.48 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.52 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.48\mathbf{v} + 0.52\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.48 est égale à :

$$0.48\mathbf{v} = 0.48 \times \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \times 7 \\ 0.48 \times 7 \\ 0.48 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.36 \\ 3.36 \\ 1.92 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.52 est égale à :

$$0.52\mathbf{x} = 0.52 \times \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.52 \times 9 \\ 0.52 \times 6 \\ 0.52 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.68 \\ 3.12 \\ 2.08 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.48\mathbf{v} + 0.52\mathbf{x}$ est égale à :

$$0.48\mathbf{v} + 0.52\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3.36 \\ 3.36 \\ 1.92 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.68 \\ 3.12 \\ 2.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.04 \\ 6.48 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

Exercice 59 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = (4 \quad 1 \quad 9 \quad 8) \qquad \mathbf{x} = (4 \quad 5 \quad 3 \quad 5)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{u} par le scalaire 0.44 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.56 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.44\mathbf{u} + 0.56\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{u} par le scalaire 0.44 est égale à :

$$0.44\mathbf{u} = 0.44 \times (4 \quad 1 \quad 9 \quad 8) = (0.44 \times 4 \quad 0.44 \times 1 \quad 0.44 \times 9 \quad 0.44 \times 8) = (1.76 \quad 0.44 \quad 3.96 \quad 3.52)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.56 est égale à :

$$0.56\mathbf{x} = 0.56 \times (4 \quad 5 \quad 3 \quad 5) = (0.56 \times 4 \quad 0.56 \times 5 \quad 0.56 \times 3 \quad 0.56 \times 5) = (2.24 \quad 2.8 \quad 1.68 \quad 2.8)$$

3. La combinaison convexe $0.44\mathbf{u} + 0.56\mathbf{x}$ est égale à :

$$0.44\mathbf{u} + 0.56\mathbf{x} = (1.76 \quad 0.44 \quad 3.96 \quad 3.52) + (2.24 \quad 2.8 \quad 1.68 \quad 2.8) = (4.0 \quad 3.24 \quad 5.64 \quad 6.32)$$

Exercice 60 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.23 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.77 ;

3. Calculer la combinaison convexe $0.23\mathbf{v} + 0.77\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.23 est égale à :

$$0.23\mathbf{v} = 0.23 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.23 \times 3 \\ 0.23 \times 5 \\ 0.23 \times 5 \\ 0.23 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.69 \\ 1.15 \\ 1.15 \\ 2.07 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.77 est égale à :

$$0.77\mathbf{z} = 0.77 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.77 \times 3 \\ 0.77 \times 6 \\ 0.77 \times 2 \\ 0.77 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.31 \\ 4.62 \\ 1.54 \\ 3.08 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.23\mathbf{v} + 0.77\mathbf{z}$ est égale à :

$$0.23\mathbf{v} + 0.77\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0.69 \\ 1.15 \\ 1.15 \\ 2.07 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.31 \\ 4.62 \\ 1.54 \\ 3.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 \\ 5.77 \\ 2.69 \\ 5.15 \end{pmatrix}$$

Exercice 61 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{v} = (9 \quad 9) \qquad \mathbf{z} = (2 \quad 2)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.36 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.64 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.36\mathbf{v} + 0.64\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.36 est égale à :

$$0.36\mathbf{v} = 0.36 \times (9 \quad 9) = (0.36 \times 9 \quad 0.36 \times 9) = (3.24 \quad 3.24)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.64 est égale à :

$$0.64\mathbf{z} = 0.64 \times (2 \quad 2) = (0.64 \times 2 \quad 0.64 \times 2) = (1.28 \quad 1.28)$$

3. La combinaison convexe $0.36\mathbf{v} + 0.64\mathbf{z}$ est égale à :

$$0.36\mathbf{v} + 0.64\mathbf{z} = (3.24 \quad 3.24) + (1.28 \quad 1.28) = (4.52 \quad 4.52)$$

Exercice 62 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.94 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{y} par le scalaire 0.06 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.94\mathbf{v} + 0.06\mathbf{y}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.94 est égale à :

$$0.94\mathbf{v} = 0.94 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.94 \times 2 \\ 0.94 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.88 \\ 3.76 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{y} par le scalaire 0.06 est égale à :

$$0.06\mathbf{y} = 0.06 \times \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 \times 9 \\ 0.06 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.06 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.94\mathbf{v} + 0.06\mathbf{y}$ est égale à :

$$0.94\mathbf{v} + 0.06\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1.88 \\ 3.76 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.42 \\ 3.82 \end{pmatrix}$$

Exercice 63 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = (5 \quad 3 \quad 7) \qquad \mathbf{z} = (3 \quad 5 \quad 5)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.36 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.64 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.36\mathbf{w} + 0.64\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.36 est égale à :

$$0.36\mathbf{w} = 0.36 \times (5 \quad 3 \quad 7) = (0.36 \times 5 \quad 0.36 \times 3 \quad 0.36 \times 7) = (1.8 \quad 1.08 \quad 2.52)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.64 est égale à :

$$0.64\mathbf{z} = 0.64 \times (3 \quad 5 \quad 5) = (0.64 \times 3 \quad 0.64 \times 5 \quad 0.64 \times 5) = (1.92 \quad 3.2 \quad 3.2)$$

3. La combinaison convexe $0.36\mathbf{w} + 0.64\mathbf{z}$ est égale à :

$$0.36\mathbf{w} + 0.64\mathbf{z} = (1.8 \quad 1.08 \quad 2.52) + (1.92 \quad 3.2 \quad 3.2) = (3.72 \quad 4.28 \quad 5.72)$$

Exercice 64 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.14 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.86 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.14\mathbf{w} + 0.86\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.14 est égale à :

$$0.14\mathbf{w} = 0.14 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.14 \times 6 \\ 0.14 \times 6 \\ 0.14 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.84 \\ 0.84 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.86 est égale à :

$$0.86\mathbf{x} = 0.86 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 \times 4 \\ 0.86 \times 9 \\ 0.86 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.44 \\ 7.74 \\ 6.02 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.14\mathbf{w} + 0.86\mathbf{x}$ est égale à :

$$0.14\mathbf{w} + 0.86\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.84 \\ 0.84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.44 \\ 7.74 \\ 6.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.28 \\ 8.58 \\ 6.86 \end{pmatrix}$$

Exercice 65 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = (1 \quad 5 \quad 3 \quad 5) \qquad \mathbf{z} = (1 \quad 3 \quad 9 \quad 1)$$

1. Multiplier le vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.75 ;
2. Multiplier le vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.25 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.75\mathbf{w} + 0.25\mathbf{z}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{w} par le scalaire 0.75 est égale à :

$$0.75\mathbf{w} = 0.75 \times (1 \ 5 \ 3 \ 5) = (0.75 \times 1 \ 0.75 \times 5 \ 0.75 \times 3 \ 0.75 \times 5) = (0.75 \ 3.75 \ 2.25 \ 3.75)$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{z} par le scalaire 0.25 est égale à :

$$0.25\mathbf{z} = 0.25 \times (1 \ 3 \ 9 \ 1) = (0.25 \times 1 \ 0.25 \times 3 \ 0.25 \times 9 \ 0.25 \times 1) = (0.25 \ 0.75 \ 2.25 \ 0.25)$$

3. La combinaison convexe $0.75\mathbf{w} + 0.25\mathbf{z}$ est égale à :

$$0.75\mathbf{w} + 0.25\mathbf{z} = (0.75 \ 3.75 \ 2.25 \ 3.75) + (0.25 \ 0.75 \ 2.25 \ 0.25) = (1.0 \ 4.5 \ 4.5 \ 4.0)$$

Exercice 66 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Multiplier le vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.56 ;
- Multiplier le vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.44 ;
- Calculer la combinaison convexe $0.56\mathbf{v} + 0.44\mathbf{x}$.

Solution :

1. La multiplication du vecteur \mathbf{v} par le scalaire 0.56 est égale à :

$$0.56\mathbf{v} = 0.56 \times \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 \times 9 \\ 0.56 \times 9 \\ 0.56 \times 8 \\ 0.56 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.04 \\ 5.04 \\ 4.48 \\ 1.12 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication du vecteur \mathbf{x} par le scalaire 0.44 est égale à :

$$0.44\mathbf{x} = 0.44 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 \times 1 \\ 0.44 \times 9 \\ 0.44 \times 7 \\ 0.44 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 3.96 \\ 3.08 \\ 3.08 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.56\mathbf{v} + 0.44\mathbf{x}$ est égale à :

$$0.56\mathbf{v} + 0.44\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5.04 \\ 5.04 \\ 4.48 \\ 1.12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.44 \\ 3.96 \\ 3.08 \\ 3.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.48 \\ 9.0 \\ 7.56 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Combinaison linéaire de matrices

Exercice 67 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice A par le scalaire 3;
2. Multiplier la matrice D par le scalaire 5;
3. Calculer la combinaison linéaire $3A + 5D$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice A par le scalaire 3 est égale à :

$$3A = 3 \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & 3 \times 1 \\ 3 \times 7 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice D par le scalaire 5 est égale à :

$$5D = 5 \times \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 3 \\ 5 \times 9 & 5 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 45 & 45 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $3A + 5D$ est égale à :

$$3A + 5D = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 21 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 45 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 66 & 51 \end{pmatrix}$$

Exercice 68 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice B par le scalaire 5;
2. Multiplier la matrice D par le scalaire 9;
3. Calculer la combinaison linéaire $5B + 9D$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice B par le scalaire 5 est égale à :

$$5B = 5 \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 4 & 5 \times 2 & 5 \times 4 \\ 5 \times 1 & 5 \times 5 & 5 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice D par le scalaire 9 est égale à :

$$9D = 9 \times \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \times 8 & 9 \times 7 & 9 \times 8 \\ 9 \times 8 & 9 \times 7 & 9 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 63 & 72 \\ 72 & 63 & 63 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $5B + 9D$ est égale à :

$$5B + 9D = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 72 & 63 & 72 \\ 72 & 63 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 & 73 & 92 \\ 77 & 88 & 73 \end{pmatrix}$$

Exercice 69 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice A par le scalaire 3;
2. Multiplier la matrice F par le scalaire 6;
3. Calculer la combinaison linéaire $3A + 6F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice A par le scalaire 3 est égale à :

$$3A = 3 \times \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 7 \\ 3 \times 5 & 3 \times 4 \\ 3 \times 5 & 3 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 12 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 6 est égale à :

$$6F = 6 \times \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 1 & 6 \times 9 \\ 6 \times 7 & 6 \times 1 \\ 6 \times 3 & 6 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 54 \\ 42 & 6 \\ 18 & 42 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $3A + 6F$ est égale à :

$$3A + 6F = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 12 \\ 15 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 54 \\ 42 & 6 \\ 18 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 75 \\ 57 & 18 \\ 33 & 69 \end{pmatrix}$$

Exercice 70 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice C par le scalaire 3 ;
2. Multiplier la matrice F par le scalaire 9 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $3C + 9F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice C par le scalaire 3 est égale à :

$$3C = 3 \times \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 8 & 3 \times 2 & 3 \times 5 \\ 3 \times 4 & 3 \times 9 & 3 \times 5 \\ 3 \times 7 & 3 \times 6 & 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 15 \\ 12 & 27 & 15 \\ 21 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 9 est égale à :

$$9F = 9 \times \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \times 3 & 9 \times 6 & 9 \times 7 \\ 9 \times 4 & 9 \times 8 & 9 \times 1 \\ 9 \times 4 & 9 \times 1 & 9 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 54 & 63 \\ 36 & 72 & 9 \\ 36 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $3C + 9F$ est égale à :

$$3C + 9F = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 15 \\ 12 & 27 & 15 \\ 21 & 18 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 & 54 & 63 \\ 36 & 72 & 9 \\ 36 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 60 & 78 \\ 48 & 99 & 24 \\ 57 & 27 & 18 \end{pmatrix}$$

Exercice 71 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice C par le scalaire 4 ;
2. Multiplier la matrice F par le scalaire 7 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $4C + 7F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice C par le scalaire 4 est égale à :

$$4C = 4 \times \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 7 & 4 \times 7 & 4 \times 4 & 4 \times 5 \\ 4 \times 6 & 4 \times 4 & 4 \times 5 & 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 28 & 16 & 20 \\ 24 & 16 & 20 & 8 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 7 est égale à :

$$7F = 7 \times \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 6 & 7 \times 6 & 7 \times 5 & 7 \times 7 \\ 7 \times 5 & 7 \times 1 & 7 \times 1 & 7 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 42 & 35 & 49 \\ 35 & 7 & 7 & 63 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $4C + 7F$ est égale à :

$$4C + 7F = \begin{pmatrix} 28 & 28 & 16 & 20 \\ 24 & 16 & 20 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42 & 42 & 35 & 49 \\ 35 & 7 & 7 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 70 & 51 & 69 \\ 59 & 23 & 27 & 71 \end{pmatrix}$$

Exercice 72 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 4 \\ 2 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice B par le scalaire 4 ;
2. Multiplier la matrice E par le scalaire 5 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $4B + 5E$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice B par le scalaire 4 est égale à :

$$4B = 4 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 & 4 \times 2 \\ 4 \times 7 & 4 \times 6 \\ 4 \times 8 & 4 \times 5 \\ 4 \times 7 & 4 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 28 & 24 \\ 32 & 20 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice E par le scalaire 5 est égale à :

$$5E = 5 \times \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 4 \\ 2 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 4 & 5 \times 4 \\ 5 \times 7 & 5 \times 4 \\ 5 \times 2 & 5 \times 9 \\ 5 \times 2 & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 35 & 20 \\ 10 & 45 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $4B + 5E$ est égale à :

$$4B + 5E = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 28 & 24 \\ 32 & 20 \\ 28 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 35 & 20 \\ 10 & 45 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 28 \\ 63 & 44 \\ 42 & 65 \\ 38 & 21 \end{pmatrix}$$

Exercice 73 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice B par le scalaire 8 ;
2. Multiplier la matrice E par le scalaire 2 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $8B + 2E$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice B par le scalaire 8 est égale à :

$$8B = 8 \times \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 7 & 8 \times 7 & 8 \times 5 & 8 \times 3 \\ 8 \times 6 & 8 \times 5 & 8 \times 8 & 8 \times 2 \\ 8 \times 6 & 8 \times 4 & 8 \times 1 & 8 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 56 & 40 & 24 \\ 48 & 40 & 64 & 16 \\ 48 & 32 & 8 & 40 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice E par le scalaire 2 est égale à :

$$2E = 2 \times \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 8 & 2 \times 1 & 2 \times 4 \\ 2 \times 9 & 2 \times 1 & 2 \times 3 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 8 & 2 \times 2 & 2 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 & 2 & 8 \\ 18 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 16 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $8B + 2E$ est égale à :

$$8B + 2E = \begin{pmatrix} 56 & 56 & 40 & 24 \\ 48 & 40 & 64 & 16 \\ 48 & 32 & 8 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 16 & 2 & 8 \\ 18 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 16 & 4 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 72 & 42 & 32 \\ 66 & 42 & 70 & 20 \\ 54 & 48 & 12 & 54 \end{pmatrix}$$

Exercice 74 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice B par le scalaire 7 ;
2. Multiplier la matrice D par le scalaire 5 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $7B + 5D$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice B par le scalaire 7 est égale à :

$$7B = 7 \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 4 & 7 \times 1 & 7 \times 5 \\ 7 \times 9 & 7 \times 4 & 7 \times 1 \\ 7 \times 2 & 7 \times 9 & 7 \times 8 \\ 7 \times 9 & 7 \times 9 & 7 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 7 & 35 \\ 63 & 28 & 7 \\ 14 & 63 & 56 \\ 63 & 63 & 56 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice D par le scalaire 5 est égale à :

$$5D = 5 \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 3 & 5 \times 7 \\ 5 \times 5 & 5 \times 3 & 5 \times 6 \\ 5 \times 1 & 5 \times 9 & 5 \times 2 \\ 5 \times 2 & 5 \times 7 & 5 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 35 \\ 25 & 15 & 30 \\ 5 & 45 & 10 \\ 10 & 35 & 15 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $7B + 5D$ est égale à :

$$7B + 5D = \begin{pmatrix} 28 & 7 & 35 \\ 63 & 28 & 7 \\ 14 & 63 & 56 \\ 63 & 63 & 56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 & 35 \\ 25 & 15 & 30 \\ 5 & 45 & 10 \\ 10 & 35 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 22 & 70 \\ 88 & 43 & 37 \\ 19 & 108 & 66 \\ 73 & 98 & 71 \end{pmatrix}$$

Exercice 75 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice A par le scalaire 8 ;
2. Multiplier la matrice F par le scalaire 9 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $8A + 9F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice A par le scalaire 8 est égale à :

$$8A = 8 \times \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 1 & 8 \times 9 & 8 \times 4 & 8 \times 1 \\ 8 \times 1 & 8 \times 4 & 8 \times 7 & 8 \times 8 \\ 8 \times 6 & 8 \times 2 & 8 \times 6 & 8 \times 2 \\ 8 \times 3 & 8 \times 9 & 8 \times 8 & 8 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 72 & 32 & 8 \\ 8 & 32 & 56 & 64 \\ 48 & 16 & 48 & 16 \\ 24 & 72 & 64 & 40 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 9 est égale à :

$$9F = 9 \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \times 3 & 9 \times 3 & 9 \times 7 & 9 \times 6 \\ 9 \times 5 & 9 \times 8 & 9 \times 7 & 9 \times 4 \\ 9 \times 9 & 9 \times 4 & 9 \times 5 & 9 \times 7 \\ 9 \times 5 & 9 \times 5 & 9 \times 7 & 9 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 63 & 54 \\ 45 & 72 & 63 & 36 \\ 81 & 36 & 45 & 63 \\ 45 & 45 & 63 & 63 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $8A + 9F$ est égale à :

$$8A + 9F = \begin{pmatrix} 8 & 72 & 32 & 8 \\ 8 & 32 & 56 & 64 \\ 48 & 16 & 48 & 16 \\ 24 & 72 & 64 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 & 27 & 63 & 54 \\ 45 & 72 & 63 & 36 \\ 81 & 36 & 45 & 63 \\ 45 & 45 & 63 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 99 & 95 & 62 \\ 53 & 104 & 119 & 100 \\ 129 & 52 & 93 & 79 \\ 69 & 117 & 127 & 103 \end{pmatrix}$$

Exercice 76 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice A par le scalaire 8 ;
2. Multiplier la matrice D par le scalaire 9 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $8A + 9D$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice A par le scalaire 8 est égale à :

$$8A = 8 \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 3 & 8 \times 4 \\ 8 \times 3 & 8 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 32 \\ 24 & 56 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice D par le scalaire 9 est égale à :

$$9D = 9 \times \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \times 5 & 9 \times 5 \\ 9 \times 6 & 9 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 45 \\ 54 & 72 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $8A + 9D$ est égale à :

$$8A + 9D = \begin{pmatrix} 24 & 32 \\ 24 & 56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 45 \\ 54 & 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 77 \\ 78 & 128 \end{pmatrix}$$

