Mathématiques pour la gestion

Jaouad Madkour
jmadkour@uae.ac.ma

Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales de Tanger
Département des sciences économiques et de gestion

9 février 2026

jmadkour.org

Introduction

Introduction

- Pourquoi des mathématiques en gestion ?
- Objectifs du cours
- Plan du cours
- Références bibliographiques

Introduction

Pourquoi des mathématiques en gestion ?

Exemple 1 : Maximisation du profit d'une entreprise

Imaginons une entreprise qui fabrique une quantité q d'un produit et le vend à un prix p. L'objectif principal de cette entreprise est de maximiser son profit π en fixant un prix de vente optimal p^* lui permettant d'atteindre son objectif. Son problème se formalise de la manière suivante :

- Quantité demandée : $q = 10 - 2p$, c'est une **fonction** du prix p ;
- Revenu total : $R(p) = p \times q = -2p^2 + 10p$, c'est une **fonction** du prix p ;
- Coût total : $C(q) = 50 + 4q = 90 - 8p$, c'est une **fonction** du prix p ;
- Profit : $\pi(p) = R(p) - C(q) = -2p^2 + 18p - 90$, c'est une **fonction** du prix p.

Pour maximiser le profit, il faut d'abord dériver la **fonction** du profit $\pi(p)$ par rapport au prix p et égaliser la dérivée π'_p ainsi obtenue à zéro. On trouve $p^* = 4.5$ dirhams.

Introduction

Exemple 2 : Maximisation du profit d'une entreprise

Reprenons l'exemple précédent et supposons que l'entreprise doive fixer à la fois le prix de vente optimal p^* et la quantité optimale à produire q^* qui maximisent sont profit π. Son problème se formalise comme suit :

- Revenu total : $R(p,q) = p \times q$, c'est une **fonction** du prix p et de la quantité q ;
- Coût total : $C(q) = 50 + 10q$, c'est une **fonction** de la quantité q ;
- Profit : $\pi(p,q) = q(p-10) - 50$, c'est une **fonction** du prix p et de la quantité q.

Pour maximiser le profit, il faut d'abord dériver la **fonction** du profit $\pi(p,q)$ par rapport au prix p et par rapport à la quantité q et égaliser les dérivées partielles π'_p et π'_q ainsi obtenues à zéro. On trouve $p^* = 10$ dirhams et $q^* = 0$ unités (quantité non pertinente !).

Introduction

Exemple 3 : Planification de la production

Imaginons que cette entreprise fabrique deux produits A et B, nécessitant chacun du temps de machine (elle en dispose de 100 heures) et des matériaux (elle en a 200 kg):

	Produit A	Produit B
Temps de machine par unité produite	2h	1h
Matériaux par unité produite	3kg	2kg
Profit par unité vendue	30dh	20dh
Nombre d'unités produites	x	y

L'objectif de l'entreprise est de fixer les quantités optimales x^* et y^* des produits A et B qui lui permettent de maximiser son profit total $\pi(x,y) = 30x + 20y$ sous les contraintes des ressources disponibles :

$$\begin{cases} 2x + 1y = 100 \text{ (Temps de machine)} \\ 3x + 2y = 200 \text{ (Matériaux)} \end{cases}$$

Une solution possible de ce **système d'équations linéaires** est : $x^* = 0$ et $y^* = 100$.

Introduction

Objectifs du cours

Objectif 1 : Apprendre à étudier des fonctions d'une seule variable

- Domaine de définition, limites et continuité d'une fonction d'une seule variable ;
- Dérivées, convexité et optimisation d'une fonction d'une seule variable ;
- Intégration d'une fonction d'une seule variable.

Objectif 2 : Apprendre à étudier des fonctions de plusieurs variables

- Continuité, dérivée et convexité d'une fonction de plusieurs variables ;
- Fonctions homogènes et fonctions implicites ;
- Optimisation et optimisation sous contrainte d'une fonction de plusieurs variables.

Objectif 3 : Apprendre à résoudre des systèmes d'équations linéaires

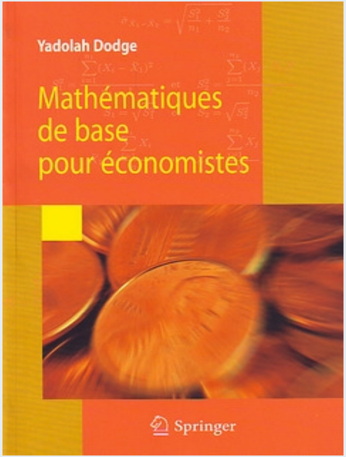
- Initiation au calcul matriciel
- Résolution de systèmes d'équations linéaires

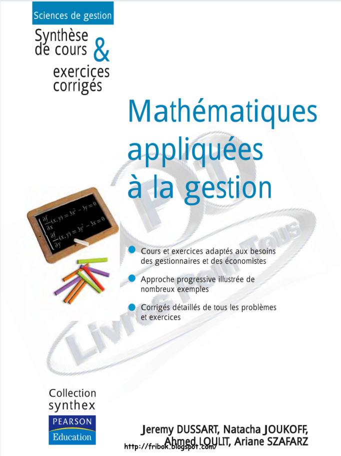
Introduction

Plan du cours

Introduction

Références bibliographiques





Sommaire

Chapitre 4 :

Éléments d'algèbre linéaire

Sommaire

Section 4.1 :

Calcul matriciel

Sous-section 4.1.1 : Définitions
Sous-section 4.1.2 : Opérations sur les matrices
Sous-section 4.1.3 : Caractéristiques des matrices carrées

Sous-section 4.1.1 :

Définitions

- Matrice
- Vecteur
- Matrice rectangulaire
- Matrice carrée
- Matrice diagonale
- Matrice identité
- Matrice scalaire
- Matrice triangulaire
- Matrice nulle
- Matrice opposée
- Matrice transposée
- Matrice symétrique
- Matrice anti-symétrique

Matrice

Une **matrice** de taille $n \times m$ est un tableau de nombres, appelés *éléments* ou *coefficients*, rangés en n lignes horizontales et m colonnes verticales :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Notation

Une matrice est désignée par une lettre majuscule en précisant parfois sa taille $A_{n\times m}$. Ses coefficients sont notés par la lettre minuscule correspondante "a" affectée des indices de la ligne i et de la colonne j sur lesquelles ils se situent :

$$A_{n\times m} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \equiv \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$$

Exemples

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Vecteur

Un **vecteur x** est une matrice composée d'une seule ligne **ou** d'une seule colonne.

Exemples

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matrice rectangulaire

Une **matrice rectangulaire** de taille $n \times m$ est une matrice qui n'a pas le même nombre de lignes que de colonnes (i.e. $n \neq m$).

Exemples

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrice carrée

Une **matrice carrée** d'ordre n, notée A_n, est une matrice qui a le même nombre n de lignes que de colonnes. Les coefficients qui se trouvent sur des lignes et des colonnes de mêmes indices forment la *diagonale principale* de la matrice carrée.

Exemples

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_5 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée d'ordre n, dont les coefficients hors diagonale sont tous nuls. Elle est notée $D_n = diag(\ d_{11}\ ,\ d_{22}\ ,\cdots,\ d_{nn}\ )$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv diag(\ 1\ ,\ 5\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$$

Matrice identité

Une **matrice identité** d'ordre n (ou une *matrice unité*), notée I_n, est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, c'est à dire : $I_n = diag(\ 1\ , 1\ , \cdots,\ 1\ )$.

Exemples

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Il ne faut pas confondre une matrice unité qui est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 avec une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exemples

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice scalaire

Une **matrice scalaire** A est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un scalaire α, c'est à dire : $A = diag(\ \alpha\ ,\ \alpha\ , \cdots,\ \alpha\ )$.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont les coefficients situés au dessus de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire strictement inférieure

Une **matrice triangulaire strictement inférieure** est une matrice carrée dont les coefficients diagonaux et les coefficients situés au dessus de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont les coefficients situés au dessous de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire strictement supérieure

Une **matrice triangulaire strictement supérieure** est une matrice carrée dont les coefficients diagonaux et les coefficients situés au dessous de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice nulle

Une **matrice nulle** est une matrice de taille $n \times m$, notée $O_{n \times m}$, dont les coefficients sont tous nuls.

Exemples

$$O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice opposée

La **matrice opposée** (ou l'*opposée*) de la matrice $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ est une matrice de même taille, notée $-A$, dont les coefficients sont les opposés des coefficients de la matrice A, c'est à dire : $-A = [-a_{ij}]_{n\times m}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -6 & -5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrice transposée

La **matrice transposée** (ou la *transposée*) de la matrice $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ est une matrice de taille $m \times n$, notée $A^\top$, A' ou ${}^tA$, dont les lignes et les colonnes sont respectivement les colonnes et les lignes de la matrice A, c'est à dire : $A^\top = [a_{ji}]_{m\times n}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice symétrique

Une **matrice symétrique** A est une matrice carrée dont les coefficients symétriques par rapport à sa diagonale principale sont identiques.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriété

La transposée $A^\top$ d'une matrice symétrique A est égale à la matrice A, c'est à dire : $A^\top = A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Matrice anti-symétrique

Une **matrice anti-symétrique** $A = [a_{ij}]$ est une matrice carrée dont les coefficients symétriques par rapport à sa diagonale principale sont des opposés.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 5 & -6 \\ 5 & 4 & -5 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété

La transposée $A^\top$ d'une matrice anti-symétrique A est égale à l'opposée de la matrice A, c'est à dire : $A^\top = -A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 3 \\ -7 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ -3 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Sous-section 4.1.2 :

Opérations sur les matrices

- Comparaison de matrices
- Addition de matrices
- Soustraction de matrices
- Multiplication d’une matrice par un scalaire
- Produit scalaire
- Produit matriciel
- Puissance d’une matrice

Comparaison de matrices

Deux matrices $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ et $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ sont *égales* si elles ont la même taille (i.e. $n = p$ et $m = q$) et si leurs coefficients correspondants sont identiques, c'est à dire : $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} A = B & B \neq C \\ A \neq C & B \neq D \\ A \neq D & C \neq D \end{array}$$

Addition de matrices

L'**addition** de deux matrices de même taille $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ et $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ est une matrice de même taille $A+B$ obtenue en additionnant leurs coefficients correspondants :

$$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{n\times m}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 2+4 & 5+1 & 4+8 \\ 8+1 & 4+8 & 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 9 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Soustraction de matrices

La **soustraction** de deux matrices A et B est simplement la somme de la matrice A et de l'opposée de la matrice B : $A - B = A + (-B)$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A - B = \begin{bmatrix} 2-4 & 5-1 & 4-8 \\ 8-1 & 4-8 & 3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 7 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Multiplication d’une matrice par un scalaire

Le produit d’une matrice $A=[a_{ij}]$ par un scalaire α est une matrice αA (notée également $\alpha \cdot A$ ou $\alpha \times A$) obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice A par le même scalaire α, c’est à dire : $\alpha A=[\alpha a_{ij}]$.

Exemple

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2A=\begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 5 & 2\times 4 \\ 2\times 8 & 2\times 4 & 2\times 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 16 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Produit scalaire

Le **produit scalaire** de deux vecteurs de même taille $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est un scalaire, noté $\langle A, B\rangle$ ou $A.B$, donné par :

$$\langle A, B\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Si les vecteurs A et B sont identiques, $\langle A, B\rangle$ est appelé *carré scalaire*.

Exemple

$$A = (\ 2\ ,\ 5\ ,\ 3\ ) \qquad\qquad B = (\ 4\ ,\ 1\ ,\ 6\ )$$

$$\langle A, B\rangle = 2 \times 4 + 5 \times 1 + 3 \times 6 = 31$$

PRODUIT MATRICIEL

Le **produit matriciel** de deux matrices $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ et $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ est une matrice de taille $n\times q$, notée AB, $A\cdot B$ ou $A\times B$, dont les coefficients π_{ij} sont donnés par la produit scalaire de la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B : $\pi_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$

DANS LA PRATIQUE

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{bmatrix} b_{11} & {\color{red}b_{1j}} & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & {\color{red}b_{kj}} & b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & {\color{red}b_{pj}} & b_{pq} \end{bmatrix} \leftarrow B \\
A \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ {\color{red}a_{i1}} & \cdots & {\color{red}a_{ik}} & \cdots & {\color{red}a_{ip}} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & {\color{red}\pi_{ij}} & \\ & & \end{bmatrix} \leftarrow AB
\end{array}$$

Exemple

On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Le produit matriciel AB est donné par :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 13 & 15 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Remarque 1

Si l'une des matrices A et B est nulle alors leur produit AB est par construction nul. Le contraire n'est pas nécessairement vrai : le produit AB peut être nul sans qu'aucune des matrices A et B ne le soit.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O_{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq O_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O_{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}$$

Remarque 2

L'égalité des produits matriciels AB et AC n'implique pas nécessairement l'égalité de B et C.