Exercice 77 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice C par le scalaire 3 ;
2. Multiplier la matrice F par le scalaire 7 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $3C + 7F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice C par le scalaire 3 est égale à :

$$3C = 3 \times \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 9 & 3 \times 1 & 3 \times 6 \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 7 est égale à :

$$7F = 7 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 2 & 7 \times 3 & 7 \times 9 \\ 7 \times 6 & 7 \times 4 & 7 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 63 \\ 42 & 28 & 42 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $3C + 7F$ est égale à :

$$3C + 7F = \begin{pmatrix} 27 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 21 & 63 \\ 42 & 28 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 24 & 81 \\ 51 & 37 & 57 \end{pmatrix}$$

Exercice 78 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice A par le scalaire 4 ;
2. Multiplier la matrice D par le scalaire 8 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $4A + 8D$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice A par le scalaire 4 est égale à :

$$4A = 4 \times \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 5 & 4 \times 5 \\ 4 \times 4 & 4 \times 2 \\ 4 \times 4 & 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 16 & 8 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice D par le scalaire 8 est égale à :

$$8D = 8 \times \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 8 & 8 \times 4 \\ 8 \times 9 & 8 \times 4 \\ 8 \times 5 & 8 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 72 & 32 \\ 40 & 56 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $4A + 8D$ est égale à :

$$4A + 8D = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 16 & 8 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 72 & 32 \\ 40 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 52 \\ 88 & 40 \\ 56 & 68 \end{pmatrix}$$

Exercice 79 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 8 & 3 & 8 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice B par le scalaire 6 ;
2. Multiplier la matrice F par le scalaire 4 ;

3. Calculer la combinaison linéaire $6B + 4F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice B par le scalaire 6 est égale à :

$$6B = 6 \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 8 & 3 & 8 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 3 & 6 \times 5 & 6 \times 8 \\ 6 \times 8 & 6 \times 3 & 6 \times 8 \\ 6 \times 8 & 6 \times 7 & 6 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 30 & 48 \\ 48 & 18 & 48 \\ 48 & 42 & 12 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 4 est égale à :

$$4F = 4 \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 & 4 \times 2 & 4 \times 4 \\ 4 \times 9 & 4 \times 5 & 4 \times 7 \\ 4 \times 6 & 4 \times 6 & 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 36 & 20 & 28 \\ 24 & 24 & 4 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $6B + 4F$ est égale à :

$$6B + 4F = \begin{pmatrix} 18 & 30 & 48 \\ 48 & 18 & 48 \\ 48 & 42 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 36 & 20 & 28 \\ 24 & 24 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 38 & 64 \\ 84 & 38 & 76 \\ 72 & 66 & 16 \end{pmatrix}$$

Exercice 80 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice A par le scalaire 9 ;

2. Multiplier la matrice F par le scalaire 7 ;

3. Calculer la combinaison linéaire $9A + 7F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice A par le scalaire 9 est égale à :

$$9A = 9 \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \times 1 & 9 \times 4 & 9 \times 3 & 9 \times 8 \\ 9 \times 4 & 9 \times 4 & 9 \times 8 & 9 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 27 & 72 \\ 36 & 36 & 72 & 54 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 7 est égale à :

$$7F = 7 \times \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 4 & 7 \times 4 & 7 \times 9 & 7 \times 5 \\ 7 \times 3 & 7 \times 5 & 7 \times 2 & 7 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 28 & 63 & 35 \\ 21 & 35 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $9A + 7F$ est égale à :

$$9A + 7F = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 27 & 72 \\ 36 & 36 & 72 & 54 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 & 28 & 63 & 35 \\ 21 & 35 & 14 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 64 & 90 & 107 \\ 57 & 71 & 86 & 103 \end{pmatrix}$$

Exercice 81 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice B par le scalaire 2 ;
2. Multiplier la matrice D par le scalaire 3 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $2B + 3D$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice B par le scalaire 2 est égale à :

$$2B = 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 6 \\ 2 \times 2 & 2 \times 5 \\ 2 \times 7 & 2 \times 1 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 10 \\ 14 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice D par le scalaire 3 est égale à :

$$3D = 3 \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 7 & 3 \times 1 \\ 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ 3 \times 1 & 3 \times 4 \\ 3 \times 2 & 3 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 12 \\ 6 & 21 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $2B + 3D$ est égale à :

$$2B + 3D = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 10 \\ 14 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 12 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 13 & 16 \\ 17 & 14 \\ 12 & 29 \end{pmatrix}$$

Exercice 82 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice C par le scalaire 8 ;
2. Multiplier la matrice E par le scalaire 4 ;
3. Calculer la combinaison linéaire $8C + 4E$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice C par le scalaire 8 est égale à :

$$8C = 8 \times \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 4 & 8 \times 6 & 8 \times 9 & 8 \times 8 \\ 8 \times 1 & 8 \times 9 & 8 \times 9 & 8 \times 2 \\ 8 \times 1 & 8 \times 1 & 8 \times 8 & 8 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 48 & 72 & 64 \\ 8 & 72 & 72 & 16 \\ 8 & 8 & 64 & 32 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice E par le scalaire 4 est égale à :

$$4E = 4 \times \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 6 & 4 \times 9 & 4 \times 4 & 4 \times 6 \\ 4 \times 2 & 4 \times 5 & 4 \times 4 & 4 \times 9 \\ 4 \times 5 & 4 \times 3 & 4 \times 4 & 4 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 36 & 16 & 24 \\ 8 & 20 & 16 & 36 \\ 20 & 12 & 16 & 36 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $8C + 4E$ est égale à :

$$8C + 4E = \begin{pmatrix} 32 & 48 & 72 & 64 \\ 8 & 72 & 72 & 16 \\ 8 & 8 & 64 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 36 & 16 & 24 \\ 8 & 20 & 16 & 36 \\ 20 & 12 & 16 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 84 & 88 & 88 \\ 16 & 92 & 88 & 52 \\ 28 & 20 & 80 & 68 \end{pmatrix}$$

Exercice 83 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 4 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice C par le scalaire 4;
2. Multiplier la matrice D par le scalaire 8;
3. Calculer la combinaison linéaire $4C + 8D$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice C par le scalaire 4 est égale à :

$$4C = 4 \times \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 4 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 6 & 4 \times 3 & 4 \times 8 \\ 4 \times 4 & 4 \times 9 & 4 \times 6 \\ 4 \times 4 & 4 \times 5 & 4 \times 3 \\ 4 \times 3 & 4 \times 9 & 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 12 & 32 \\ 16 & 36 & 24 \\ 16 & 20 & 12 \\ 12 & 36 & 8 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice D par le scalaire 8 est égale à :

$$8D = 8 \times \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 9 & 8 \times 4 & 8 \times 7 \\ 8 \times 9 & 8 \times 6 & 8 \times 7 \\ 8 \times 4 & 8 \times 9 & 8 \times 7 \\ 8 \times 6 & 8 \times 7 & 8 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 32 & 56 \\ 72 & 48 & 56 \\ 32 & 72 & 56 \\ 48 & 56 & 64 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $4C + 8D$ est égale à :

$$4C + 8D = \begin{pmatrix} 24 & 12 & 32 \\ 16 & 36 & 24 \\ 16 & 20 & 12 \\ 12 & 36 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 72 & 32 & 56 \\ 72 & 48 & 56 \\ 32 & 72 & 56 \\ 48 & 56 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 44 & 88 \\ 88 & 84 & 80 \\ 48 & 92 & 68 \\ 60 & 92 & 72 \end{pmatrix}$$

Exercice 84 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice B par le scalaire 5;
2. Multiplier la matrice F par le scalaire 3;
3. Calculer la combinaison linéaire $5B + 3F$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice B par le scalaire 5 est égale à :

$$5B = 5 \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 4 & 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 6 \\ 5 \times 6 & 5 \times 6 & 5 \times 9 & 5 \times 5 \\ 5 \times 2 & 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 1 \\ 5 \times 1 & 5 \times 7 & 5 \times 2 & 5 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 5 & 30 \\ 30 & 30 & 45 & 25 \\ 10 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 35 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice F par le scalaire 3 est égale à :

$$3F = 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 8 & 3 \times 2 & 3 \times 6 \\ 3 \times 8 & 3 \times 9 & 3 \times 4 & 3 \times 5 \\ 3 \times 1 & 3 \times 6 & 3 \times 7 & 3 \times 6 \\ 3 \times 6 & 3 \times 1 & 3 \times 4 & 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 6 & 18 \\ 24 & 27 & 12 & 15 \\ 3 & 18 & 21 & 18 \\ 18 & 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison linéaire $5B + 3F$ est égale à :

$$5B + 3F = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 5 & 30 \\ 30 & 30 & 45 & 25 \\ 10 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 35 & 10 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 24 & 6 & 18 \\ 24 & 27 & 12 & 15 \\ 3 & 18 & 21 & 18 \\ 18 & 3 & 12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 39 & 11 & 48 \\ 54 & 57 & 57 & 40 \\ 13 & 23 & 31 & 23 \\ 23 & 38 & 22 & 39 \end{pmatrix}$$

1.3.4 Combinaison convexe de matrices

Exercice 85 :

On considère les matrices w et y suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.49 ;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.51 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.49w + 0.51y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.49 est égale à :

$$0.49w = 0.49 \times \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 \times 2 & 0.49 \times 8 \\ 0.49 \times 6 & 0.49 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.98 & 3.92 \\ 2.94 & 1.47 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.51 est égale à :

$$0.51y = 0.51 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.51 \times 1 & 0.51 \times 2 \\ 0.51 \times 4 & 0.51 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.51 & 1.02 \\ 2.04 & 2.04 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.49w + 0.51y$ est égale à :

$$0.49w + 0.51y = \begin{pmatrix} 0.98 & 3.92 \\ 2.94 & 1.47 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.51 & 1.02 \\ 2.04 & 2.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.49 & 4.94 \\ 4.98 & 3.51 \end{pmatrix}$$

Exercice 86 :

On considère les matrices u et z suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice u par le scalaire 0.93 ;
2. Multiplier la matrice z par le scalaire 0.07 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.93u + 0.07z$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice u par le scalaire 0.93 est égale à :

$$0.93u = 0.93 \times \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.93 \times 1 & 0.93 \times 5 & 0.93 \times 7 \\ 0.93 \times 2 & 0.93 \times 6 & 0.93 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.93 & 4.65 & 6.51 \\ 1.86 & 5.58 & 1.86 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice z par le scalaire 0.07 est égale à :

$$0.07z = 0.07 \times \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.07 \times 6 & 0.07 \times 5 & 0.07 \times 2 \\ 0.07 \times 3 & 0.07 \times 7 & 0.07 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.42 & 0.35 & 0.14 \\ 0.21 & 0.49 & 0.42 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.93u + 0.07z$ est égale à :

$$0.93u + 0.07z = \begin{pmatrix} 0.93 & 4.65 & 6.51 \\ 1.86 & 5.58 & 1.86 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.42 & 0.35 & 0.14 \\ 0.21 & 0.49 & 0.42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.35 & 5.0 & 6.65 \\ 2.07 & 6.07 & 2.28 \end{pmatrix}$$

Exercice 87 :

On considère les matrices v et y suivantes :

$$v = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice v par le scalaire 0.15 ;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.85 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.15v + 0.85y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice v par le scalaire 0.15 est égale à :

$$0.15v = 0.15 \times \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \times 2 & 0.15 \times 9 \\ 0.15 \times 3 & 0.15 \times 2 \\ 0.15 \times 8 & 0.15 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 1.35 \\ 0.45 & 0.3 \\ 1.2 & 0.45 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.85 est égale à :

$$0.85y = 0.85 \times \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 \times 8 & 0.85 \times 3 \\ 0.85 \times 8 & 0.85 \times 6 \\ 0.85 \times 1 & 0.85 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.8 & 2.55 \\ 6.8 & 5.1 \\ 0.85 & 4.25 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.15v + 0.85y$ est égale à :

$$0.15v + 0.85y = \begin{pmatrix} 0.3 & 1.35 \\ 0.45 & 0.3 \\ 1.2 & 0.45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6.8 & 2.55 \\ 6.8 & 5.1 \\ 0.85 & 4.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.1 & 3.9 \\ 7.25 & 5.4 \\ 2.05 & 4.7 \end{pmatrix}$$

Exercice 88 :

On considère les matrices w et z suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 9 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.31 ;
2. Multiplier la matrice z par le scalaire 0.69 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.31w + 0.69z$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.31 est égale à :

$$0.31w = 0.31 \times \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 9 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.31 \times 9 & 0.31 \times 5 & 0.31 \times 3 \\ 0.31 \times 9 & 0.31 \times 9 & 0.31 \times 1 \\ 0.31 \times 3 & 0.31 \times 9 & 0.31 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.79 & 1.55 & 0.93 \\ 2.79 & 2.79 & 0.31 \\ 0.93 & 2.79 & 0.62 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice z par le scalaire 0.69 est égale à :

$$0.69z = 0.69 \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.69 \times 1 & 0.69 \times 6 & 0.69 \times 7 \\ 0.69 \times 3 & 0.69 \times 5 & 0.69 \times 7 \\ 0.69 \times 9 & 0.69 \times 4 & 0.69 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.69 & 4.14 & 4.83 \\ 2.07 & 3.45 & 4.83 \\ 6.21 & 2.76 & 4.83 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.31w + 0.69z$ est égale à :

$$0.31w + 0.69z = \begin{pmatrix} 2.79 & 1.55 & 0.93 \\ 2.79 & 2.79 & 0.31 \\ 0.93 & 2.79 & 0.62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.69 & 4.14 & 4.83 \\ 2.07 & 3.45 & 4.83 \\ 6.21 & 2.76 & 4.83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.48 & 5.69 & 5.76 \\ 4.86 & 6.24 & 5.14 \\ 7.14 & 5.55 & 5.45 \end{pmatrix}$$

Exercice 89 :

On considère les matrices w et x suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.86 ;
2. Multiplier la matrice x par le scalaire 0.14 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.86w + 0.14x$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.86 est égale à :

$$0.86w = 0.86 \times \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 \times 1 & 0.86 \times 9 & 0.86 \times 5 & 0.86 \times 7 \\ 0.86 \times 8 & 0.86 \times 1 & 0.86 \times 6 & 0.86 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 & 7.74 & 4.3 & 6.02 \\ 6.88 & 0.86 & 5.16 & 1.72 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice x par le scalaire 0.14 est égale à :

$$0.14x = 0.14 \times \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.14 \times 5 & 0.14 \times 2 & 0.14 \times 9 & 0.14 \times 3 \\ 0.14 \times 9 & 0.14 \times 5 & 0.14 \times 6 & 0.14 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.28 & 1.26 & 0.42 \\ 1.26 & 0.7 & 0.84 & 0.56 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.86w + 0.14x$ est égale à :

$$0.86w + 0.14x = \begin{pmatrix} 0.86 & 7.74 & 4.3 & 6.02 \\ 6.88 & 0.86 & 5.16 & 1.72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.28 & 1.26 & 0.42 \\ 1.26 & 0.7 & 0.84 & 0.56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.56 & 8.02 & 5.56 & 6.44 \\ 8.14 & 1.56 & 6.00 & 2.28 \end{pmatrix}$$

Exercice 90 :

On considère les matrices u et z suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 5 \\ 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 6 \\ 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice u par le scalaire 0.8;
2. Multiplier la matrice z par le scalaire 0.2;
3. Calculer la combinaison convexe $0.8u + 0.2z$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice u par le scalaire 0.8 est égale à :

$$0.8u = 0.8 \times \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 5 \\ 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \times 9 & 0.8 \times 1 \\ 0.8 \times 9 & 0.8 \times 5 \\ 0.8 \times 1 & 0.8 \times 2 \\ 0.8 \times 8 & 0.8 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.2 & 0.8 \\ 7.2 & 4.0 \\ 0.8 & 1.6 \\ 6.4 & 2.4 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice z par le scalaire 0.2 est égale à :

$$0.2z = 0.2 \times \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 6 \\ 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \times 8 & 0.2 \times 7 \\ 0.2 \times 6 & 0.2 \times 6 \\ 0.2 \times 2 & 0.2 \times 6 \\ 0.2 \times 5 & 0.2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.4 \\ 1.2 & 1.2 \\ 0.4 & 1.2 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.8u + 0.2z$ est égale à :

$$0.8u + 0.2z = \begin{pmatrix} 7.2 & 0.8 \\ 7.2 & 4.0 \\ 0.8 & 1.6 \\ 6.4 & 2.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.6 & 1.4 \\ 1.2 & 1.2 \\ 0.4 & 1.2 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.8 & 2.2 \\ 8.4 & 5.2 \\ 1.2 & 2.8 \\ 7.4 & 3.4 \end{pmatrix}$$

Exercice 91 :

On considère les matrices u et z suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice u par le scalaire 0.9;
2. Multiplier la matrice z par le scalaire 0.1;
3. Calculer la combinaison convexe $0.9u + 0.1z$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice u par le scalaire 0.9 est égale à :

$$0.9u = 0.9 \times \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \times 7 & 0.9 \times 7 & 0.9 \times 1 & 0.9 \times 9 \\ 0.9 \times 3 & 0.9 \times 6 & 0.9 \times 9 & 0.9 \times 8 \\ 0.9 \times 1 & 0.9 \times 6 & 0.9 \times 3 & 0.9 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.3 & 6.3 & 0.9 & 8.1 \\ 2.7 & 5.4 & 8.1 & 7.2 \\ 0.9 & 5.4 & 2.7 & 3.6 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice z par le scalaire 0.1 est égale à :

$$0.1z = 0.1 \times \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \times 7 & 0.1 \times 5 & 0.1 \times 9 & 0.1 \times 1 \\ 0.1 \times 5 & 0.1 \times 2 & 0.1 \times 1 & 0.1 \times 1 \\ 0.1 \times 6 & 0.1 \times 5 & 0.1 \times 6 & 0.1 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.9u + 0.1z$ est égale à :

$$0.9u + 0.1z = \begin{pmatrix} 6.3 & 6.3 & 0.9 & 8.1 \\ 2.7 & 5.4 & 8.1 & 7.2 \\ 0.9 & 5.4 & 2.7 & 3.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.0 & 6.8 & 1.8 & 8.2 \\ 3.2 & 5.6 & 8.2 & 7.3 \\ 1.5 & 5.9 & 3.3 & 4.2 \end{pmatrix}$$

Exercice 92 :

On considère les matrices w et y suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.83;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.17;
3. Calculer la combinaison convexe $0.83w + 0.17y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.83 est égale à :

$$0.83w = 0.83 \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \times 5 & 0.83 \times 1 & 0.83 \times 3 \\ 0.83 \times 3 & 0.83 \times 7 & 0.83 \times 1 \\ 0.83 \times 3 & 0.83 \times 9 & 0.83 \times 2 \\ 0.83 \times 5 & 0.83 \times 2 & 0.83 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.15 & 0.83 & 2.49 \\ 2.49 & 5.81 & 0.83 \\ 2.49 & 7.47 & 1.66 \\ 4.15 & 1.66 & 1.66 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.17 est égale à :

$$0.17y = 0.17 \times \begin{pmatrix} 9 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.17 \times 9 & 0.17 \times 7 & 0.17 \times 7 \\ 0.17 \times 7 & 0.17 \times 6 & 0.17 \times 5 \\ 0.17 \times 1 & 0.17 \times 3 & 0.17 \times 2 \\ 0.17 \times 8 & 0.17 \times 8 & 0.17 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.53 & 1.19 & 1.19 \\ 1.19 & 1.02 & 0.85 \\ 0.17 & 0.51 & 0.34 \\ 1.36 & 1.36 & 0.17 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.83w + 0.17y$ est égale à :

$$0.83w + 0.17y = \begin{pmatrix} 4.15 & 0.83 & 2.49 \\ 2.49 & 5.81 & 0.83 \\ 2.49 & 7.47 & 1.66 \\ 4.15 & 1.66 & 1.66 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.53 & 1.19 & 1.19 \\ 1.19 & 1.02 & 0.85 \\ 0.17 & 0.51 & 0.34 \\ 1.36 & 1.36 & 0.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.68 & 2.02 & 3.68 \\ 3.68 & 6.83 & 1.68 \\ 2.66 & 7.98 & 2.0 \\ 5.51 & 3.02 & 1.83 \end{pmatrix}$$

Exercice 93 :

On considère les matrices u et y suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 6 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 3 \\ 8 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice u par le scalaire 0.08 ;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.92 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.08u + 0.92y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice u par le scalaire 0.08 est égale à :

$$0.08u = 0.08 \times \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 6 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08 \times 5 & 0.08 \times 2 & 0.08 \times 3 & 0.08 \times 6 \\ 0.08 \times 9 & 0.08 \times 2 & 0.08 \times 2 & 0.08 \times 3 \\ 0.08 \times 7 & 0.08 \times 3 & 0.08 \times 7 & 0.08 \times 8 \\ 0.08 \times 8 & 0.08 \times 2 & 0.08 \times 5 & 0.08 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.16 & 0.24 & 0.48 \\ 0.72 & 0.16 & 0.16 & 0.24 \\ 0.56 & 0.24 & 0.56 & 0.64 \\ 0.64 & 0.16 & 0.4 & 0.16 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.92 est égale à :

$$0.92y = 0.92 \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 3 \\ 8 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.92 \times 4 & 0.92 \times 1 & 0.92 \times 7 & 0.92 \times 3 \\ 0.92 \times 8 & 0.92 \times 8 & 0.92 \times 7 & 0.92 \times 7 \\ 0.92 \times 7 & 0.92 \times 5 & 0.92 \times 4 & 0.92 \times 6 \\ 0.92 \times 3 & 0.92 \times 2 & 0.92 \times 3 & 0.92 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.68 & 0.92 & 6.44 & 2.76 \\ 7.36 & 7.36 & 6.44 & 6.44 \\ 6.44 & 4.6 & 3.68 & 5.52 \\ 2.76 & 1.84 & 2.76 & 6.44 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.08u + 0.92y$ est égale à :

$$0.08u + 0.92y = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.16 & 0.24 & 0.48 \\ 0.72 & 0.16 & 0.16 & 0.24 \\ 0.56 & 0.24 & 0.56 & 0.64 \\ 0.64 & 0.16 & 0.4 & 0.16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.68 & 0.92 & 6.44 & 2.76 \\ 7.36 & 7.36 & 6.44 & 6.44 \\ 6.44 & 4.6 & 3.68 & 5.52 \\ 2.76 & 1.84 & 2.76 & 6.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.08 & 1.08 & 6.68 & 3.24 \\ 8.08 & 7.52 & 6.6 & 6.68 \\ 7.0 & 4.84 & 4.24 & 6.16 \\ 3.4 & 2.0 & 3.16 & 6.60 \end{pmatrix}$$

Exercice 94 :

On considère les matrices w et x suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.95 ;
2. Multiplier la matrice x par le scalaire 0.05 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.95w + 0.05x$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.95 est égale à :

$$0.95w = 0.95 \times \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 \times 4 & 0.95 \times 6 \\ 0.95 \times 9 & 0.95 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.8 & 5.7 \\ 8.55 & 6.65 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice x par le scalaire 0.05 est égale à :

$$0.05x = 0.05 \times \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \times 2 & 0.05 \times 9 \\ 0.05 \times 6 & 0.05 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.45 \\ 0.3 & 0.15 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.95w + 0.05x$ est égale à :

$$0.95w + 0.05x = \begin{pmatrix} 3.8 & 5.7 \\ 8.55 & 6.65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0.45 \\ 0.3 & 0.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.9 & 6.15 \\ 8.85 & 6.8 \end{pmatrix}$$

Exercice 95 :

On considère les matrices u et y suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice u par le scalaire 0.42 ;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.58 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.42u + 0.58y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice u par le scalaire 0.42 est égale à :

$$0.42u = 0.42 \times \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.42 \times 8 & 0.42 \times 8 & 0.42 \times 8 \\ 0.42 \times 8 & 0.42 \times 2 & 0.42 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.36 & 3.36 & 3.36 \\ 3.36 & 0.84 & 1.68 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.58 est égale à :

$$0.58y = 0.58 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.58 \times 2 & 0.58 \times 1 & 0.58 \times 6 \\ 0.58 \times 4 & 0.58 \times 3 & 0.58 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.16 & 0.58 & 3.48 \\ 2.32 & 1.74 & 1.16 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.42u + 0.58y$ est égale à :

$$0.42u + 0.58y = \begin{pmatrix} 3.36 & 3.36 & 3.36 \\ 3.36 & 0.84 & 1.68 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.16 & 0.58 & 3.48 \\ 2.32 & 1.74 & 1.16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.52 & 3.94 & 6.84 \\ 5.68 & 2.58 & 2.84 \end{pmatrix}$$

Exercice 96 :

On considère les matrices v et x suivantes :

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice v par le scalaire 0.04 ;
2. Multiplier la matrice x par le scalaire 0.96 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.04v + 0.96x$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice v par le scalaire 0.04 est égale à :

$$0.04v = 0.04 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 \times 1 & 0.04 \times 1 \\ 0.04 \times 9 & 0.04 \times 1 \\ 0.04 \times 3 & 0.04 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 \\ 0.36 & 0.04 \\ 0.12 & 0.08 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice x par le scalaire 0.96 est égale à :

$$0.96x = 0.96 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \times 1 & 0.96 \times 2 \\ 0.96 \times 1 & 0.96 \times 6 \\ 0.96 \times 5 & 0.96 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 & 1.92 \\ 0.96 & 5.76 \\ 4.8 & 3.84 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.04v + 0.96x$ est égale à :

$$0.04v + 0.96x = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 \\ 0.36 & 0.04 \\ 0.12 & 0.08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.96 & 1.92 \\ 0.96 & 5.76 \\ 4.8 & 3.84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.96 \\ 1.32 & 5.8 \\ 4.92 & 3.92 \end{pmatrix}$$

Exercice 97 :

On considère les matrices u et z suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice u par le scalaire 0.59 ;
2. Multiplier la matrice z par le scalaire 0.41 ;

3. Calculer la combinaison convexe $0.59u + 0.41z$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice u par le scalaire 0.59 est égale à :

$$0.59u = 0.59 \times \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.59 \times 6 & 0.59 \times 1 & 0.59 \times 2 \\ 0.59 \times 4 & 0.59 \times 5 & 0.59 \times 9 \\ 0.59 \times 4 & 0.59 \times 3 & 0.59 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.54 & 0.59 & 1.18 \\ 2.36 & 2.95 & 5.31 \\ 2.36 & 1.77 & 0.59 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice z par le scalaire 0.41 est égale à :

$$0.41z = 0.41 \times \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.41 \times 5 & 0.41 \times 9 & 0.41 \times 4 \\ 0.41 \times 4 & 0.41 \times 2 & 0.41 \times 3 \\ 0.41 \times 8 & 0.41 \times 2 & 0.41 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.05 & 3.69 & 1.64 \\ 1.64 & 0.82 & 1.23 \\ 3.28 & 0.82 & 3.28 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.59u + 0.41z$ est égale à :

$$0.59u + 0.41z = \begin{pmatrix} 3.54 & 0.59 & 1.18 \\ 2.36 & 2.95 & 5.31 \\ 2.36 & 1.77 & 0.59 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.05 & 3.69 & 1.64 \\ 1.64 & 0.82 & 1.23 \\ 3.28 & 0.82 & 3.28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.59 & 4.28 & 2.82 \\ 4.0 & 3.77 & 6.54 \\ 5.64 & 2.59 & 3.87 \end{pmatrix}$$

Exercice 98 :

On considère les matrices w et x suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.89 ;
2. Multiplier la matrice x par le scalaire 0.11 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.89w + 0.11x$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.89 est égale à :

$$0.89w = 0.89 \times \begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.89 \times 9 & 0.89 \times 9 & 0.89 \times 8 & 0.89 \times 3 \\ 0.89 \times 2 & 0.89 \times 4 & 0.89 \times 6 & 0.89 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.01 & 8.01 & 7.12 & 2.67 \\ 1.78 & 3.56 & 5.34 & 2.67 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice x par le scalaire 0.11 est égale à :

$$0.11x = 0.11 \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11 \times 3 & 0.11 \times 4 & 0.11 \times 5 & 0.11 \times 3 \\ 0.11 \times 2 & 0.11 \times 7 & 0.11 \times 6 & 0.11 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.44 & 0.55 & 0.33 \\ 0.22 & 0.77 & 0.66 & 0.66 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.89w + 0.11x$ est égale à :

$$0.89w + 0.11x = \begin{pmatrix} 8.01 & 8.01 & 7.12 & 2.67 \\ 1.78 & 3.56 & 5.34 & 2.67 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.33 & 0.44 & 0.55 & 0.33 \\ 0.22 & 0.77 & 0.66 & 0.66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.34 & 8.45 & 7.67 & 3.00 \\ 2.0 & 4.33 & 6.00 & 3.33 \end{pmatrix}$$

Exercice 99 :

On considère les matrices v et y suivantes :

$$v = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \\ 7 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice v par le scalaire 0.63;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.37;
3. Calculer la combinaison convexe $0.63v + 0.37y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice v par le scalaire 0.63 est égale à :

$$0.63v = 0.63 \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \\ 7 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.63 \times 5 & 0.63 \times 6 \\ 0.63 \times 8 & 0.63 \times 1 \\ 0.63 \times 7 & 0.63 \times 4 \\ 0.63 \times 1 & 0.63 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.15 & 3.78 \\ 5.04 & 0.63 \\ 4.41 & 2.52 \\ 0.63 & 5.67 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.37 est égale à :

$$0.37y = 0.37 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.37 \times 2 & 0.37 \times 3 \\ 0.37 \times 4 & 0.37 \times 5 \\ 0.37 \times 1 & 0.37 \times 8 \\ 0.37 \times 2 & 0.37 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.74 & 1.11 \\ 1.48 & 1.85 \\ 0.37 & 2.96 \\ 0.74 & 1.11 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.63v + 0.37y$ est égale à :

$$0.63v + 0.37y = \begin{pmatrix} 3.15 & 3.78 \\ 5.04 & 0.63 \\ 4.41 & 2.52 \\ 0.63 & 5.67 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.74 & 1.11 \\ 1.48 & 1.85 \\ 0.37 & 2.96 \\ 0.74 & 1.11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.89 & 4.89 \\ 6.52 & 2.48 \\ 4.78 & 5.48 \\ 1.37 & 6.78 \end{pmatrix}$$

Exercice 100 :

On considère les matrices v et y suivantes :

$$v = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice v par le scalaire 0.22;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.78;
3. Calculer la combinaison convexe $0.22v + 0.78y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice v par le scalaire 0.22 est égale à :

$$0.22v = 0.22 \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.22 \times 3 & 0.22 \times 2 & 0.22 \times 4 & 0.22 \times 6 \\ 0.22 \times 6 & 0.22 \times 5 & 0.22 \times 7 & 0.22 \times 5 \\ 0.22 \times 7 & 0.22 \times 8 & 0.22 \times 3 & 0.22 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.44 & 0.88 & 1.32 \\ 1.32 & 1.1 & 1.54 & 1.1 \\ 1.54 & 1.76 & 0.66 & 0.66 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.78 est égale à :

$$0.78y = 0.78 \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.78 \times 4 & 0.78 \times 3 & 0.78 \times 3 & 0.78 \times 9 \\ 0.78 \times 2 & 0.78 \times 8 & 0.78 \times 4 & 0.78 \times 4 \\ 0.78 \times 5 & 0.78 \times 3 & 0.78 \times 8 & 0.78 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.12 & 2.34 & 2.34 & 7.02 \\ 1.56 & 6.24 & 3.12 & 3.12 \\ 3.9 & 2.34 & 6.24 & 3.9 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.22v + 0.78y$ est égale à :

$$0.22v + 0.78y = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.44 & 0.88 & 1.32 \\ 1.32 & 1.1 & 1.54 & 1.1 \\ 1.54 & 1.76 & 0.66 & 0.66 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.12 & 2.34 & 2.34 & 7.02 \\ 1.56 & 6.24 & 3.12 & 3.12 \\ 3.9 & 2.34 & 6.24 & 3.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.78 & 2.78 & 3.22 & 8.34 \\ 2.88 & 7.34 & 4.66 & 4.22 \\ 5.44 & 4.1 & 6.9 & 4.52 \end{pmatrix}$$

Exercice 101 :

On considère les matrices w et x suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 1 \\ 8 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 7 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.48 ;
2. Multiplier la matrice x par le scalaire 0.52 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.48w + 0.52x$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.48 est égale à :

$$0.48w = 0.48 \times \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 1 \\ 8 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \times 5 & 0.48 \times 7 & 0.48 \times 8 \\ 0.48 \times 2 & 0.48 \times 7 & 0.48 \times 1 \\ 0.48 \times 8 & 0.48 \times 5 & 0.48 \times 8 \\ 0.48 \times 4 & 0.48 \times 4 & 0.48 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 & 3.36 & 3.84 \\ 0.96 & 3.36 & 0.48 \\ 3.84 & 2.4 & 3.84 \\ 1.92 & 1.92 & 2.4 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice x par le scalaire 0.52 est égale à :

$$0.52x = 0.52 \times \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 7 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.52 \times 2 & 0.52 \times 8 & 0.52 \times 1 \\ 0.52 \times 2 & 0.52 \times 1 & 0.52 \times 7 \\ 0.52 \times 7 & 0.52 \times 4 & 0.52 \times 2 \\ 0.52 \times 9 & 0.52 \times 8 & 0.52 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.04 & 4.16 & 0.52 \\ 1.04 & 0.52 & 3.64 \\ 3.64 & 2.08 & 1.04 \\ 4.68 & 4.16 & 3.64 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.48w + 0.52x$ est égale à :

$$0.48w + 0.52x = \begin{pmatrix} 2.4 & 3.36 & 3.84 \\ 0.96 & 3.36 & 0.48 \\ 3.84 & 2.4 & 3.84 \\ 1.92 & 1.92 & 2.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.04 & 4.16 & 0.52 \\ 1.04 & 0.52 & 3.64 \\ 3.64 & 2.08 & 1.04 \\ 4.68 & 4.16 & 3.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.44 & 7.52 & 4.36 \\ 2.0 & 3.88 & 4.12 \\ 7.48 & 4.48 & 4.88 \\ 6.6 & 6.08 & 6.04 \end{pmatrix}$$

Exercice 102 :

On considère les matrices w et y suivantes :

$$w = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Multiplier la matrice w par le scalaire 0.34 ;
2. Multiplier la matrice y par le scalaire 0.66 ;
3. Calculer la combinaison convexe $0.34w + 0.66y$.

Solution :

1. La multiplication de la matrice w par le scalaire 0.34 est égale à :

$$0.34w = 0.34 \times \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.34 \times 6 & 0.34 \times 9 & 0.34 \times 6 & 0.34 \times 8 \\ 0.34 \times 1 & 0.34 \times 1 & 0.34 \times 5 & 0.34 \times 6 \\ 0.34 \times 8 & 0.34 \times 3 & 0.34 \times 2 & 0.34 \times 1 \\ 0.34 \times 9 & 0.34 \times 2 & 0.34 \times 3 & 0.34 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.04 & 3.06 & 2.04 & 2.72 \\ 0.34 & 0.34 & 1.7 & 2.04 \\ 2.72 & 1.02 & 0.68 & 0.34 \\ 3.06 & 0.68 & 1.02 & 2.04 \end{pmatrix}$$

2. La multiplication de la matrice y par le scalaire 0.66 est égale à :

$$0.66y = 0.66 \times \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 \times 4 & 0.66 \times 8 & 0.66 \times 5 & 0.66 \times 2 \\ 0.66 \times 1 & 0.66 \times 7 & 0.66 \times 6 & 0.66 \times 4 \\ 0.66 \times 6 & 0.66 \times 5 & 0.66 \times 2 & 0.66 \times 3 \\ 0.66 \times 4 & 0.66 \times 2 & 0.66 \times 7 & 0.66 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.64 & 5.28 & 3.3 & 1.32 \\ 0.66 & 4.62 & 3.96 & 2.64 \\ 3.96 & 3.3 & 1.32 & 1.98 \\ 2.64 & 1.32 & 4.62 & 4.62 \end{pmatrix}$$

3. La combinaison convexe $0.34w + 0.66y$ est égale à :

$$0.34w + 0.66y = \begin{pmatrix} 2.04 & 3.06 & 2.04 & 2.72 \\ 0.34 & 0.34 & 1.7 & 2.04 \\ 2.72 & 1.02 & 0.68 & 0.34 \\ 3.06 & 0.68 & 1.02 & 2.04 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.64 & 5.28 & 3.3 & 1.32 \\ 0.66 & 4.62 & 3.96 & 2.64 \\ 3.96 & 3.3 & 1.32 & 1.98 \\ 2.64 & 1.32 & 4.62 & 4.62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.68 & 8.34 & 5.34 & 4.04 \\ 1.0 & 4.96 & 5.66 & 4.68 \\ 6.68 & 4.32 & 2.0 & 2.32 \\ 5.7 & 2.0 & 5.64 & 6.66 \end{pmatrix}$$

1.4 Produits

1.4.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Exercice 103 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{v} = (8 \quad -5) \qquad \mathbf{y} = (9 \quad -3)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = (8 \quad -5) \cdot (9 \quad -3) = 8 \times 9 + (-5) \times (-3) = 87$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 104 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 9 \times (-3) + 9 \times 5 = 18$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 105 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = (-8 \quad -9)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot (-8 \quad -9) = -9 \times -8 + -6 \times -9 = 126$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 106 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{u} = (-4 \quad 6 \quad -6) \qquad \mathbf{y} = (1 \quad 2 \quad 1)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$;
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = (-4 \quad 6 \quad -6) \cdot (1 \quad 2 \quad 1) = -4 \times 1 + 6 \times 2 + -6 \times 1 = 2$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{y} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 107 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -7 \times 7 + 1 \times -3 + 9 \times 0 = -52$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 108 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = (-7 \quad -8 \quad -3)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot (-7 \quad -8 \quad -3) = 9 \times -7 + -7 \times -8 + -3 \times -3 = 2$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 109 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = (6 \quad 6 \quad -6 \quad 3) \qquad \mathbf{x} = (-7 \quad 4 \quad -5 \quad 5)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = (6 \quad 6 \quad -6 \quad 3) \cdot (-7 \quad 4 \quad -5 \quad 5) = 6 \times -7 + 6 \times 4 + -6 \times -5 + 3 \times 5 = 27$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 110 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \times -8 + -2 \times -6 + 9 \times 9 + 0 \times -2 = 53$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 111 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = (-7 \quad 6 \quad -1 \quad -3)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (-7 \quad 6 \quad -1 \quad -3) = 2 \times -7 + 3 \times 6 + 2 \times -1 + 5 \times -3 = -13$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 112 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{w} = (1 \quad -2) \qquad \mathbf{y} = (-3 \quad -5)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{y}$;
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{y} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{y}$:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{y} = (1 \quad -2) \cdot (-3 \quad -5) = 1 \times -3 + -2 \times -5 = 7$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{y} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{y} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 113 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \times -9 + -6 \times -6 = 18$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 114 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = (-6 \ 3)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$;
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-6 \ 3) = 3 \times -6 + 0 \times 3 = -18$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 115 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = (-8 \ 7 \ -5) \qquad \mathbf{z} = (1 \ -6 \ 6)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$;
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = (-8 \ 7 \ -5) \cdot (1 \ -6 \ 6) = -8 \times 1 + 7 \times -6 + -5 \times 6 = -80$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 116 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \times -7 + -9 \times -5 + 4 \times -6 = 63$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 117 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = (-9 \quad 7 \quad 9)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$;
2. Les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-9 \quad 7 \quad 9) = 5 \times -9 + -4 \times 7 + 2 \times 9 = -55$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{z} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 118 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = (-6 \quad -6 \quad -6 \quad -1) \qquad \mathbf{z} = (-4 \quad 0 \quad 8 \quad -9)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$;
2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = (-6 \quad -6 \quad -6 \quad -1) \cdot (-4 \quad 0 \quad 8 \quad -9) = -6 \times -4 + -6 \times 0 + -6 \times 8 + -1 \times -9 = -15$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 119 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$;
2. Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \times 1 + -3 \times 8 + 8 \times -4 + 2 \times 2 = -53$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 120 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = (5 \quad 2 \quad 7 \quad 8)$$

1. Calculer le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$;

2. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1. Calcul du produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (5 \ 2 \ 7 \ 8) = -4 \times 5 + 2 \times 2 + -1 \times 7 + 5 \times 8 = 17$$

2. Orthogonalité des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} :

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} n'étant pas nul, on conclut que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

1.4.2 Carré scalaire d'un vecteur

Exercice 121 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = (1 \ 3)$$

1. Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{u} ;
2. Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{x} .