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\[2ex] B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\[2ex] C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \right| \Rightarrow \quad AB = AC = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 20 & 12 \end{bmatrix}$$

Puissance d'une matrice

La **puissance** r d'une matrice carrée A d'ordre n, notée A^r, est le produit matriciel de cette matrice par elle-même r fois :

$$A^r = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r \text{ facteurs}}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ A^1 &= A \\ A^2 &= A \times A \\ A^3 &= A \times A \times A = A^2 \times A \\ &\vdots \\ A^r &= A^{r-1} \times A \end{aligned}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 20 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 148 & 195 \\ 156 & 187 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 148 & 195 \\ 156 & 187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1076 & 1325 \\ 1060 & 1341 \end{bmatrix}$$

Matrice idempotente

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **idempotente** si elle vérifie $A^2 = A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Matrice nilpotente

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **nilpotente d'indice** $r \in \mathbb{N}^*$ si ses puissances s'annulent à partir d'une certaine valeur de r, c'est à dire :

$$A^{r-1} \neq O_{n\times n} \text{ et } A^r = O_{n\times n}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sous-section 4.1.3 :

Caractéristiques des matrices carrées

- Trace
- Déterminant
- Inverse

Trace d'une matrice carrée

La **trace** d'une matrice carrée A d'ordre n, notée $tr(A)$, est égale à la somme de ses coefficients diagonaux, c'est à dire : $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = 2 + 3 + 1 = 6$$

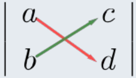
Déterminant d'une matrice carrée

Le **déterminant** d'une matrice carré A est un scalaire, noté $det(A)$ ou $|A|$, qui caractérise la matrice A et qui intervient, entre autres, dans le calcul de sa matrice inverse, de ses valeurs propres, du rang d'une matrice et aussi dans la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Le **déterminant** d'une matrice carrée A d'ordre 2 est un scalaire, noté $det(A)$ ou $|A|$, donné par la différence entre le produit des coefficients diagonaux et le produit des coefficients hors diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 4) - 3(\times 2) = -2$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : Règle de Sarrus

Le *déterminant* d'une matrice carrée A d'ordre 3 est un scalaire, noté $det(A)$ ou $|A|$, calculé par la règle de Sarrus qui consiste à recopier, dans l'ordre, les deux premières colonnes à droite de la matrice puis additionner les produits des coefficients des diagonales descendantes et soustraire les produits des coefficients des diagonales ascendantes :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|$$

$$det(A) = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (c_1 b_2 a_3 + a_1 c_2 b_3 + b_1 a_2 c_3)$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (4+8+0) - (0+2+6) = 4$$

Remarque

La règle de Sarrus ne s'applique qu'à des matrices carrées d'ordre 3. Elle peut se faire aussi en recopiant, dans l'ordre, les deux premières lignes sous la matrice puis en additionnant les produits des coefficients des diagonales descendantes et en soustrayant les produits des coefficients des diagonales ascendantes :

$$\begin{array}{ccc} \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \hline \end{array}$$

$$det(A) = (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3)$$

Mineur et cofacteur associé

Soit A_n une matrice carrée d'ordre n et A_{ij} la sous-matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j de la matrice A_n :

- Le déterminant de A_{ij} est un *mineur* d'ordre $n-1$ de la matrice A_n ;
- $c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$ est le *cofacteur* de A_n associé au coefficient a_{ij}.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n : Méthode des cofacteurs

Le *déterminant* d'une matrice carrée A_n est un scalaire obtenu comme suit :

1. Sélectionner une ligne i ou une colonne j de la matrice A_n ;
2. Calculer les cofacteurs c_{ij} associés aux coefficients a_{ij} sélectionnés ;
3. Multiplier chaque coefficient sélectionné a_{ij} par son cofacteur c_{ij} ;
4. Additionner les produits des coefficients a_{ij} par leurs cofacteurs c_{ij}.

Le résultat final est le déterminant de la matrice A_n formalisé comme suit :

$$\text{Selon la ligne } i : det(A_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

$$\text{Selon la colonne } j : det(A_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

Exemple

Développement selon la ligne 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (4-2) - 2(3-4) = 4$$

Développement selon la colonne 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(2-8) + (4-6) = 4$$

Matrice inverse

Une matrice carrée A est *inversible* s'il existe une matrice carrée B de même ordre, dite *matrice inverse* de la matrice A et notée A^{-1}, telle que :

$$AB = BA = I \tag{1}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$$

Théorème

Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre telles que $AB = I$, alors $BA = I$.

Conséquence du théorème

Afin de vérifier qu'une matrice carrée B est l'inverse d'une matrice carrée A de même ordre, il suffit de vérifier que $AB = I$ car la deuxième partie $BA = I$ sera automatiquement vérifiée.