Solution :

1. Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 7^2 + 8^2 = 113$$

2. Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (1 \ 3) \cdot (1 \ 3) = 1^2 + 3^2 = 10$$

Exercice 122 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = (9 \ 6 \ 0)$$

1. Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{v} ;

- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{x} .

Solution :

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3^2 + 3^2 + 5^2 = 43$$

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (9 \ 6 \ 0) \cdot (9 \ 6 \ 0) = 9^2 + 6^2 + 0^2 = 117$$

Exercice 123 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = (3 \ 3 \ 4 \ 8)$$

- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{w} ;
- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{z} .

Solution :

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{w} :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 4^2 + 0^2 + 8^2 + 7^2 = 129$$

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{z} :

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = (3 \ 3 \ 4 \ 8) \cdot (3 \ 3 \ 4 \ 8) = 3^2 + 3^2 + 4^2 + 8^2 = 98$$

Exercice 124 :

On considère les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = (6 \ 5)$$

- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{w} ;

- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{x} .

Solution :

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{w} :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3^2 + 9^2 = 90$$

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (6 \ 5) \cdot (6 \ 5) = 6^2 + 5^2 = 61$$

Exercice 125 :

On considère les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = (3 \ 7 \ 1)$$

- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{u} ;
- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{z} .

Solution :

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6^2 + 5^2 + 1^2 = 62$$

- Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{z} :

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = (3 \ 7 \ 1) \cdot (3 \ 7 \ 1) = 3^2 + 7^2 + 1^2 = 59$$

Exercice 126 :

On considère les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{y} suivants :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = (2 \ 5 \ 6 \ 6)$$

- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{v} ;
- Calculer le carré scalaire du vecteur \mathbf{y} .

Solution :

1. Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 8^2 + 4^2 + 2^2 + 7^2 = 133$$

2. Calcul du carré scalaire du vecteur \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = (2 \ 5 \ 6 \ 6) \cdot (2 \ 5 \ 6 \ 6) = 2^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 = 101$$

1.4.3 Produit matriciel de deux matrices

Exercice 127 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = (3 \ 4) \qquad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= (3 \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est égal au nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} EC &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 4 \\ 1 \times 3 & 1 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $CE \neq EC$, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 128 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 5 + 8 \times 4 & 8 \times 3 + 8 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 72 & 32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 129 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = (5 \quad 5) \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×3 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= (5 \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (5 \times 2 + 5 \times 2 \quad 5 \times 7 + 5 \times 8 \quad 5 \times 4 + 5 \times 3) \\ &= (20 \quad 75 \quad 35) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 130 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = (2 \quad 7) \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×4 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= (2 \quad 7) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (2 \times 3 + 7 \times 4 \quad 2 \times 6 + 7 \times 8 \quad 2 \times 8 + 7 \times 8 \quad 2 \times 1 + 7 \times 2) \\ &= (34 \quad 68 \quad 72 \quad 16) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 131 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = (5 \quad 8 \quad 7) \qquad D = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= (5 \quad 8 \quad 7) \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 7 + 8 \times 4 + 7 \times 2 \\ &= 81 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} DB &= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} (5 \quad 8 \quad 7) \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 5 & 7 \times 8 & 7 \times 7 \\ 4 \times 5 & 4 \times 8 & 4 \times 7 \\ 2 \times 5 & 2 \times 8 & 2 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 35 & 56 & 49 \\ 20 & 32 & 28 \\ 10 & 16 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $BD \neq DB$, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 132 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = (7 \quad 8 \quad 2) \qquad F = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CF ;
2. Calculer le produit matriciel FC ;
3. Les matrices C et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CF :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices C et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CF &= (7 \quad 8 \quad 2) \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (7 \times 6 + 8 \times 2 + 2 \times 2 \quad 7 \times 3 + 8 \times 4 + 2 \times 1) \\ &= (62 \quad 55) \end{aligned}$$

- Calcul du produit matriciel FC :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices F et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

- Le produit matriciel FC n'étant pas défini, on conclut que les matrices C et F ne sont pas commutantes.

Exercice 133 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = (4 \quad 1 \quad 9) \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- Calculer le produit matriciel CD ;
- Calculer le produit matriciel DC ;
- Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

- Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×3 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= (4 \quad 1 \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (4 \times 1 + 1 \times 3 + 9 \times 3 \quad 4 \times 9 + 1 \times 2 + 9 \times 6 \quad 4 \times 2 + 1 \times 6 + 9 \times 4) \\ &= (34 \quad 92 \quad 50) \end{aligned}$$

- Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

- Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 134 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 9 \times 4 + 5 \times 1 + 8 \times 3 + 3 \times 3 \\ &= 74 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×4 donnée par :

$$\begin{aligned} DA &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 9 & 4 \times 5 & 4 \times 8 & 4 \times 3 \\ 1 \times 9 & 1 \times 5 & 1 \times 8 & 1 \times 3 \\ 3 \times 9 & 3 \times 5 & 3 \times 8 & 3 \times 3 \\ 3 \times 9 & 3 \times 5 & 3 \times 8 & 3 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 36 & 20 & 32 & 12 \\ 9 & 5 & 8 & 3 \\ 27 & 15 & 24 & 9 \\ 27 & 15 & 24 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AD \neq DA$, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 135 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 5 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 5 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= (6 \times 6 + 4 \times 1 + 6 \times 3 + 9 \times 2 \quad 6 \times 5 + 4 \times 5 + 6 \times 9 + 9 \times 6) \\ &= (76 \quad 158) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 136 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;

2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 2 & 5 \times 9 \\ 1 \times 2 & 1 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 45 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 5 + 9 \times 1 \\ &= 19 \end{aligned}$$

3. On a $AE \neq EA$, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 137 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×3 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} (8 \quad 6 \quad 8) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 8 & 3 \times 6 & 3 \times 8 \\ 5 \times 8 & 5 \times 6 & 5 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 18 & 24 \\ 40 & 30 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 138 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad D = (6 \quad 5 \quad 3 \quad 1)$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×4 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} (6 \quad 5 \quad 3 \quad 1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 5 & 2 \times 3 & 2 \times 1 \\ 7 \times 6 & 7 \times 5 & 7 \times 3 & 7 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 10 & 6 & 2 \\ 42 & 35 & 21 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 139 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×1 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \times 9 + 7 \times 7 \\ 1 \times 9 + 3 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 103 \\ 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 140 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 3 + 1 \times 4 & 5 \times 3 + 1 \times 6 \\ 3 \times 3 + 5 \times 4 & 3 \times 3 + 5 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 29 & 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} DC &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 5 + 3 \times 3 & 3 \times 1 + 3 \times 5 \\ 4 \times 5 + 6 \times 3 & 4 \times 1 + 6 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 18 \\ 38 & 34 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $CD \neq DC$, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 141 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;

3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×3 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 9 + 2 \times 7 & 5 \times 7 + 2 \times 4 & 5 \times 1 + 2 \times 5 \\ 1 \times 9 + 7 \times 7 & 1 \times 7 + 7 \times 4 & 1 \times 1 + 7 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 59 & 43 & 15 \\ 58 & 35 & 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 142 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculer le produit matriciel CE ;
- Calculer le produit matriciel EC ;
- Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×4 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 9 + 1 \times 9 & 5 \times 7 + 1 \times 8 & 5 \times 2 + 1 \times 2 & 5 \times 4 + 1 \times 3 \\ 1 \times 9 + 8 \times 9 & 1 \times 7 + 8 \times 8 & 1 \times 2 + 8 \times 2 & 1 \times 4 + 8 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 54 & 43 & 12 & 23 \\ 81 & 71 & 18 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EC n'étant pas défini, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 143 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 9 + 1 \times 4 + 5 \times 8 \\ 9 \times 9 + 1 \times 4 + 3 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 71 \\ 109 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 144 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 8 \times 2 + 8 \times 3 & 5 \times 9 + 8 \times 8 + 8 \times 7 \\ 4 \times 2 + 1 \times 2 + 3 \times 3 & 4 \times 9 + 1 \times 8 + 3 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 50 & 165 \\ 19 & 65 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} DC &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 9 \times 4 & 2 \times 8 + 9 \times 1 & 2 \times 8 + 9 \times 3 \\ 2 \times 5 + 8 \times 4 & 2 \times 8 + 8 \times 1 & 2 \times 8 + 8 \times 3 \\ 3 \times 5 + 7 \times 4 & 3 \times 8 + 7 \times 1 & 3 \times 8 + 7 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 46 & 25 & 43 \\ 42 & 24 & 40 \\ 43 & 31 & 45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $CD \neq DC$, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 145 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×3 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 8 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 6 + 6 \times 9 + 5 \times 8 & 7 \times 5 + 6 \times 1 + 5 \times 7 & 7 \times 2 + 6 \times 7 + 5 \times 8 \\ 9 \times 6 + 6 \times 9 + 7 \times 8 & 9 \times 5 + 6 \times 1 + 7 \times 7 & 9 \times 2 + 6 \times 7 + 7 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 136 & 76 & 96 \\ 164 & 100 & 116 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 146 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×1 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 5 + 5 \times 2 + 6 \times 1 + 4 \times 9 \\ 2 \times 5 + 4 \times 2 + 7 \times 1 + 9 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 97 \\ 106 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 147 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 4 \\ 3 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 4 \\ 3 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 6 + 1 \times 4 + 2 \times 3 + 5 \times 7 & 8 \times 9 + 1 \times 4 + 2 \times 9 + 5 \times 5 \\ 2 \times 6 + 7 \times 4 + 2 \times 3 + 9 \times 7 & 2 \times 9 + 7 \times 4 + 2 \times 9 + 9 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 93 & 119 \\ 109 & 109 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×4 donnée par :

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 4 \\ 3 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \times 8 + 9 \times 2 & 6 \times 1 + 9 \times 7 & 6 \times 2 + 9 \times 2 & 6 \times 5 + 9 \times 9 \\ 4 \times 8 + 4 \times 2 & 4 \times 1 + 4 \times 7 & 4 \times 2 + 4 \times 2 & 4 \times 5 + 4 \times 9 \\ 3 \times 8 + 9 \times 2 & 3 \times 1 + 9 \times 7 & 3 \times 2 + 9 \times 2 & 3 \times 5 + 9 \times 9 \\ 7 \times 8 + 5 \times 2 & 7 \times 1 + 5 \times 7 & 7 \times 2 + 5 \times 2 & 7 \times 5 + 5 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 66 & 69 & 30 & 111 \\ 40 & 32 & 16 & 56 \\ 42 & 66 & 24 & 96 \\ 66 & 42 & 24 & 80 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AE \neq EA$, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 148 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad D = (3 \ 9)$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} (3 \ 9) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 3 & 4 \times 9 \\ 1 \times 3 & 1 \times 9 \\ 5 \times 3 & 5 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 36 \\ 3 & 9 \\ 15 & 45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 149 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad D = (1 \ 2 \ 2)$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;

2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \\ 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 2 \\ 4 \times 1 & 4 \times 2 & 4 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 10 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} DB &= (1 \quad 2 \quad 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 5 + 2 \times 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

3. On a $BD \neq DB$, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 150 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad E = (1 \quad 9 \quad 2 \quad 7)$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;

3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×4 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} (1 \quad 9 \quad 2 \quad 7) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 9 & 3 \times 2 & 3 \times 7 \\ 4 \times 1 & 4 \times 9 & 4 \times 2 & 4 \times 7 \\ 6 \times 1 & 6 \times 9 & 6 \times 2 & 6 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 27 & 6 & 21 \\ 4 & 36 & 8 & 28 \\ 6 & 54 & 12 & 42 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 151 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CF ;
2. Calculer le produit matriciel FC ;
3. Les matrices C et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CF :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices C et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×1 donnée par :

$$\begin{aligned} CF &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 4 + 5 \times 6 \\ 1 \times 4 + 5 \times 6 \\ 5 \times 4 + 2 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \\ 32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FC :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices F et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et F ne sont pas commutantes.

Exercice 152 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 4 & 1 \times 9 + 3 \times 1 \\ 4 \times 5 + 1 \times 4 & 4 \times 9 + 1 \times 1 \\ 4 \times 5 + 3 \times 4 & 4 \times 9 + 3 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 37 \\ 32 & 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 153 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 6 \times 5 & 3 \times 7 + 6 \times 9 & 3 \times 8 + 6 \times 8 \\ 4 \times 2 + 6 \times 5 & 4 \times 7 + 6 \times 9 & 4 \times 8 + 6 \times 8 \\ 7 \times 2 + 5 \times 5 & 7 \times 7 + 5 \times 9 & 7 \times 8 + 5 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 36 & 75 & 72 \\ 38 & 82 & 80 \\ 39 & 94 & 96 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} FB &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 7 \times 4 + 8 \times 7 & 2 \times 6 + 7 \times 6 + 8 \times 5 \\ 5 \times 3 + 9 \times 4 + 8 \times 7 & 5 \times 6 + 9 \times 6 + 8 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 90 & 94 \\ 107 & 124 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Le produit matriciel FB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 154 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 7 \\ 9 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×4 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 7 \\ 9 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 3 + 9 \times 9 & 9 \times 4 + 9 \times 8 & 9 \times 3 + 9 \times 1 & 9 \times 7 + 9 \times 1 \\ 2 \times 3 + 2 \times 9 & 2 \times 4 + 2 \times 8 & 2 \times 3 + 2 \times 1 & 2 \times 7 + 2 \times 1 \\ 5 \times 3 + 5 \times 9 & 5 \times 4 + 5 \times 8 & 5 \times 3 + 5 \times 1 & 5 \times 7 + 5 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 108 & 108 & 36 & 72 \\ 24 & 24 & 8 & 16 \\ 60 & 60 & 20 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. On a $AF \neq FA$, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 155 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×1 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 7 \times 8 + 8 \times 3 \\ 5 \times 1 + 1 \times 8 + 7 \times 3 \\ 3 \times 1 + 5 \times 8 + 6 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 84 \\ 34 \\ 61 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 156 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 9 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 9 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 3 + 6 \times 2 & 3 \times 3 + 4 \times 9 + 6 \times 8 \\ 9 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 2 & 9 \times 3 + 1 \times 9 + 2 \times 8 \\ 8 \times 1 + 5 \times 3 + 9 \times 2 & 8 \times 3 + 5 \times 9 + 9 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 93 \\ 16 & 52 \\ 41 & 141 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 157 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 9 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 9 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 9 + 7 \times 4 + 3 \times 6 & 3 \times 9 + 7 \times 5 + 3 \times 5 & 3 \times 7 + 7 \times 8 + 3 \times 3 \\ 9 \times 9 + 9 \times 4 + 2 \times 6 & 9 \times 9 + 9 \times 5 + 2 \times 5 & 9 \times 7 + 9 \times 8 + 2 \times 3 \\ 9 \times 9 + 6 \times 4 + 3 \times 6 & 9 \times 9 + 6 \times 5 + 3 \times 5 & 9 \times 7 + 6 \times 8 + 3 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 73 & 77 & 86 \\ 129 & 136 & 141 \\ 123 & 126 & 120 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} FA &= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 9 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 3 + 9 \times 9 + 7 \times 9 & 9 \times 7 + 9 \times 9 + 7 \times 6 & 9 \times 3 + 9 \times 2 + 7 \times 3 \\ 4 \times 3 + 5 \times 9 + 8 \times 9 & 4 \times 7 + 5 \times 9 + 8 \times 6 & 4 \times 3 + 5 \times 2 + 8 \times 3 \\ 6 \times 3 + 5 \times 9 + 3 \times 9 & 6 \times 7 + 5 \times 9 + 3 \times 6 & 6 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 171 & 186 & 66 \\ 129 & 121 & 46 \\ 90 & 105 & 37 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AF \neq FA$, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 158 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 8 + 7 \times 9 + 7 \times 3 + 6 \times 8 \\ 9 \times 8 + 1 \times 9 + 2 \times 3 + 3 \times 8 \\ 9 \times 8 + 1 \times 9 + 8 \times 3 + 7 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 188 \\ 111 \\ 161 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 159 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 8 & 7 \\ 8 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 4 \\ 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 8 & 7 \\ 8 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 4 \\ 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 5 + 6 \times 6 + 6 \times 8 + 3 \times 2 & 4 \times 6 + 6 \times 4 + 6 \times 9 + 3 \times 1 \\ 5 \times 5 + 8 \times 6 + 8 \times 8 + 7 \times 2 & 5 \times 6 + 8 \times 4 + 8 \times 9 + 7 \times 1 \\ 8 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 8 + 8 \times 2 & 8 \times 6 + 4 \times 4 + 5 \times 9 + 8 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 110 & 105 \\ 151 & 141 \\ 120 & 117 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 160 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = (2 \quad 1)$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

4×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \quad 1) \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 2 & 8 \times 1 \\ 6 \times 2 & 6 \times 1 \\ 9 \times 2 & 9 \times 1 \\ 1 \times 2 & 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 12 & 6 \\ 18 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EC n'étant pas défini, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 161 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = (5 \quad 9 \quad 4)$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

4×3 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} (5 \quad 9 \quad 4) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 5 & 4 \times 9 & 4 \times 4 \\ 4 \times 5 & 4 \times 9 & 4 \times 4 \\ 6 \times 5 & 6 \times 9 & 6 \times 4 \\ 1 \times 5 & 1 \times 9 & 1 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 36 & 16 \\ 20 & 36 & 16 \\ 30 & 54 & 24 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EC n'étant pas défini, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 162 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad D = (6 \quad 9 \quad 2 \quad 8)$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

4×4 donnée par :

$$\begin{aligned}
 AD &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (6 \quad 9 \quad 2 \quad 8) \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \times 6 & 3 \times 9 & 3 \times 2 & 3 \times 8 \\ 5 \times 6 & 5 \times 9 & 5 \times 2 & 5 \times 8 \\ 1 \times 6 & 1 \times 9 & 1 \times 2 & 1 \times 8 \\ 3 \times 6 & 3 \times 9 & 3 \times 2 & 3 \times 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 18 & 27 & 6 & 24 \\ 30 & 45 & 10 & 40 \\ 6 & 9 & 2 & 8 \\ 18 & 27 & 6 & 24 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned}
 DA &= (6 \quad 9 \quad 2 \quad 8) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= 6 \times 3 + 9 \times 5 + 2 \times 1 + 8 \times 3 \\
 &= 89
 \end{aligned}$$

3. On a $AD \neq DA$, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 163 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 7 \\ 8 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 7 \\ 8 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 8 + 2 \times 6 \\ 4 \times 8 + 7 \times 6 \\ 8 \times 8 + 4 \times 6 \\ 7 \times 8 + 3 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 44 \\ 74 \\ 88 \\ 74 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 164 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 4 + 6 \times 3 & 9 \times 3 + 6 \times 2 \\ 2 \times 4 + 3 \times 3 & 2 \times 3 + 3 \times 2 \\ 2 \times 4 + 6 \times 3 & 2 \times 3 + 6 \times 2 \\ 4 \times 4 + 7 \times 3 & 4 \times 3 + 7 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 54 & 39 \\ 17 & 12 \\ 26 & 18 \\ 37 & 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 165 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 7 \\ 3 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×3 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 7 \\ 3 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 9 + 1 \times 8 & 7 \times 9 + 1 \times 4 & 7 \times 8 + 1 \times 5 \\ 9 \times 9 + 7 \times 8 & 9 \times 9 + 7 \times 4 & 9 \times 8 + 7 \times 5 \\ 3 \times 9 + 3 \times 8 & 3 \times 9 + 3 \times 4 & 3 \times 8 + 3 \times 5 \\ 4 \times 9 + 9 \times 8 & 4 \times 9 + 9 \times 4 & 4 \times 8 + 9 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 71 & 67 & 61 \\ 137 & 109 & 107 \\ 51 & 39 & 39 \\ 108 & 72 & 77 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 166 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 8 \\ 2 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CF ;
2. Calculer le produit matriciel FC ;
3. Les matrices C et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CF :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices C et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×4 donnée par :

$$\begin{aligned}
 CF &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 8 \\ 2 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 7 \times 9 + 1 \times 4 & 7 \times 3 + 1 \times 3 & 7 \times 1 + 1 \times 7 & 7 \times 2 + 1 \times 2 \\ 7 \times 9 + 8 \times 4 & 7 \times 3 + 8 \times 3 & 7 \times 1 + 8 \times 7 & 7 \times 2 + 8 \times 2 \\ 2 \times 9 + 6 \times 4 & 2 \times 3 + 6 \times 3 & 2 \times 1 + 6 \times 7 & 2 \times 2 + 6 \times 2 \\ 8 \times 9 + 1 \times 4 & 8 \times 3 + 1 \times 3 & 8 \times 1 + 1 \times 7 & 8 \times 2 + 1 \times 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 67 & 24 & 14 & 16 \\ 95 & 45 & 63 & 30 \\ 42 & 24 & 44 & 16 \\ 76 & 27 & 15 & 18 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FC :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice C . Les matrices F et C sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned}
 FC &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 8 \\ 2 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 9 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 2 + 2 \times 8 & 9 \times 1 + 3 \times 8 + 1 \times 6 + 2 \times 1 \\ 4 \times 7 + 3 \times 7 + 7 \times 2 + 2 \times 8 & 4 \times 1 + 3 \times 8 + 7 \times 6 + 2 \times 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 102 & 41 \\ 79 & 72 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. On a $CF \neq FC$, on conclut que les matrices C et F ne sont pas commutantes.

Exercice 167 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×1 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times 5 \\ 6 \times 3 + 5 \times 1 + 6 \times 5 \\ 2 \times 3 + 5 \times 1 + 2 \times 5 \\ 6 \times 3 + 6 \times 1 + 4 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 \\ 53 \\ 21 \\ 44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 168 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 9 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 9 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 2 \times 6 + 7 \times 3 & 4 \times 7 + 2 \times 9 + 7 \times 9 \\ 9 \times 3 + 7 \times 6 + 9 \times 3 & 9 \times 7 + 7 \times 9 + 9 \times 9 \\ 9 \times 3 + 7 \times 6 + 7 \times 3 & 9 \times 7 + 7 \times 9 + 7 \times 9 \\ 8 \times 3 + 8 \times 6 + 7 \times 3 & 8 \times 7 + 8 \times 9 + 7 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 45 & 109 \\ 96 & 207 \\ 90 & 189 \\ 93 & 191 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 169 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×3 donnée par :

$$\begin{aligned}
 BE &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \times 8 + 2 \times 3 + 7 \times 1 & 1 \times 7 + 2 \times 6 + 7 \times 6 & 1 \times 8 + 2 \times 8 + 7 \times 1 \\ 8 \times 8 + 7 \times 3 + 2 \times 1 & 8 \times 7 + 7 \times 6 + 2 \times 6 & 8 \times 8 + 7 \times 8 + 2 \times 1 \\ 3 \times 8 + 8 \times 3 + 1 \times 1 & 3 \times 7 + 8 \times 6 + 1 \times 6 & 3 \times 8 + 8 \times 8 + 1 \times 1 \\ 9 \times 8 + 8 \times 3 + 9 \times 1 & 9 \times 7 + 8 \times 6 + 9 \times 6 & 9 \times 8 + 8 \times 8 + 9 \times 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 21 & 61 & 31 \\ 87 & 110 & 122 \\ 49 & 75 & 89 \\ 105 & 165 & 145 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 170 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 9 \\ 7 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 9 \\ 7 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 8 \times 1 + 9 \times 5 + 7 \times 4 \\ 7 \times 1 + 4 \times 1 + 3 \times 5 + 9 \times 4 \\ 7 \times 1 + 3 \times 1 + 3 \times 5 + 5 \times 4 \\ 4 \times 1 + 1 \times 1 + 9 \times 5 + 9 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 83 \\ 62 \\ 45 \\ 86 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 171 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 8 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 6 \\ 4 & 9 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×2 donnée par :

$$\begin{aligned}
 AD &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 8 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 6 \\ 4 & 9 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 6 \times 8 + 4 \times 4 + 7 \times 7 & 4 \times 1 + 6 \times 6 + 4 \times 9 + 7 \times 8 \\ 6 \times 2 + 9 \times 8 + 2 \times 4 + 7 \times 7 & 6 \times 1 + 9 \times 6 + 2 \times 9 + 7 \times 8 \\ 5 \times 2 + 9 \times 8 + 8 \times 4 + 7 \times 7 & 5 \times 1 + 9 \times 6 + 8 \times 9 + 7 \times 8 \\ 1 \times 2 + 6 \times 8 + 7 \times 4 + 7 \times 7 & 1 \times 1 + 6 \times 6 + 7 \times 9 + 7 \times 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 121 & 132 \\ 141 & 134 \\ 163 & 187 \\ 127 & 156 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 172 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned}
 AF &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= 3 \times 2 + 2 \times 3 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} FA &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 2 \\ 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AF \neq FA$, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 173 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 7 \times 7 & 2 \times 2 + 7 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 53 & 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 174 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = (7 \quad 2) \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×3 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= (7 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \\ &= (7 \times 1 + 2 \times 2 \quad 7 \times 4 + 2 \times 8 \quad 7 \times 4 + 2 \times 7) \\ &= (11 \quad 44 \quad 42) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 175 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = (8 \quad 9) \qquad E = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×4 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= (8 \quad 9) \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix} \\ &= (8 \times 6 + 9 \times 2 \quad 8 \times 9 + 9 \times 6 \quad 8 \times 1 + 9 \times 7 \quad 8 \times 6 + 9 \times 6) \\ &= (66 \quad 126 \quad 71 \quad 102) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 176 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = (9 \quad 3 \quad 6) \qquad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= (9 \quad 3 \quad 6) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= 9 \times 5 + 3 \times 1 + 6 \times 7 \\ &= 90 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} FB &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 9 & 5 \times 3 & 5 \times 6 \\ 1 \times 9 & 1 \times 3 & 1 \times 6 \\ 7 \times 9 & 7 \times 3 & 7 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 45 & 15 & 30 \\ 9 & 3 & 6 \\ 63 & 21 & 42 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $BF \neq FB$, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 177 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \\ &= (4 \times 8 + 5 \times 7 + 4 \times 7 \quad 4 \times 9 + 5 \times 1 + 4 \times 9) \\ &= (95 \quad 77) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 178 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×3 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \\ &= (2 \times 5 + 4 \times 9 + 4 \times 1 \quad 2 \times 1 + 4 \times 3 + 4 \times 9 \quad 2 \times 5 + 4 \times 4 + 4 \times 5) \\ &= (50 \quad 50 \quad 46) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 179 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 4 + 6 \times 5 \\ &= 49 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×4 donnée par :

$$\begin{aligned} FA &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 6 \\ 1 \times 5 & 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 6 \\ 4 \times 5 & 4 \times 1 & 4 \times 2 & 4 \times 6 \\ 5 \times 5 & 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 20 & 4 & 8 & 24 \\ 25 & 5 & 10 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AF \neq FA$, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 180 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = (6 \quad 2 \quad 1 \quad 8) \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \\ 4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= (6 \quad 2 \quad 1 \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \\ 4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= (6 \times 1 + 2 \times 8 + 1 \times 4 + 8 \times 1 \quad 6 \times 3 + 2 \times 9 + 1 \times 5 + 8 \times 9) \\ &= (34 \quad 113) \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 181 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad D = (4 \quad 4)$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;

2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 4 & 1 \times 4 \\ 7 \times 4 & 7 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 28 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} DA &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= 4 \times 1 + 4 \times 7 \\ &= 32 \end{aligned}$$

3. On a $AD \neq DA$, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 182 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×3 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} (9 \quad 8 \quad 6) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 9 & 4 \times 8 & 4 \times 6 \\ 7 \times 9 & 7 \times 8 & 7 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 36 & 32 & 24 \\ 63 & 56 & 42 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 183 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad D = (1 \quad 2 \quad 5 \quad 9)$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×4 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 5 \quad 9) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 1 & 4 \times 2 & 4 \times 5 & 4 \times 9 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 5 & 3 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 20 & 36 \\ 3 & 6 & 15 & 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.**Exercice 184 :**

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×1 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 4 + 9 \times 9 \\ 6 \times 4 + 8 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 101 \\ 96 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.**Exercice 185 :**

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 7 \times 2 & 3 \times 5 + 7 \times 4 \\ 1 \times 3 + 9 \times 2 & 1 \times 5 + 9 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 43 \\ 21 & 41 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 5 \times 1 & 3 \times 7 + 5 \times 9 \\ 2 \times 3 + 4 \times 1 & 2 \times 7 + 4 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 66 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AE \neq EA$, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 186 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;

3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×3 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 7 + 9 \times 1 & 5 \times 5 + 9 \times 6 & 5 \times 1 + 9 \times 9 \\ 5 \times 7 + 7 \times 1 & 5 \times 5 + 7 \times 6 & 5 \times 1 + 7 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 44 & 79 & 86 \\ 42 & 67 & 68 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 187 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×4 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 3 & 2 \times 7 + 4 \times 5 & 2 \times 2 + 4 \times 7 & 2 \times 8 + 4 \times 8 \\ 7 \times 1 + 9 \times 3 & 7 \times 7 + 9 \times 5 & 7 \times 2 + 9 \times 7 & 7 \times 8 + 9 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 34 & 32 & 48 \\ 34 & 94 & 77 & 128 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EA n'étant pas défini, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 188 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 5 + 5 \times 7 + 1 \times 8 \\ 3 \times 5 + 2 \times 7 + 5 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 63 \\ 69 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 189 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 9 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 9 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 6 + 3 \times 6 + 2 \times 5 & 8 \times 2 + 3 \times 9 + 2 \times 5 \\ 3 \times 6 + 6 \times 6 + 8 \times 5 & 3 \times 2 + 6 \times 9 + 8 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 76 & 53 \\ 94 & 100 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} DA &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 9 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \times 8 + 2 \times 3 & 6 \times 3 + 2 \times 6 & 6 \times 2 + 2 \times 8 \\ 6 \times 8 + 9 \times 3 & 6 \times 3 + 9 \times 6 & 6 \times 2 + 9 \times 8 \\ 5 \times 8 + 5 \times 3 & 5 \times 3 + 5 \times 6 & 5 \times 2 + 5 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 54 & 30 & 28 \\ 75 & 72 & 84 \\ 55 & 45 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AD \neq DA$, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 190 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×3 donnée par :

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 1 + 4 \times 7 + 3 \times 8 & 5 \times 2 + 4 \times 6 + 3 \times 2 & 5 \times 2 + 4 \times 4 + 3 \times 3 \\ 3 \times 1 + 2 \times 7 + 7 \times 8 & 3 \times 2 + 2 \times 6 + 7 \times 2 & 3 \times 2 + 2 \times 4 + 7 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 57 & 40 & 35 \\ 73 & 32 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 191 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 3 + 7 \times 2 + 1 \times 9 + 3 \times 1 \\ 3 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 9 + 7 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 192 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 9 \\ 3 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 9 \\ 3 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 3 \times 8 + 1 \times 3 + 6 \times 6 & 1 \times 4 + 3 \times 9 + 1 \times 9 + 6 \times 1 \\ 3 \times 4 + 7 \times 8 + 8 \times 3 + 8 \times 6 & 3 \times 4 + 7 \times 9 + 8 \times 9 + 8 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 67 & 46 \\ 140 & 155 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est égal au nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×4 donnée par :

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 9 \\ 3 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 4 \times 3 & 4 \times 3 + 4 \times 7 & 4 \times 1 + 4 \times 8 & 4 \times 6 + 4 \times 8 \\ 8 \times 1 + 9 \times 3 & 8 \times 3 + 9 \times 7 & 8 \times 1 + 9 \times 8 & 8 \times 6 + 9 \times 8 \\ 3 \times 1 + 9 \times 3 & 3 \times 3 + 9 \times 7 & 3 \times 1 + 9 \times 8 & 3 \times 6 + 9 \times 8 \\ 6 \times 1 + 1 \times 3 & 6 \times 3 + 1 \times 7 & 6 \times 1 + 1 \times 8 & 6 \times 6 + 1 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 40 & 36 & 56 \\ 35 & 87 & 80 & 120 \\ 30 & 72 & 75 & 90 \\ 9 & 25 & 14 & 44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $AE \neq EA$, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 193 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad D = (3 \ 8)$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (3 \ 8) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 8 \\ 2 \times 3 & 2 \times 8 \\ 3 \times 3 & 3 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 6 & 16 \\ 9 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 194 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = (2 \ 6 \ 4)$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;

2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \quad 6 \quad 4) \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 2 & 7 \times 6 & 7 \times 4 \\ 4 \times 2 & 4 \times 6 & 4 \times 4 \\ 2 \times 2 & 2 \times 6 & 2 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 42 & 28 \\ 8 & 24 & 16 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est égal au nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} DC &= (2 \quad 6 \quad 4) \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 7 + 6 \times 4 + 4 \times 2 \\ &= 46 \end{aligned}$$

3. On a $CD \neq DC$, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 195 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad F = (4 \quad 4 \quad 2 \quad 7)$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;

3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×4 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} (4 \quad 4 \quad 2 \quad 7) \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 4 & 5 \times 4 & 5 \times 2 & 5 \times 7 \\ 3 \times 4 & 3 \times 4 & 3 \times 2 & 3 \times 7 \\ 2 \times 4 & 2 \times 4 & 2 \times 2 & 2 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 20 & 10 & 35 \\ 12 & 12 & 6 & 21 \\ 8 & 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 196 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×1 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 7 + 7 \times 6 \\ 8 \times 7 + 5 \times 6 \\ 8 \times 7 + 8 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 105 \\ 86 \\ 104 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 197 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 1 + 5 \times 5 & 8 \times 8 + 5 \times 2 \\ 7 \times 1 + 1 \times 5 & 7 \times 8 + 1 \times 2 \\ 7 \times 1 + 8 \times 5 & 7 \times 8 + 8 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 33 & 74 \\ 12 & 58 \\ 47 & 72 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 198 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 6 + 9 \times 6 & 2 \times 8 + 9 \times 6 & 2 \times 1 + 9 \times 4 \\ 9 \times 6 + 5 \times 6 & 9 \times 8 + 5 \times 6 & 9 \times 1 + 5 \times 4 \\ 2 \times 6 + 4 \times 6 & 2 \times 8 + 4 \times 6 & 2 \times 1 + 4 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 66 & 70 & 38 \\ 84 & 102 & 29 \\ 36 & 40 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est égal au nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} EC &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \times 2 + 8 \times 9 + 1 \times 2 & 6 \times 9 + 8 \times 5 + 1 \times 4 \\ 6 \times 2 + 6 \times 9 + 4 \times 2 & 6 \times 9 + 6 \times 5 + 4 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 86 & 98 \\ 74 & 100 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Le produit matriciel EC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 199 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CF ;
2. Calculer le produit matriciel FC ;
3. Les matrices C et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CF :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices C et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×4 donnée par :

$$\begin{aligned} CF &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 3 \times 2 & 2 \times 3 + 3 \times 6 & 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 9 + 3 \times 3 \\ 8 \times 2 + 3 \times 2 & 8 \times 3 + 3 \times 6 & 8 \times 5 + 3 \times 7 & 8 \times 9 + 3 \times 3 \\ 6 \times 2 + 2 \times 2 & 6 \times 3 + 2 \times 6 & 6 \times 5 + 2 \times 7 & 6 \times 9 + 2 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 24 & 31 & 27 \\ 22 & 42 & 61 & 81 \\ 16 & 30 & 44 & 60 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FC :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices F et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. On a $CF \neq FC$, on conclut que les matrices C et F ne sont pas commutantes.