Matrice des cofacteurs

La **matrice des cofacteurs** (ou la **comatrice**) associée à une matrice carrée A d'ordre n est une matrice carrée de même ordre n, notée A^c, obtenue en remplaçant chaque coefficient a_{ij} de la matrice A par le cofacteur correspondant c_{ij}.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^c = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice adjointe

La **matrice adjointe** associée à une matrice carrée A, notée A^a, est la transposée de sa matrice des cofacteurs A^c, c'est à dire : $A^a = (A^c)^\top$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^c = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^a = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Théorème

Soit A une matrice carrée et A^a sa matrice adjointe. On a : $AA^a = A^a A = det(A)I$

Conséquences du théorème

- Si $det(A) \neq 0$, on divise la relation précédente par $det(A)$ et on obtient :

$$A\left(\frac{A^a}{det(A)}\right) = \left(\frac{A^a}{det(A)}\right)A = I \tag{2}$$

On reconnaît ici la définition (1) d'une matrice inverse. On conclut que la matrice A est inversible et sa matrice inverse A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}A^a \tag{3}$$

- Si $det(A) = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible et sa matrice inverse n'est pas définie.

Définitions

Une matrice carrée A est dite *inversible* ou *régulière* si son déterminant $det(A)$ est non nul. Dans le cas contraire, la matrice A n'est pas inversible, elle est dite *singulière*.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad det(A) = 7 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad det(B) = 0 \quad \rightarrow \quad B \text{ est singulière}$$

Sommaire

Section 4.2 :

Systèmes d'équations linéaires

Sous-section 4.2.1 :

Retour sur la résolution des équations linéaires

- Équation linéaire
- Résolution d'une équation linéaire
- Géométrie de la résolution d'une équation linéaire
- Nombre de solutions d'une équation linéaire

Équation linéaire

Une **équation linéaire** s'écrit : $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, avec :

- $a_1, a_2, \cdots, a_n$: les **coefficients** de l'équation, il s'agit de nombres réels connus ;
- $x_1, x_2, \cdots, x_n$: les **inconnues** de l'équation, il s'agit de nombres (réels) inconnus à déterminer ;
- b : le **second membre** de l'équation, il s'agit d'un nombre réel connu.

Exemples

- Équation du premier degré à une inconnue : $2x + 3 = 0$;
- Équation du premier degré à deux inconnues : $2x + 3y = 1$.

- Équation du second degré à une inconnue : $2x^2 + 3x + 1 = 0$, c'est une équation **non linéaire** du fait de la puissance 2.

Résolution d'une équation linéaire

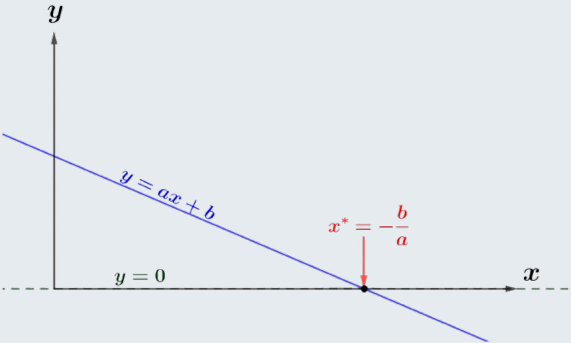
La **résolution d'une équation linéaire** $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ consiste à trouver les valeurs (réelles) $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ des inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$, en fonction des coefficients $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et du second membre b, qui satisfont simultanément cette équation.

Exemples

- La solution de l'équation $2x+3=0$ est $x^* = -\dfrac{3}{2}$;
- La solution de l'équation $2x+3y=1$ est $x^* = \dfrac{1-3y}{2}, \forall y \in \mathbb{R}$.

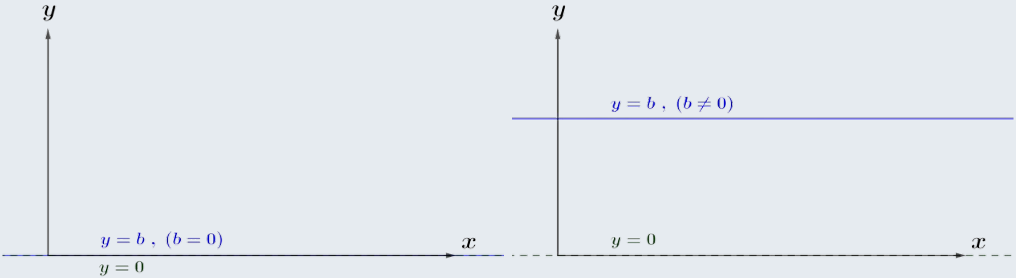
Géométrie de la résolution d'une équation linéaire

Considérons, sans perte de généralité, une équation linéaire du premier degré $ax+b=0$. Cette équation peut être décomposée en équations de deux droites $y=ax+b$ et $y=0$. Géométriquement, la résolution de l'équation $ax+b=0$ revient à chercher le point d'intersection entre la droite $y=ax+b$ et la droite $y=0$:



Nombre de solutions d'une équation linéaire

- Les droites se coupent en un seul point (figure précédente): Solution unique ;
- Les droites sont confondues (figure de gauche): Infinité de solutions
- Les droites sont parallèles (figure de droite): Aucune solution



Sous-section 4.2.2 :

Systèmes (d'équations) linéaires

- Système (d'équations) linéaires
- Écriture matricielle d'un système linéaire
- Résolution d'un système linéaire
- Géométrie de la résolution d'un système linéaire
- Nombre de solutions d'un système linéaire
- Ensemble des solutions d'un système linéaire

Système (d'équations) linéaires

Un **système d'équations linéaires** (ou **système linéaire**), noté $\mathscr{S}$, se présente comme suit :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Exemples

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x+y+z & = & 2 \\ 2x+y+3z & = & 4 \\ 4x+3y-z & = & 1 \end{cases}$$

$$\mathscr{S}_2 : \begin{cases} 2x-y+z & = & 1 \\ 3x+y+2z & = & 0 \\ x-2y-z & = & -1 \\ -x+3y+z & = & 2 \end{cases}$$

$$\mathscr{S}_3 : \begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ 2x+3y & = & -1 \end{cases}$$

Écriture matricielle d'un système linéaire

Un système linéaire $\mathscr{S}$ s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A_{m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B_{m\times 1}}$$

avec :

- A : la matrice des coefficients
- X : le vecteur des inconnues
- B : le vecteur des constantes

$$\boxed{\mathscr{S} \Longleftrightarrow AX = B}$$

Exemples

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+y+3z &= 4 \\ 4x+3y-z &= 1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A_{3\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_{3\times 1}}$$

$$\mathscr{S}_2 : \begin{cases} 2x-y+z &= 1 \\ 3x+y+2z &= 0 \\ x-2y-z &= -1 \\ -x+3y+z &= 2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{4\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B_{4\times 1}}$$

$$\mathscr{S}_3 : \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 2x+3y &= -1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B_{2\times 1}}$$

Résolution d'un système linéaire

La **résolution d'un système linéaire** $\mathscr{S}$ consiste à trouver la valeur (réelle) $X^* = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*]$ du vecteur des inconnues $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^\top$ qui satisfait ce système d'équations.

Exemples

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x + 2y + z & = & 3 \\ 2x + 3y - z & = & -6 \\ 3x - 2y - 4z & = & -2 \end{cases}$$

Le vecteur $X^* = [4, -3, 5]^\top$ est une solution du système $\mathscr{S}$. C'est à dire, lorsque l'on remplace x par 4, y par -3 et z par 5, toutes les équations du système linéaire $\mathscr{S}$ sont satisfaites.

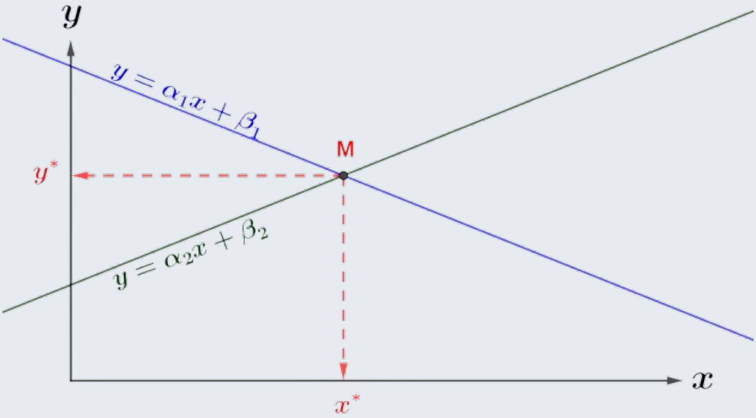
Géométrie de la résolution d'un système linéaire

Considérons, sans perte de généralité, le système linéaire $\mathscr{S}'$ suivant :

$$\mathscr{S}' : \left\{ \begin{array}{lcl} a_1 x + b_1 y & = & c_1 \\ a_2 x + b_2 y & = & c_2 \end{array} \right. \iff \mathscr{S}' : \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \alpha_1 x + \beta_1 \\ y & = & \alpha_2 x + \beta_2 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_i & = & -a_i / b_i \\ \beta_i & = & c_i / b_i \\ i & = & 1,2 \end{array} \right.$$

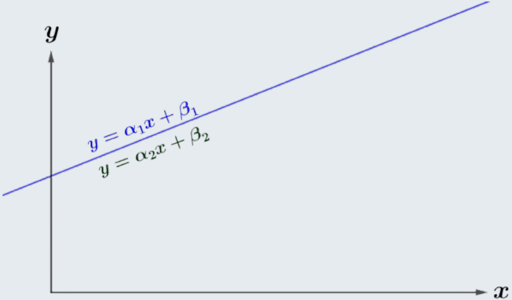
Géométriquement, la résolution du système d'équations $\mathscr{S}'$ revient à chercher le point M, de coordonnées x^* et y^*, d'**intersection** entre les droites d'équations $y = \alpha_1 x + \beta_1$ et $y = \alpha_2 x + \beta_2$ respectivement.