Exercice 200 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×1 donnée par :

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 8 + 2 \times 5 + 2 \times 4 \\ 4 \times 8 + 2 \times 5 + 4 \times 4 \\ 4 \times 8 + 3 \times 5 + 9 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 82 \\ 58 \\ 83 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 201 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 9 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 9 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 6 \times 4 + 9 \times 7 & 1 \times 2 + 6 \times 7 + 9 \times 1 \\ 9 \times 1 + 4 \times 4 + 6 \times 7 & 9 \times 2 + 4 \times 7 + 6 \times 1 \\ 6 \times 1 + 9 \times 4 + 5 \times 7 & 6 \times 2 + 9 \times 7 + 5 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 88 & 53 \\ 67 & 52 \\ 77 & 80 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 202 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 + 7 \times 5 & 1 \times 6 + 1 \times 6 + 7 \times 1 & 1 \times 2 + 1 \times 2 + 7 \times 9 \\ 7 \times 2 + 6 \times 3 + 2 \times 5 & 7 \times 6 + 6 \times 6 + 2 \times 1 & 7 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 9 \\ 8 \times 2 + 2 \times 3 + 5 \times 5 & 8 \times 6 + 2 \times 6 + 5 \times 1 & 8 \times 2 + 2 \times 2 + 5 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 & 19 & 67 \\ 42 & 80 & 44 \\ 47 & 65 & 65 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×3 donnée par :

$$\begin{aligned} FB &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 6 \times 7 + 2 \times 8 & 2 \times 1 + 6 \times 6 + 2 \times 2 & 2 \times 7 + 6 \times 2 + 2 \times 5 \\ 3 \times 1 + 6 \times 7 + 2 \times 8 & 3 \times 1 + 6 \times 6 + 2 \times 2 & 3 \times 7 + 6 \times 2 + 2 \times 5 \\ 5 \times 1 + 1 \times 7 + 9 \times 8 & 5 \times 1 + 1 \times 6 + 9 \times 2 & 5 \times 7 + 1 \times 2 + 9 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 60 & 42 & 36 \\ 61 & 43 & 43 \\ 84 & 29 & 82 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $BF \neq FB$, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 203 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 8 \\ 9 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×1 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 8 \\ 9 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 4 + 4 \times 4 + 7 \times 9 + 1 \times 8 \\ 5 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 9 + 8 \times 8 \\ 9 \times 4 + 3 \times 4 + 4 \times 9 + 8 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 99 \\ 172 \\ 148 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 204 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 6 \\ 6 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 3×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 6 \\ 6 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \times 1 + 9 \times 8 + 8 \times 6 + 3 \times 2 & 6 \times 9 + 9 \times 6 + 8 \times 6 + 3 \times 8 \\ 4 \times 1 + 5 \times 8 + 1 \times 6 + 2 \times 2 & 4 \times 9 + 5 \times 6 + 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 5 \times 1 + 6 \times 8 + 2 \times 6 + 2 \times 2 & 5 \times 9 + 6 \times 6 + 2 \times 6 + 2 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 132 & 180 \\ 54 & 88 \\ 69 & 109 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 205 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad E = (8 \quad 4)$$

1. Calculer le produit matriciel BE ;
2. Calculer le produit matriciel EB ;
3. Les matrices B et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BE :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices B et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

4×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} (8 \quad 4) \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 8 & 7 \times 4 \\ 9 \times 8 & 9 \times 4 \\ 3 \times 8 & 3 \times 4 \\ 8 \times 8 & 8 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 56 & 28 \\ 72 & 36 \\ 24 & 12 \\ 64 & 32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EB :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices E et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EB n'étant pas défini, on conclut que les matrices B et E ne sont pas commutantes.

Exercice 206 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad E = (2 \quad 8 \quad 3)$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

4×3 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} (2 \quad 8 \quad 3) \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 2 & 8 \times 8 & 8 \times 3 \\ 4 \times 2 & 4 \times 8 & 4 \times 3 \\ 1 \times 2 & 1 \times 8 & 1 \times 3 \\ 6 \times 2 & 6 \times 8 & 6 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 64 & 24 \\ 8 & 32 & 12 \\ 2 & 8 & 3 \\ 12 & 48 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EC n'étant pas défini, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 207 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E = (3 \quad 6 \quad 8 \quad 3)$$

1. Calculer le produit matriciel CE ;
2. Calculer le produit matriciel EC ;
3. Les matrices C et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CE :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices C et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille

4×4 donnée par :

$$\begin{aligned} CE &= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (3 \quad 6 \quad 8 \quad 3) \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 3 & 8 \times 6 & 8 \times 8 & 8 \times 3 \\ 6 \times 3 & 6 \times 6 & 6 \times 8 & 6 \times 3 \\ 2 \times 3 & 2 \times 6 & 2 \times 8 & 2 \times 3 \\ 3 \times 3 & 3 \times 6 & 3 \times 8 & 3 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 48 & 64 & 24 \\ 18 & 36 & 48 & 18 \\ 6 & 12 & 16 & 6 \\ 9 & 18 & 24 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EC :

Le nombre de colonnes de la matrice E est égal au nombre de lignes de la matrice C . Les matrices E et C sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 1×1 donnée par :

$$\begin{aligned} EC &= (3 \quad 6 \quad 8 \quad 3) \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \times 8 + 6 \times 6 + 8 \times 2 + 3 \times 3 \\ &= 85 \end{aligned}$$

3. On a $CE \neq EC$, on conclut que les matrices C et E ne sont pas commutantes.

Exercice 208 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×1 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 1 + 4 \times 2 \\ 3 \times 1 + 5 \times 2 \\ 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ 3 \times 1 + 6 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 209 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 1 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×2 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 1 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 8 + 4 \times 5 & 4 \times 4 + 4 \times 3 \\ 7 \times 8 + 1 \times 5 & 7 \times 4 + 1 \times 3 \\ 7 \times 8 + 1 \times 5 & 7 \times 4 + 1 \times 3 \\ 3 \times 8 + 2 \times 5 & 3 \times 4 + 2 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 52 & 28 \\ 61 & 31 \\ 61 & 31 \\ 34 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 210 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 6 \\ 9 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AF ;
2. Calculer le produit matriciel FA ;
3. Les matrices A et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AF :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices A et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×3 donnée par :

$$\begin{aligned} AF &= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 6 \\ 9 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 3 + 9 \times 4 & 7 \times 2 + 9 \times 2 & 7 \times 6 + 9 \times 1 \\ 2 \times 3 + 6 \times 4 & 2 \times 2 + 6 \times 2 & 2 \times 6 + 6 \times 1 \\ 9 \times 3 + 7 \times 4 & 9 \times 2 + 7 \times 2 & 9 \times 6 + 7 \times 1 \\ 4 \times 3 + 2 \times 4 & 4 \times 2 + 2 \times 2 & 4 \times 6 + 2 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 57 & 32 & 51 \\ 30 & 16 & 18 \\ 55 & 32 & 61 \\ 20 & 12 & 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FA :

Le nombre de colonnes de la matrice F est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices F et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel FA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et F ne sont pas commutantes.

Exercice 211 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 1 \\ 7 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BF ;
2. Calculer le produit matriciel FB ;
3. Les matrices B et F sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BF :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice F . Les matrices B et F sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×4 donnée par :

$$\begin{aligned} BF &= \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 1 \\ 7 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 7 + 4 \times 6 & 9 \times 2 + 4 \times 2 & 9 \times 7 + 4 \times 3 & 9 \times 2 + 4 \times 6 \\ 7 \times 7 + 1 \times 6 & 7 \times 2 + 1 \times 2 & 7 \times 7 + 1 \times 3 & 7 \times 2 + 1 \times 6 \\ 7 \times 7 + 9 \times 6 & 7 \times 2 + 9 \times 2 & 7 \times 7 + 9 \times 3 & 7 \times 2 + 9 \times 6 \\ 9 \times 7 + 2 \times 6 & 9 \times 2 + 2 \times 2 & 9 \times 7 + 2 \times 3 & 9 \times 2 + 2 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 87 & 26 & 75 & 42 \\ 55 & 16 & 52 & 20 \\ 103 & 32 & 76 & 68 \\ 75 & 22 & 69 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel FB :

Le nombre de colonnes de la matrice F est égal au nombre de lignes de la matrice B . Les matrices F et B sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 2×2 donnée par :

$$\begin{aligned} FB &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 1 \\ 7 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times 9 + 2 \times 7 + 7 \times 7 + 2 \times 9 & 7 \times 4 + 2 \times 1 + 7 \times 9 + 2 \times 2 \\ 6 \times 9 + 2 \times 7 + 3 \times 7 + 6 \times 9 & 6 \times 4 + 2 \times 1 + 3 \times 9 + 6 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 144 & 97 \\ 143 & 65 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $BF \neq FB$, on conclut que les matrices B et F ne sont pas commutantes.

Exercice 212 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel BD ;
2. Calculer le produit matriciel DB ;
3. Les matrices B et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel BD :

Le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices B et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×1 donnée par :

$$\begin{aligned} BD &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 2 + 2 \times 7 + 4 \times 7 \\ 3 \times 2 + 6 \times 7 + 3 \times 7 \\ 2 \times 2 + 5 \times 7 + 5 \times 7 \\ 5 \times 2 + 9 \times 7 + 8 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 58 \\ 69 \\ 74 \\ 129 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DB :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice B . Les matrices D et B ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DB n'étant même pas défini, on conclut que les matrices B et D ne sont pas commutantes.

Exercice 213 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel CD ;
2. Calculer le produit matriciel DC ;
3. Les matrices C et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel CD :

Le nombre de colonnes de la matrice C est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices C et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×2 donnée par :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 8 \times 3 + 4 \times 9 & 1 \times 1 + 8 \times 6 + 4 \times 3 \\ 5 \times 1 + 9 \times 3 + 5 \times 9 & 5 \times 1 + 9 \times 6 + 5 \times 3 \\ 9 \times 1 + 6 \times 3 + 9 \times 9 & 9 \times 1 + 6 \times 6 + 9 \times 3 \\ 1 \times 1 + 7 \times 3 + 7 \times 9 & 1 \times 1 + 7 \times 6 + 7 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 61 & 61 \\ 77 & 74 \\ 108 & 72 \\ 85 & 64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DC :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice C . Les matrices D et C ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DC n'étant même pas défini, on conclut que les matrices C et D ne sont pas commutantes.

Exercice 214 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×3 donnée par :

$$\begin{aligned}
 AD &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 1 \times 8 + 4 \times 9 & 1 \times 8 + 1 \times 4 + 4 \times 5 & 1 \times 4 + 1 \times 2 + 4 \times 8 \\ 2 \times 4 + 1 \times 8 + 9 \times 9 & 2 \times 8 + 1 \times 4 + 9 \times 5 & 2 \times 4 + 1 \times 2 + 9 \times 8 \\ 5 \times 4 + 6 \times 8 + 3 \times 9 & 5 \times 8 + 6 \times 4 + 3 \times 5 & 5 \times 4 + 6 \times 2 + 3 \times 8 \\ 7 \times 4 + 9 \times 8 + 5 \times 9 & 7 \times 8 + 9 \times 4 + 5 \times 5 & 7 \times 4 + 9 \times 2 + 5 \times 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 48 & 32 & 38 \\ 97 & 65 & 82 \\ 95 & 79 & 56 \\ 145 & 117 & 86 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

Exercice 215 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AE ;
2. Calculer le produit matriciel EA ;
3. Les matrices A et E sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AE :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice E . Les matrices A et E sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×1 donnée par :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 4 + 6 \times 3 + 9 \times 2 + 9 \times 2 \\ 9 \times 4 + 4 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 2 \\ 1 \times 4 + 3 \times 3 + 7 \times 2 + 7 \times 2 \\ 1 \times 4 + 1 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 62 \\ 54 \\ 41 \\ 29 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel EA :

Le nombre de colonnes de la matrice E est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices E et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel EA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et E ne sont pas commutantes.

Exercice 216 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel AD ;
2. Calculer le produit matriciel DA ;
3. Les matrices A et D sont-elles commutantes ?

Solution :

1. Calcul du produit matriciel AD :

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice D . Les matrices A et D sont donc conformes pour le produit matriciel, celui-ci

est en conséquence bien défini pour ces deux matrices. C'est une matrice de taille 4×2 donnée par :

$$\begin{aligned}
 AD &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \times 4 + 6 \times 7 + 7 \times 9 + 1 \times 4 & 2 \times 8 + 6 \times 2 + 7 \times 3 + 1 \times 4 \\ 7 \times 4 + 5 \times 7 + 3 \times 9 + 3 \times 4 & 7 \times 8 + 5 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 \\ 2 \times 4 + 2 \times 7 + 2 \times 9 + 3 \times 4 & 2 \times 8 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 \\ 5 \times 4 + 7 \times 7 + 7 \times 9 + 8 \times 4 & 5 \times 8 + 7 \times 2 + 7 \times 3 + 8 \times 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 117 & 53 \\ 102 & 87 \\ 52 & 38 \\ 164 & 107 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Calcul du produit matriciel DA :

Le nombre de colonnes de la matrice D est différent du nombre de lignes de la matrice A . Les matrices D et A ne sont donc pas conformes pour le produit matriciel, celui-ci n'est en conséquence pas défini pour ces deux matrices.

3. Le produit matriciel DA n'étant même pas défini, on conclut que les matrices A et D ne sont pas commutantes.

1.4.4 Puissance d'une matrice carrée

Exercice 217 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice C ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice C ;
3. La matrice C est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice C :

C étant une matrice carrée d'ordre 2, sa puissance 2 est également une matrice carrée d'ordre 2 donnée par :

$$\begin{aligned} C^2 &= CC \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 3 \times 5 & 3 \times 3 + 3 \times 5 \\ 5 \times 3 + 5 \times 5 & 5 \times 3 + 5 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice C :

C étant une matrice carrée d'ordre 2, sa puissance 3 est également une matrice carrée d'ordre 2 donnée par :

$$\begin{aligned} C^3 &= C^2C \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 \times 3 + 24 \times 5 & 24 \times 3 + 24 \times 5 \\ 40 \times 3 + 40 \times 5 & 40 \times 3 + 40 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 192 & 192 \\ 320 & 320 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $C^2 \neq C$, on conclut que la matrice C n'est pas idempotente.

Exercice 218 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice B ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice B ;
3. La matrice B est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice B :

B étant une matrice diagonale, sa puissance 2 est également une matrice diagonale donnée par :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 7^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice B :

B étant une matrice diagonale, sa puissance 3 est également une matrice diagonale donnée par :

$$B^3 = \begin{pmatrix} 7^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 343 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$$

3. On a $B^2 \neq B$, on conclut que la matrice B n'est pas idempotente.

Exercice 219 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice A ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice A ;
3. La matrice A est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 3, sa puissance 2 est également une matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 5 + 4 \times 2 + 7 \times 2 & 5 \times 4 + 4 \times 5 + 7 \times 9 & 5 \times 7 + 4 \times 7 + 7 \times 1 \\ 2 \times 5 + 5 \times 2 + 7 \times 2 & 2 \times 4 + 5 \times 5 + 7 \times 9 & 2 \times 7 + 5 \times 7 + 7 \times 1 \\ 2 \times 5 + 9 \times 2 + 1 \times 2 & 2 \times 4 + 9 \times 5 + 1 \times 9 & 2 \times 7 + 9 \times 7 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 47 & 103 & 70 \\ 34 & 96 & 56 \\ 30 & 62 & 78 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 3, sa puissance 3 est également une matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{pmatrix} 47 & 103 & 70 \\ 34 & 96 & 56 \\ 30 & 62 & 78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 581 & 1333 & 1120 \\ 474 & 1120 & 966 \\ 430 & 1132 & 722 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $A^2 \neq A$, on conclut que la matrice A n'est pas idempotente.

Exercice 220 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice C ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice C ;
3. La matrice C est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 2 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 3 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 8^3 & 0 \\ 0 & 0 & 5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}$$

3. On a $C^2 \neq C$, on conclut que la matrice C n'est pas idempotente.

Exercice 221 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice A ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice A ;
3. La matrice A est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 4, sa puissance 2 est également une matrice carrée d'ordre 4 donnée par :

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 189 & 80 & 179 & 165 \\ 168 & 72 & 161 & 127 \\ 185 & 74 & 178 & 145 \\ 189 & 83 & 182 & 152 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 4, sa puissance 3 est également une matrice carrée d'ordre 4 donnée par :

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= \begin{pmatrix} 189 & 80 & 179 & 165 \\ 168 & 72 & 161 & 127 \\ 185 & 74 & 178 & 145 \\ 189 & 83 & 182 & 152 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4659 & 1975 & 4460 & 3812 \\ 4025 & 1687 & 3850 & 3261 \\ 4437 & 1854 & 4245 & 3614 \\ 4613 & 1947 & 4417 & 3742 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $A^2 \neq A$, on conclut que la matrice A n'est pas idempotente.

Exercice 222 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice C ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice C ;
3. La matrice C est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 2 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 8^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 3 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^3 = \begin{pmatrix} 8^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 343 \end{pmatrix}$$

3. On a $C^2 \neq C$, on conclut que la matrice C n'est pas idempotente.

Exercice 223 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice A ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice A ;
3. La matrice A est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 2, sa puissance 2 est également une matrice carrée d'ordre 2 donnée par :

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 4 \times 4 & 1 \times 4 + 4 \times 1 \\ 4 \times 1 + 1 \times 4 & 4 \times 4 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 2, sa puissance 3 est également une matrice carrée d'ordre 2 donnée par :

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 \times 1 + 8 \times 4 & 17 \times 4 + 8 \times 1 \\ 8 \times 1 + 17 \times 4 & 8 \times 4 + 17 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 49 & 76 \\ 76 & 49 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $A^2 \neq A$, on conclut que la matrice A n'est pas idempotente.

Exercice 224 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice C ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice C ;
3. La matrice C est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 2 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 3 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

3. On a $C^2 \neq C$, on conclut que la matrice C n'est pas idempotente.

Exercice 225 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice A ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice A ;
3. La matrice A est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 3, sa puissance 2 est également une matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 5 + 4 \times 4 + 2 \times 9 & 5 \times 4 + 4 \times 8 + 2 \times 5 & 5 \times 2 + 4 \times 4 + 2 \times 7 \\ 4 \times 5 + 8 \times 4 + 4 \times 9 & 4 \times 4 + 8 \times 8 + 4 \times 5 & 4 \times 2 + 8 \times 4 + 4 \times 7 \\ 9 \times 5 + 5 \times 4 + 7 \times 9 & 9 \times 4 + 5 \times 8 + 7 \times 5 & 9 \times 2 + 5 \times 4 + 7 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 59 & 62 & 40 \\ 88 & 100 & 68 \\ 128 & 111 & 87 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice A :

A étant une matrice carrée d'ordre 3, sa puissance 3 est également une matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{pmatrix} 59 & 62 & 40 \\ 88 & 100 & 68 \\ 128 & 111 & 87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 903 & 932 & 646 \\ 1452 & 1492 & 1052 \\ 1867 & 1835 & 1309 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $A^2 \neq A$, on conclut que la matrice A n'est pas idempotente.

Exercice 226 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice B ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice B ;
3. La matrice B est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice B :

B étant une matrice diagonale, sa puissance 2 est également une matrice diagonale donnée par :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice B :

B étant une matrice diagonale, sa puissance 3 est également une matrice diagonale donnée par :

$$B^3 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 8^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 512 \end{pmatrix}$$

3. On a $B^2 \neq B$, on conclut que la matrice B n'est pas idempotente.

Exercice 227 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice C ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice C ;
3. La matrice C est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice C :

C étant une matrice carrée d'ordre 4, sa puissance 2 est également une matrice carrée d'ordre 4 donnée par :

$$\begin{aligned} C^2 &= CC \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 45 & 46 & 39 \\ 20 & 89 & 23 & 35 \\ 58 & 69 & 59 & 105 \\ 32 & 25 & 26 & 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice C :

C étant une matrice carrée d'ordre 4, sa puissance 3 est également une matrice carrée d'ordre 4 donnée par :

$$\begin{aligned} C^3 &= C^2C \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 45 & 46 & 39 \\ 20 & 89 & 23 & 35 \\ 58 & 69 & 59 & 105 \\ 32 & 25 & 26 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 452 & 651 & 454 & 612 \\ 325 & 965 & 364 & 531 \\ 703 & 1077 & 842 & 1119 \\ 307 & 435 & 331 & 530 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $C^2 \neq C$, on conclut que la matrice C n'est pas idempotente.

Exercice 228 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la puissance 2 de la matrice C ;
2. Calculer la puissance 3 de la matrice C ;
3. La matrice C est-elle idempotente ?

Solution :

1. Calcul la puissance 2 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 2 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 7^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcul la puissance 3 de la matrice C :

C étant une matrice diagonale, sa puissance 3 est également une matrice diagonale donnée par :

$$C^3 = \begin{pmatrix} 7^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 343 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 343 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 729 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On a $C^2 \neq C$, on conclut que la matrice C n'est pas idempotente.

Chapitre 2

Caractéristiques des matrices carrées

Dans ce deuxième chapitre, sont abordées des caractéristiques propres aux matrices carrées. Plus particulièrement, sont résolus des exercices sur la trace (section 2.1), le déterminant (section 2.2), l'inverse (section 2.2) et les valeurs propres d'une matrice carrée (section 1.4).

2.1 Trace d'une matrice carrée

Exercice 229 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice A ;
2. Calculer la trace de la matrice D .

Solution :

1. La trace de la matrice A est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(A) = 8 + 8 = 16$$

2. La trace de la matrice D est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(D) = 1 + 1 = 2$$

Exercice 230 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice C ;
2. Calculer la trace de la matrice D .

Solution :

1. La trace de la matrice C est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(C) = 6 + 8 + 7 = 21$$

2. La trace de la matrice D est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(D) = 2 + 3 + 7 = 12$$

Exercice 231 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice C ;
2. Calculer la trace de la matrice D .

Solution :

1. La trace de la matrice C est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(C) = 3 + 2 + 2 + 5 = 12$$

2. La trace de la matrice D est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(D) = 6 + 6 + 9 + 1 = 22$$

Exercice 232 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 7 & 2 \\ 9 & 6 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice B ;
2. Calculer la trace de la matrice F .

Solution :

1. La trace de la matrice B est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(B) = 5 + 2 + 1 + 8 + 9 = 25$$

2. La trace de la matrice F est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(F) = 7 + 5 + 6 + 3 + 5 = 26$$

Exercice 233 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice C ;
2. Calculer la trace de la matrice E .

Solution :

1. La trace de la matrice C est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(C) = 6 + 7 = 13$$

2. La trace de la matrice E est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(E) = 7 + 6 = 13$$

Exercice 234 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice A ;
2. Calculer la trace de la matrice E .

Solution :

1. La trace de la matrice A est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(A) = 2 + 6 + 3 = 11$$

2. La trace de la matrice E est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(E) = 8 + 5 + 9 = 22$$

Exercice 235 :

On considère les matrices B et F suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice B ;
2. Calculer la trace de la matrice F .

Solution :

1. La trace de la matrice B est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(B) = 4 + 7 + 4 + 2 = 17$$

2. La trace de la matrice F est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(F) = 2 + 9 + 6 + 3 = 20$$

Exercice 236 :

On considère les matrices C et D suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 9 & 9 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 9 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la trace de la matrice C ;
2. Calculer la trace de la matrice D .

Solution :

1. La trace de la matrice C est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(C) = 2 + 3 + 9 + 9 + 9 = 32$$

2. La trace de la matrice D est égale à la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(D) = 1 + 4 + 1 + 2 + 8 = 16$$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée

2.2.1 Cas simple de matrices carrées d'ordre 2

Exercice 237 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice C ;
2. Calculer le déterminant de la matrice E .

Solution :

1. Déterminant de la matrice C :

Le déterminant de la matrice C est donné par :

$$\det(C) = 1 \times 3 - 8 \times 5 = -37$$

2. Déterminant de la matrice E :

La matrice E étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(E) = 4 \times 4 = 16$$

Exercice 238 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A ;
2. Calculer le déterminant de la matrice D .

Solution :

1. Déterminant de la matrice A :

La matrice A étant triangulaire inférieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = 3 \times 8 = 24$$

2. Déterminant de la matrice D :

La matrice D étant triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(D) = 5 \times 1 = 5$$

Exercice 239 :

On considère les matrices B et E suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice B ;
2. Calculer le déterminant de la matrice E .

Solution :

1. Déterminant de la matrice B :

Le déterminant de la matrice B est donné par :

$$\det(B) = 3 \times 2 - 4 \times 9 = -30$$

2. Déterminant de la matrice E :

La matrice E étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(E) = 8 \times 7 = 56$$

Exercice 240 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A ;
2. Calculer le déterminant de la matrice F .

Solution :

1. Déterminant de la matrice A :

La matrice A étant triangulaire inférieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = 6 \times 4 = 24$$

2. Déterminant de la matrice F :

La matrice F étant triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(F) = 2 \times 5 = 10$$

2.2.2 Cas particulier de matrices carrées d'ordre 3

Exercice 241 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice B ;
2. Calculer le déterminant de la matrice D .

Solution :

1. Déterminant de la matrice B :

La matrice B étant carrée d'ordre 3, son déterminant est calculé suivant la règle de Sarrus comme suit :

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= (2 \times 7 \times 6) + (4 \times 7 \times 5) + (6 \times 2 \times 2) - (5 \times 7 \times 6) - (2 \times 7 \times 2) - (6 \times 2 \times 4) \\ &= -38 \end{aligned}$$

Alternativement, le déterminant de la matrice B peut se calculer à l'aide de la méthode des cofacteurs en commençant par sélectionner sa première colonne, par exemple, et en calculant les cofacteurs κ_{11} , κ_{21} et κ_{31} respectivement associés aux éléments sélectionnés $b_{11} = 2$, $b_{21} = 2$ et $b_{31} = 5$ comme suit :

$$\kappa_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 28 = 28$$

$$\kappa_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \times 12 = -12$$

$$\kappa_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (-14) = -14$$

Le déterminant de la matrice B est donné par :

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11} \times \kappa_{11} + b_{21} \times \kappa_{21} + b_{31} \times \kappa_{31} \\ &= 2 \times 28 + 2 \times (-12) + 5 \times (-14) \\ &= -38 \end{aligned}$$

2. Déterminant de la matrice D :

La matrice D étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(D) = 3 \times 9 \times 8 = 216$$

Exercice 242 :

On considère les matrices A et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A ;
2. Calculer le déterminant de la matrice D .

Solution :

1. Déterminant de la matrice A :

La matrice A étant triangulaire inférieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = 8 \times 8 \times 9 = 576$$

2. Déterminant de la matrice D :

La matrice D étant triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(D) = 6 \times 9 \times 6 = 324$$

Exercice 243 :

On considère les matrices C et E suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice C ;
2. Calculer le déterminant de la matrice E .

Solution :

1. Déterminant de la matrice C :

La matrice C étant carrée d'ordre 3, son déterminant est calculé suivant la règle de Sarrus comme suit :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 2 & 2 \\ 9 & 5 & 7 & | & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & | & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(C) &= (2 \times 5 \times 1) + (2 \times 7 \times 3) + (3 \times 9 \times 2) - (3 \times 5 \times 3) - (2 \times 7 \times 2) - (1 \times 9 \times 2) \\ &= 15 \end{aligned}$$

Alternativement, le déterminant de la matrice C peut se calculer à l'aide de la méthode des cofacteurs en commençant par sélectionner sa première colonne, par exemple, et en calculant les cofacteurs κ_{11} , κ_{21} et κ_{31} respectivement associés aux éléments sélectionnés $c_{11} = 2$, $c_{21} = 9$ et $c_{31} = 3$ comme suit :

$$\kappa_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-9) = -9$$

$$\kappa_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times (-4) = 4$$

$$\kappa_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) = -1$$

Le déterminant de la matrice C est donné par :

$$\begin{aligned} \det(C) &= c_{11} \times \kappa_{11} + c_{21} \times \kappa_{21} + c_{31} \times \kappa_{31} \\ &= 2 \times (-9) + 9 \times 4 + 3 \times (-1) \\ &= 15 \end{aligned}$$

2. Déterminant de la matrice E :

La matrice E étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(E) = 8 \times 6 \times 3 = 144$$

Exercice 244 :

On considère les matrices A et E suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A ;

- Calculer le déterminant de la matrice E .

Solution :

- Déterminant de la matrice A :

La matrice A étant triangulaire inférieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = 8 \times 9 \times 3 = 216$$

- Déterminant de la matrice E :

La matrice E étant triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(E) = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

2.2.3 Cas général de matrices carrées d'ordre n quelconque

Exercice 245 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 \\ 8 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- Calculer le déterminant de la matrice B ;
- Calculer le déterminant de la matrice D .

Solution :

- Déterminant de la matrice B :

Le déterminant de la matrice B est calculé par la méthode des cofacteurs en commençant par sélectionner la première colonne, par exemple, de la matrice B et en calculant les cofacteurs κ_{11} , κ_{21} , κ_{31} et κ_{41} respectivement associés aux

éléments sélectionnés $b_{11} = 1$, $b_{21} = 6$, $b_{31} = 4$ et $b_{41} = 8$ comme suit :

$$\kappa_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 6 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 161 = 161$$

$$\kappa_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \times 69 = -69$$

$$\kappa_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 33 = 33$$

$$\kappa_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 1 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times 88 = -88$$

Le déterminant de la matrice B est donné par :

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11} \times \kappa_{11} + b_{21} \times \kappa_{21} + b_{31} \times \kappa_{31} + b_{41} \times \kappa_{41} \\ &= 1 \times 161 + 6 \times (-69) + 4 \times 33 + 8 \times (-88) \\ &= -825 \end{aligned}$$

2. Déterminant de la matrice D :

La matrice D étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(D) = 2 \times 5 \times 9 \times 9 = 810$$

Exercice 246 :

On considère les matrices A et F suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A ;
2. Calculer le déterminant de la matrice F .

Solution :

1. Déterminant de la matrice A :

La matrice A étant triangulaire inférieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = 6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360$$

2. Déterminant de la matrice F :

La matrice F étant triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(F) = 9 \times 9 \times 5 \times 8 = 3240$$

Exercice 247 :

On considère les matrices B et D suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice B ;
2. Calculer le déterminant de la matrice D .

Solution :

1. Déterminant de la matrice B :

Le déterminant de la matrice B est calculé par la méthode des cofacteurs en commençant par sélectionner la première colonne, par exemple, de la matrice B et en calculant les cofacteurs κ_{11} , κ_{21} , κ_{31} et κ_{41} respectivement associés aux éléments sélectionnés $b_{11} = 5$, $b_{21} = 1$, $b_{31} = 2$ et $b_{41} = 6$ comme suit :

$$\kappa_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times (-160) = -160$$

$$\kappa_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1) \times 178 = -178$$

$$\kappa_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 46 = 46$$

$$\kappa_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times (-134) = 134$$

Le déterminant de la matrice B est donné par :

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11} \times \kappa_{11} + b_{21} \times \kappa_{21} + b_{31} \times \kappa_{31} + b_{41} \times \kappa_{41} \\ &= 5 \times (-160) + 1 \times (-178) + 2 \times 46 + 6 \times 134 \\ &= -82 \end{aligned}$$

2. Déterminant de la matrice D :

La matrice D étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(D) = 1 \times 1 \times 5 \times 1 = 5$$

Exercice 248 :

On considère les matrices C et F suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice C ;
2. Calculer le déterminant de la matrice F .

Solution :

1. Déterminant de la matrice C :

La matrice C étant triangulaire inférieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(C) = 5 \times 2 \times 7 \times 8 = 560$$

2. Déterminant de la matrice F :

La matrice F étant triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(F) = 7 \times 9 \times 3 \times 7 = 1323$$

2.3 Inverse d'une matrice carrée

Exercice 249 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice B est-elle inversible?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse B^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice B^{-1} est bien l'inverse de la matrice B .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice B :

La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Le déterminant de la matrice B est égal à :

$$\det(B) = -6$$

Le déterminant de la matrice B étant non-nul, la matrice B est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse B^{-1} :

Commençons d'abord par calculer la matrice des cofacteurs coB :

$$coB = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}3 & (-1)^{1+2}3 \\ (-1)^{2+1}6 & (-1)^{2+2}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 & -3.0 \\ -6.0 & 4.0 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite la matrice adjointe B^* , celle-ci est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs coB :

$$B^* = coB^\top = \begin{pmatrix} 3.0 & -6.0 \\ -3.0 & 4.0 \end{pmatrix}$$

Enfin, la matrice inverse B^{-1} est donnée par :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^* = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 3.0 & -6.0 \\ -3.0 & 4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -2/3 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice B :

Afin de vérifier que la matrice B^{-1} est l'inverse de la matrice B , il faut vérifier l'égalité $BB^{-1} = I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 :

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices B et B^{-1} étant égal à la matrice identité I_2 , on conclut que la matrice B^{-1} est bien l'inverse de la matrice B .

Exercice 250 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. La matrice B est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse B^{-1} ;

3. Vérifier que la matrice B^{-1} est bien l'inverse de la matrice B .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice B :

La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Or, la matrice B étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(B) = 6 \times 4 = 24$$

Le déterminant de la matrice B étant non-nul, la matrice B est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse B^{-1} :

La matrice B étant diagonale, sa matrice inverse B^{-1} est également une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice B :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice B :

Afin de vérifier que la matrice B^{-1} est l'inverse de la matrice B , il faut vérifier l'égalité $BB^{-1} = I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 :

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices B et B^{-1} étant égal à la matrice identité I_2 , on conclut que la matrice B^{-1} est bien l'inverse de la matrice B .

Exercice 251 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice C est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse C^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice C :

La matrice C est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Le déterminant de la matrice C est égal à :

$$\det(C) = -18$$

Le déterminant de la matrice C étant non-nul, la matrice C est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse C^{-1} :

Commençons d'abord par calculer la matrice des cofacteurs coC :

$$coC = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.0 & 12.0 & -3.0 \\ -2.0 & 6.0 & -6.0 \\ 17.0 & -42.0 & 15.0 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite la matrice adjointe C^* , celle-ci est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs coC :

$$C^* = coC^T = \begin{pmatrix} -7.0 & -2.0 & 17.0 \\ 12.0 & 6.0 & -42.0 \\ -3.0 & -6.0 & 15.0 \end{pmatrix}$$

Enfin, la matrice inverse C^{-1} est donnée par :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} C^* = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} -7.0 & -2.0 & 17.0 \\ 12.0 & 6.0 & -42.0 \\ -3.0 & -6.0 & 15.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/18 & 1/9 & -17/18 \\ -2/3 & -1/3 & 7/3 \\ 1/6 & 1/3 & -5/6 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice C :

Afin de vérifier que la matrice C^{-1} est l'inverse de la matrice C , il faut vérifier l'égalité $CC^{-1} = I_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 :

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/18 & 1/9 & -17/18 \\ -2/3 & -1/3 & 7/3 \\ 1/6 & 1/3 & -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices C et C^{-1} étant égal à la matrice identité I_3 , on conclut que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Exercice 252 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice C est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse C^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice C :

La matrice C est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Or, la matrice C étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(C) = 4 \times 6 \times 3 = 72$$

Le déterminant de la matrice C étant non-nul, la matrice C est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse C^{-1} :

La matrice C étant diagonale, sa matrice inverse C^{-1} est également une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice C :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice C :

Afin de vérifier que la matrice C^{-1} est l'inverse de la matrice C , il faut vérifier l'égalité $CC^{-1} = I_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 :

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices C et C^{-1} étant égal à la matrice identité I_3 , on conclut que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Exercice 253 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse A^{-1} ;

3. Vérifier que la matrice A^{-1} est bien l'inverse de la matrice A .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice A :

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Le déterminant de la matrice A est égal à :

$$\det(A) = -1350$$

Le déterminant de la matrice A étant non-nul, la matrice A est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse A^{-1} :

Commençons d'abord par calculer la matrice des cofacteurs coA :

$$coA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 5 & 2 & 9 \\ 8 & 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 5 & 9 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \\ 8 & 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 5 \\ 8 & 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 5 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 240.0 & 187.0 & -232.0 & -159.0 \\ -180.0 & -129.0 & -6.0 & 153.0 \\ -300.0 & 115.0 & 110.0 & -105.0 \\ 270.0 & -189.0 & 54.0 & -27.0 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite la matrice adjointe A^* , celle-ci est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs coA :

$$A^* = coA^T = \begin{pmatrix} 240.0 & -180.0 & -300.0 & 270.0 \\ 187.0 & -129.0 & 115.0 & -189.0 \\ -232.0 & -6.0 & 110.0 & 54.0 \\ -159.0 & 153.0 & -105.0 & -27.0 \end{pmatrix}$$

Enfin, la matrice inverse A^{-1} est donnée par :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} A^* \\ &= \frac{1}{-1350} \begin{pmatrix} 240.0 & -180.0 & -300.0 & 270.0 \\ 187.0 & -129.0 & 115.0 & -189.0 \\ -232.0 & -6.0 & 110.0 & 54.0 \\ -159.0 & 153.0 & -105.0 & -27.0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8/45 & 2/15 & 2/9 & -1/5 \\ -187/1350 & 43/450 & -23/270 & 7/50 \\ 116/675 & 1/225 & -11/135 & -1/25 \\ 53/450 & -17/150 & 7/90 & 1/50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice A :

Afin de vérifier que la matrice A^{-1} est l'inverse de la matrice A , il faut vérifier l'égalité $AA^{-1} = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8/45 & 2/15 & 2/9 & -1/5 \\ -187/1350 & 43/450 & -23/270 & 7/50 \\ 116/675 & 1/225 & -11/135 & -1/25 \\ 53/450 & -17/150 & 7/90 & 1/50 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit matriciel des matrices A et A^{-1} étant égal à la matrice identité I_4 , on conclut que la matrice A^{-1} est bien l'inverse de la matrice A .