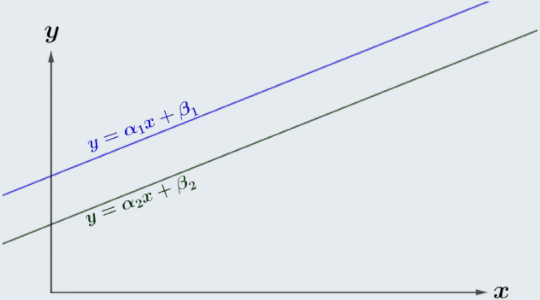
Géométrie de la résolution d'un système linéaire



Nombre de solutions d'un système linéaire

- Les droites se coupent en un seul point (figure précédente): Solution unique ;
- Les droites sont confondues (figure de gauche): Infinité de solutions
- Les droites sont parallèles (figure de droite): Aucune solution





Ensemble des solutions d'un système linéaire

L'**ensemble des solutions** d'un système linéaire est noté $\mathbb{S}$:

- $\mathbb{S}$ peut contenir une solution unique : $\mathbb{S} = \left\{X^* = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*]^\top\right\}$ (une seule intersection)
- $\mathbb{S}$ peut contenir une infinité de solutions (confusion)
- $\mathbb{S}$ peut être vide : $\mathbb{S} = \varnothing$ (aucune intersection)

Sous-section 4.2.3 :

Algorithme de Gauss

- Opérations élémentaires sur les lignes
- Matrice échelonnée en lignes
- Algorithme de Gauss
- Principes de l'algorithme de Gauss
- Pivotage partiel

Opérations élémentaires sur les lignes

Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice A consistent à :

- O_1 : Permuter deux lignes de la matrice A.
- O_2 : Multiplier une ligne de la matrice A par une constante non nulle.
- O_3 : Ajouter à une ligne de la matrice A le multiple d'une autre ligne.

Exemple

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_1} \begin{array}{c} L_1' \leftarrow L_2 \\ L_2' \leftarrow L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_2} \begin{array}{c} L_1'' \leftarrow L_1' \\ L_2'' \leftarrow 3L_2' \\ L_3'' \leftarrow L_3' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1'' \leftarrow L_1' \\ L_2'' \leftarrow 3L_2' \\ L_3'' \leftarrow L_3' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_3} \begin{array}{c} L_1''' \leftarrow L_1'' \\ L_2''' \leftarrow L_2'' \\ L_3''' \leftarrow L_3'' - 3L_1'' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \\ 0 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée en lignes

Une matrice E de taille $n \times m$ est dite **échelonnée en lignes** si elle s'écrit sous la forme suivante :

$$E_{n\times m} = \left[\begin{array}{cccccc} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1r} & \cdots & e_{1m} \\ 0 & e_{22} & \cdots & e_{2r} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{rr} & \cdots & e_{rm} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

- Les éléments $e_{11}, e_{22}, \cdots, e_{rr}$ sont appelés pivots. Un pivot est non-nul, de préférence égal à 1.
- A l'exception de la première ligne, les premiers éléments de chaque ligne sont nuls.
- Plus le nombre de premiers éléments nuls d'une ligne est grand, plus celle-ci est placée en bas de la matrice. Les lignes de la matrice sont donc **échelonnées**.

Exemple

La matrice E suivante est une matrice échelonnée en lignes :

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Gauss

L'**algorithme de Gauss** consiste à appliquer des opérations élémentaires aux lignes d'une matrice selon une stratégie bien définie afin de la réduire à sa forme échelonnée en lignes. Pour ce faire, on utilise le plus souvent l'opération O_3 avec chaque élément de la diagonale de la matrice, appelé **pivot**, pour annuler les éléments qui lui succèdent dans la même colonne.