Exercice 254 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. La matrice C est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse C^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice C :

La matrice C est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Or, la matrice C étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(C) = 1 \times 3 \times 8 \times 9 = 216$$

Le déterminant de la matrice C étant non-nul, la matrice C est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse C^{-1} :

La matrice C étant diagonale, sa matrice inverse C^{-1} est également une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice C :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice C :

Afin de vérifier que la matrice C^{-1} est l'inverse de la matrice C , il faut vérifier l'égalité $CC^{-1} = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} CC^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit matriciel des matrices C et C^{-1} étant égal à la matrice identité I_4 , on conclut que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Exercice 255 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice C est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse C^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice C :

La matrice C est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Le déterminant de la matrice C est égal à :

$$\det(C) = -36$$

Le déterminant de la matrice C étant non-nul, la matrice C est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse C^{-1} :

Commençons d'abord par calculer la matrice des cofacteurs coC :

$$coC = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}2 & (-1)^{1+2}8 \\ (-1)^{2+1}6 & (-1)^{2+2}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 & -8.0 \\ -6.0 & 6.0 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite la matrice adjointe C^* , celle-ci est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs coC :

$$C^* = coC^T = \begin{pmatrix} 2.0 & -6.0 \\ -8.0 & 6.0 \end{pmatrix}$$

Enfin, la matrice inverse C^{-1} est donnée par :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} C^* = \frac{1}{-36} \begin{pmatrix} 2.0 & -6.0 \\ -8.0 & 6.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/18 & 1/6 \\ 2/9 & -1/6 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice C :

Afin de vérifier que la matrice C^{-1} est l'inverse de la matrice C , il faut vérifier l'égalité $CC^{-1} = I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 :

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/18 & 1/6 \\ 2/9 & -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices C et C^{-1} étant égal à la matrice identité I_2 , on conclut que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Exercice 256 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1. La matrice C est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse C^{-1} ;

3. Vérifier que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice C :

La matrice C est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Or, la matrice C étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(C) = 6 \times 5 = 30$$

Le déterminant de la matrice C étant non-nul, la matrice C est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse C^{-1} :

La matrice C étant diagonale, sa matrice inverse C^{-1} est également une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice C :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice C :

Afin de vérifier que la matrice C^{-1} est l'inverse de la matrice C , il faut vérifier l'égalité $CC^{-1} = I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 :

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices C et C^{-1} étant égal à la matrice identité I_2 , on conclut que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Exercice 257 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice B est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse B^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice B^{-1} est bien l'inverse de la matrice B .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice B :

La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Le déterminant de la matrice B est égal à :

$$\det(B) = 106$$

Le déterminant de la matrice B étant non-nul, la matrice B est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse B^{-1} :

Commençons d'abord par calculer la matrice des cofacteurs coB :

$$coB = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.0 & 38.0 & -11.0 \\ -2.0 & -10.0 & 28.0 \\ 16.0 & -26.0 & -12.0 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite la matrice adjointe B^* , celle-ci est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs coB :

$$B^* = coB^\top = \begin{pmatrix} -3.0 & -2.0 & 16.0 \\ 38.0 & -10.0 & -26.0 \\ -11.0 & 28.0 & -12.0 \end{pmatrix}$$

Enfin, la matrice inverse B^{-1} est donnée par :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^* = \frac{1}{106} \begin{pmatrix} -3.0 & -2.0 & 16.0 \\ 38.0 & -10.0 & -26.0 \\ -11.0 & 28.0 & -12.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/106 & -1/53 & 8/53 \\ 19/53 & -5/53 & -13/53 \\ -11/106 & 14/53 & -6/53 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice B :

Afin de vérifier que la matrice B^{-1} est l'inverse de la matrice B , il faut vérifier l'égalité $BB^{-1} = I_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 :

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/106 & -1/53 & 8/53 \\ 19/53 & -5/53 & -13/53 \\ -11/106 & 14/53 & -6/53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices B et B^{-1} étant égal à la matrice identité I_3 , on conclut que la matrice B^{-1} est bien l'inverse de la matrice B .

Exercice 258 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse A^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice A^{-1} est bien l'inverse de la matrice A .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice A :

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Or, la matrice A étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = 5 \times 3 \times 7 = 105$$

Le déterminant de la matrice A étant non-nul, la matrice A est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse A^{-1} :

La matrice A étant diagonale, sa matrice inverse A^{-1} est également une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice A :

Afin de vérifier que la matrice A^{-1} est l'inverse de la matrice A , il faut vérifier l'égalité $AA^{-1} = I_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel des matrices A et A^{-1} étant égal à la matrice identité I_3 , on conclut que la matrice A^{-1} est bien l'inverse de la matrice A .

Exercice 259 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

1. La matrice C est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse C^{-1} ;

3. Vérifier que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice C :

La matrice C est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Le déterminant de la matrice C est égal à :

$$\det(C) = 348$$

Le déterminant de la matrice C étant non-nul, la matrice C est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse C^{-1} :

Commençons d'abord par calculer la matrice des cofacteurs coC :

$$coC = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 8 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 8 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \\ (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 8 & 8 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 8 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 42.0 & -30.0 & 132.0 & -180.0 \\ 62.0 & 22.0 & -120.0 & 132.0 \\ -58.0 & 58.0 & 0.0 & -0.0 \\ -7.0 & -53.0 & 36.0 & 30.0 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite la matrice adjointe C^* , celle-ci est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs coC :

$$C^* = coC^T = \begin{pmatrix} 42.0 & 62.0 & -58.0 & -7.0 \\ -30.0 & 22.0 & 58.0 & -53.0 \\ 132.0 & -120.0 & 0.0 & 36.0 \\ -180.0 & 132.0 & -0.0 & 30.0 \end{pmatrix}$$

Enfin, la matrice inverse C^{-1} est donnée par :

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{\det(C)} C^* \\ &= \frac{1}{348} \begin{pmatrix} 42.0 & 62.0 & -58.0 & -7.0 \\ -30.0 & 22.0 & 58.0 & -53.0 \\ 132.0 & -120.0 & 0.0 & 36.0 \\ -180.0 & 132.0 & -0.0 & 30.0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7/58 & 31/174 & -1/6 & -7/348 \\ -5/58 & 11/174 & 1/6 & -53/348 \\ 11/29 & -10/29 & 0 & 3/29 \\ -15/29 & 11/29 & 0 & 5/58 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice C :

Afin de vérifier que la matrice C^{-1} est l'inverse de la matrice C , il faut vérifier l'égalité $CC^{-1} = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} CC^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/58 & 31/174 & -1/6 & -7/348 \\ -5/58 & 11/174 & 1/6 & -53/348 \\ 11/29 & -10/29 & 0 & 3/29 \\ -15/29 & 11/29 & 0 & 5/58 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit matriciel des matrices C et C^{-1} étant égal à la matrice identité I_4 , on conclut que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Exercice 260 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice C est-elle inversible ?
2. Si elle est inversible, calculer sa matrice inverse C^{-1} ;
3. Vérifier que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

Solution :

1. Inversibilité de la matrice C :

La matrice C est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Or, la matrice C étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(C) = 4 \times 7 \times 9 \times 3 = 756$$

Le déterminant de la matrice C étant non-nul, la matrice C est en conséquence inversible.

2. Calcul de la matrice inverse C^{-1} :

La matrice C étant diagonale, sa matrice inverse C^{-1} est également une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice C :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'inverse de la matrice C :

Afin de vérifier que la matrice C^{-1} est l'inverse de la matrice C , il faut vérifier l'égalité $CC^{-1} = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} CC^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit matriciel des matrices C et C^{-1} étant égal à la matrice identité I_4 , on conclut que la matrice C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C .

2.4 Valeurs propres d'une matrice carrée

Exercice 261 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice B ;

2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice B est égale à sa trace ;
3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice B est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice B :

L'équation caractéristique associée à la matrice B s'écrit :

$$\det(B - \lambda I_2) = 0$$

où la matrice $B - \lambda I_2$ est donnée par :

$$B - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 9 - \lambda \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_2) &= (3 - \lambda)(9 - \lambda) - 2 \times 2 \\ &= \lambda^2 - 12\lambda + 23 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique s'écrit alors :

$$\lambda^2 - 12\lambda + 23 = 0$$

C'est une équation du 2nd degré à une seule inconnue λ , elle admet les racines suivantes :

$$\mathbb{S} = \{2.39, 9.61\}$$

Les valeurs propres de la matrice B sont donc $\lambda_1 = 2.39$ et $\lambda_2 = 9.61$.

2. Trace de la matrice B :

La trace de la matrice B est égale à :

$$\text{tr}(B) = 3 + 9 = 12$$

Par ailleurs, la somme de ses valeurs propres est égale à :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2.39 + 9.61 = 12.0$$

La somme des valeurs propres de la matrice B est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice B :

Le déterminant de la matrice B est égal à :

$$\det(B) = 23$$

Par ailleurs, le produit de ses valeurs propres est égal à :

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = 2.39 \times 9.61 = 23.0$$

Le produit des valeurs propres de la matrice B est bien égal à son déterminant.

Exercice 262 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice B ;
2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice B est égale à sa trace ;
3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice B est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice B :

La matrice B étant diagonale, ses valeurs propres sont simplement ses éléments diagonaux, en l'occurrence $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 3$.

2. Trace de la matrice B :

La trace de la matrice B est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(B) = 5 + 3 = 8$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice B sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que la somme des valeurs propres de la matrice B est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice B :

Comme la matrice B est diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(B) = 5 \times 3 = 15$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice B sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que le produit des valeurs propres de la matrice B est bien égal à son déterminant.

Exercice 263 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice C ;
2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice C est égale à sa trace ;

3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice C est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice C :

L'équation caractéristique associée à la matrice C s'écrit :

$$\det(C - \lambda I_3) = 0$$

où la matrice $C - \lambda I_3$ est donnée par :

$$C - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 & 2 \\ 1 & 5 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I_3) &= [(1 - \lambda)(5 - \lambda)(3 - \lambda) + 3 \times 2 \times 3 + 2 \times 1 \times 3] \\ &\quad - [3 \times (5 - \lambda) \times 2 + 3 \times 2 \times (1 - \lambda) + (3 - \lambda) \times 1 \times 3] \\ &= -\lambda^3 + 19\lambda^2 - 8\lambda - 6 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique s'écrit alors :

$$-\lambda^3 + 19\lambda^2 - 8\lambda - 6 = 0$$

C'est une équation du 3^{ème} degré à une seule inconnue λ , elle admet les racines suivantes :

$$\mathbb{S} = \{7.89, -0.48, 1.59\}$$

Les valeurs propres de la matrice C sont donc $\lambda_1 = 7.89$, $\lambda_2 = -0.48$ et $\lambda_3 = 1.59$.

2. Trace de la matrice C :

La trace de la matrice C est égale à :

$$\text{tr}(C) = 1 + 5 + 3 = 9$$

Par ailleurs, la somme de ses valeurs propres est égale à :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7.89 - 0.48 + 1.59 = 9.0$$

La somme des valeurs propres de la matrice C est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice C :

Le déterminant de la matrice C est égal à :

$$\det(C) = -6$$

Par ailleurs, le produit de ses valeurs propres est égal à :

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 7.89 \times (-0.48) \times 1.59 = -6.0$$

Le produit des valeurs propres de la matrice C est bien égal à son déterminant.

Exercice 264 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice C ;
2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice C est égale à sa trace ;
3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice C est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice C :

La matrice C étant diagonale, ses valeurs propres sont simplement ses éléments diagonaux, en l'occurrence $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 5$ et $\lambda_3 = 3$.

2. Trace de la matrice C :

La trace de la matrice C est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(C) = 8 + 5 + 3 = 16$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice C sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que la somme des valeurs propres de la matrice C est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice C :

Comme la matrice C est diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(C) = 8 \times 5 \times 3 = 120$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice C sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que le produit des valeurs propres de la matrice C est bien égal à son déterminant.

Exercice 265 :

On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice B ;
2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice B est égale à sa trace ;

3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice B est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice B :

L'équation caractéristique associée à la matrice B s'écrit :

$$\det(B - \lambda I_2) = 0$$

où la matrice $B - \lambda I_2$ est donnée par :

$$B - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ 4 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_2) &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 \times 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 22 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique s'écrit alors :

$$\lambda^2 - 3\lambda - 22 = 0$$

C'est une équation du 2nd degré à une seule inconnue λ , elle admet les racines suivantes :

$$\mathbb{S} = \{-3.42, 6.42\}$$

Les valeurs propres de la matrice B sont donc $\lambda_1 = -3.42$ et $\lambda_2 = 6.42$.

2. Trace de la matrice B :

La trace de la matrice B est égale à :

$$\text{tr}(B) = 1 + 2 = 3$$

Par ailleurs, la somme de ses valeurs propres est égale à :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -3.42 + 6.42 = 3.0$$

La somme des valeurs propres de la matrice B est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice B :

Le déterminant de la matrice B est égal à :

$$\det(B) = -22$$

Par ailleurs, le produit de ses valeurs propres est égal à :

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = -3.42 \times 6.42 = -22.0$$

Le produit des valeurs propres de la matrice B est bien égal à son déterminant.

Exercice 266 :

On considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice C ;
2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice C est égale à sa trace ;
3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice C est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice C :

La matrice C étant diagonale, ses valeurs propres sont simplement ses éléments diagonaux, en l'occurrence $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 4$.

2. Trace de la matrice C :

La trace de la matrice C est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(C) = 3 + 4 = 7$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice C sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que la somme des valeurs propres de la matrice C est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice C :

Comme la matrice C est diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(C) = 3 \times 4 = 12$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice C sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que le produit des valeurs propres de la matrice C est bien égal à son déterminant.

Exercice 267 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A ;
2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice A est égale à sa trace ;

3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice A est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice A :

L'équation caractéristique associée à la matrice A s'écrit :

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

où la matrice $A - \lambda I_3$ est donnée par :

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 3 & 5 \\ 2 & 4 - \lambda & 7 \\ 2 & 7 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= [(3 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda) + 3 \times 7 \times 2 + 5 \times 2 \times 7] \\ &\quad - [2 \times (4 - \lambda) \times 5 + 7 \times 7 \times (3 - \lambda) + (2 - \lambda) \times 2 \times 3] \\ &= -\lambda^3 + 13\lambda^2 + 39\lambda - 63 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique s'écrit alors :

$$-\lambda^3 + 13\lambda^2 + 39\lambda - 63 = 0$$

C'est une équation du 3^{ème} degré à une seule inconnue λ , elle admet les racines suivantes :

$$\mathbb{S} = \{11.84, 1.29, -4.13\}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont donc $\lambda_1 = 11.84$, $\lambda_2 = 1.29$ et $\lambda_3 = -4.13$.

2. Trace de la matrice A :

La trace de la matrice A est égale à :

$$\text{tr}(A) = 3 + 4 + 2 = 9$$

Par ailleurs, la somme de ses valeurs propres est égale à :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 11.84 + 1.29 - 4.13 = 9.0$$

La somme des valeurs propres de la matrice A est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice A :

Le déterminant de la matrice A est égal à :

$$\det(A) = -63$$

Par ailleurs, le produit de ses valeurs propres est égal à :

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 11.84 \times 1.29 \times (-4.13) = -63.0$$

Le produit des valeurs propres de la matrice A est bien égal à son déterminant.

Exercice 268 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A ;
2. Vérifier que la somme des valeurs propres de la matrice A est égale à sa trace ;
3. Vérifier que le produit des valeurs propres de la matrice A est égal à son déterminant.

Solution :

1. Calcul des valeurs propres de la matrice A :

La matrice A étant diagonale, ses valeurs propres sont simplement ses éléments diagonaux, en l'occurrence $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 3$.

2. Trace de la matrice A :

La trace de la matrice A est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(A) = 3 + 4 + 3 = 10$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice A sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que la somme des valeurs propres de la matrice A est bien égale à sa trace.

3. Déterminant de la matrice A :

Comme la matrice A est diagonale, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = 3 \times 4 \times 3 = 36$$

Or, les éléments diagonaux de la matrice A sont également ses valeurs propres puisqu'elle est diagonale. On conclut donc que le produit des valeurs propres de la matrice A est bien égal à son déterminant.

Conclusion

Cette première édition du manuel d'Algèbre linéaire est une collection d'exercices corrigés d'algèbre linéaire permettant aux étudiants de l'enseignement supérieur à orientation scientifique de s'initier au calcul matriciel. Les opérations arithmétiques de base ont été étendues aux matrices et aux vecteurs dans le premier chapitre. Des exercices sur des caractéristiques propres aux matrices carrées ont été résolus dans un second chapitre. Il s'agit notamment d'exercices sur la trace, le déterminant, l'inverse et les valeurs propres de matrices carrées. Les vecteurs propres, nécessitant une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires, n'ont pas été abordés dans la présente édition, ils feront l'objet d'éditions futures.

Bibliographie

- [1] R.P. Agarwal and E.C. Flaut. *An Introduction to Linear Algebra*. CRC Press, 2017.
- [2] M. Anthony and M. Harvey. *Linear Algebra : Concepts and Methods*. Cambridge University Press, 2012.
- [3] H. Anton, C. Rorres, and C. Tremblay. *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*. John Wiley & Sons Canada, Limited, 2005.
- [4] J. Bair and D. Justens. *Algèbre linéaire appliquée : pour l'économie et les sciences sociales*. LMD ÉCONOMIE. De Boeck supérieur, 2020.
- [5] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra : Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.
- [6] G. Charron and P. Parent. *Algèbre Linéaire et Géométrie Vectorielle*. Les Editions de la Cheneliere, Incorporated, 2018.
- [7] J. DeFranza and D. Gagliardi. *Introduction to Linear Algebra with Applications*. Waveland Press, 2015.
- [8] R. Fioresi and M. Morigi. *Introduction to Linear Algebra*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2023.
- [9] J. Grifone. *Algèbre Linéaire*. Cepadues Editions, 2018.
- [10] O. Gün and S. Jallais. *Introduction à l'algèbre linéaire*. Quadriga. Manuel. Presses Universitaires de France/Humensis., 2018.
- [11] K. Holden and A.W. Pearson. *Introductory Mathematics for Economics and Business*. Macmillan, 1992.
- [12] S. Lang. *Introduction to Linear Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [13] G. Mills. *Introduction to linear algebra : a primer for social scientists*. Transaction Publishers, 2007.
- [14] L. Mirsky. *An Introduction to Linear Algebra*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.
- [15] D. Pedoe. *A Geometric Introduction to Linear Algebra*. Chelsea scientific books. Chelsea Publishing Company, 1976.

- [16] D. Poole. *Linear Algebra : A Modern Introduction*. Cengage Learning, 2014.
- [17] R.H. Puckett. *Introduction to Mathematical Economics : Matrix Algebra and Linear Economic Models*. D. C. Heath, 1971.
- [18] G. Schay. *A Concise Introduction to Linear Algebra*. SpringerLink : Bücher. Birkhäuser Boston, 2012.
- [19] F. Szidarovszky, S. Molnar, and M. Molnar. *Introduction To Matrix Theory : With Applications In Economics And Engineering (Second Edition)*. Series On Concrete And Applicable Mathematics. World Scientific Publishing Company, 2022.

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercices corrigés

Ce manuel d'Algèbre linéaire est une collection d'exercices corrigés d'algèbre linéaire destinée aux étudiants de l'enseignement supérieur poursuivant leurs études dans des disciplines scientifiques (mathématiques, physique, biologie, sciences économiques, gestion...). L'objectif étant de se familiariser avec les notions de matrices et de vecteurs et de s'exercer sur le calcul matriciel. Ainsi, dans le chapitre 1, introductif à l'algèbre linéaire, sont traités des exercices sur le calcul matriciel et dans le chapitre 2 sont abordées des caractéristiques propres aux matrices carrées. La résolution des systèmes linéaires ne fait pas partie de la présente édition, elle fera l'objet d'éditions futures.



Jaouad Madkour est docteur en Sciences économiques de l'université d'Orléans et enseignant chercheur à la faculté des sciences juridiques, économiques et sociales de Tanger dans laquelle il enseigne les méthodes quantitatives depuis une dizaine d'années. Il a publié un certain nombre d'articles sur l'application des méthodes quantitatives en économie et en finance.

ISBN 978-9920-42-757-9



9 789920 427579