Principes de l'algorithme de Gauss

La réduction d'une matrice à sa forme échelonnée en lignes doit respecter quelques principes :

- Transformer entièrement une colonne avant de passer à la colonne suivante.
- Travailler sur les colonnes dans l'ordre, de gauche à droite.
- Permuter deux lignes de la matrice lorsqu'un élément à utiliser comme pivot est nul.
- Ne jamais utiliser une opération qui modifie un zéro dans une colonne déjà transformée.
- Ne jamais utiliser la ligne numéro i de la matrice après avoir transformé sa colonne numéro i.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 12 & -2\\ 5 & 26 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{O_1}\begin{pmatrix}5 & 26 & 5\\ 2 & 12 & -2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{O_2}\begin{pmatrix}1 & 5.2 & 1\\ 2 & 12 & -2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{O_3}\begin{pmatrix}1 & 5.2 & 1\\ 0 & 1.6 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{O_3}\begin{pmatrix}1 & 5.2 & 1\\ 0 & 1.6 & -4\\ 0 & -3.2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{O_1}\begin{pmatrix}1 & 5.2 & 1\\ 0 & -3.2 & 3\\ 0 & 1.6 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{O_2}\begin{pmatrix}1 & 5.2 & 1\\ 0 & 1 & -0.9375\\ 0 & 1.6 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{O_3}\begin{pmatrix}1 & 5.2 & 1\\ 0 & 1 & -0.9375\\ 0 & 0 & -2.5\end{pmatrix}\xrightarrow{O_2}\begin{pmatrix}1 & 5.2 & 1\\ 0 & 1 & -0.9375\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Remarques

- L'algorithme de Gauss a plusieurs applications : calcul du rang d'une matrice, résolution d'un système linéaire... etc.
- L'algorithme de Gauss s'applique aussi bien aux lignes qu'aux colonnes d'une matrice. Mais lorsqu'il s'agit de résoudre un système linéaire, il est recommandé de l'appliquer aux lignes plutôt qu'aux colonnes pour éviter toute confusion entre les inconnues d'une part, et entre les inconnues et les seconds membres des équations d'autre part.

Sous-section 4.2.4 :

Rang d'une matrice

Rang d'une matrice

Le **rang** d'une matrice A de taille $n \times m$, noté $\text{rang}(A)$, est le nombre de lignes non-nulles de sa forme échelonnée en lignes E.

Exemple

Le rang de la matrice A suivante est égal au nombre de lignes non-nulles de sa forme échelonnée en lignes E, en l'occurrence 2 ($\text{rang}(A) = 2$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice augmentée d'un système linéaire

La **matrice augmentée** d'un système linéaire $AX = B$, noté $A|B$, est une matrice obtenue en joignant à la matrice des coefficients A le vecteur des constantes B.

Théorème de Rouché-Fontené : Nombre de solutions d'un système linéaire

Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire $\mathscr{S}$ à n équations et m inconnues :

- Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B)$, le système linéaire $\mathscr{S}$ est **incompatible**. Il n'admet aucune solution.
- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = r$, le système linéaire $\mathscr{S}$ est **compatible** :
  - Si $r = m$, le système linéaire $\mathscr{S}$ est **compatible déterminé**, il admet une solution unique.
  - Si $r < m$, le système linéaire $\mathscr{S}$ est **compatible indéterminé**, il admet une infinité de solutions.

Exemple 1 : rang$(A) = $ rang$(A|B) = 3 =$ nombre d'inconnues $\Rightarrow$ Solution unique

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant ainsi que sa matrice augmentée $A|B$:

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+3y-z & = & -6 \\ 3x-2y-4z & = & -2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Réduisons la matrice $A|B$ à sa forme échelonnée pour en déduire les rangs des matrices A et $A|B$:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} L_1' \leftarrow L_1 \\ L_2' \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 0 & -8 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} L_1'' \leftarrow L_1' \\ L_2'' \leftarrow -L_2' \\ L_3'' \leftarrow L_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -8 & -7 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} L_1''' \leftarrow L_1'' \\ L_2''' \leftarrow L_2'' \\ L_3''' \leftarrow L_3'' + 8L_2'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \end{array}\right)$$

Exemple 2 : rang(A) = rang$(A|B) = 2 <$ nombre d'inconnues $\Rightarrow$ Infinité de solutions

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant ainsi que sa matrice augmentée $A|B$:

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x+2y+3z &= 14 \\ x-3y-7z &= -26 \\ 3x-2y-7z &= -22 \end{cases} \Rightarrow \quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -3 & -7 & -26 \\ 3 & -2 & -7 & -22 \end{array}\right)$$

Réduisons la matrice $A|B$ à sa forme échelonnée pour en déduire les rangs des matrices A et $A|B$:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -3 & -7 & -26 \\ 3 & -2 & -7 & -22 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} L_1' \leftarrow L_1 \\ L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -8 & -16 & -64 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} L_1'' \leftarrow L_1' \\ L_2'' \leftarrow L_2'/(-5) \\ L_3'' \leftarrow L_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & -16 & -64 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} L_1''' \leftarrow L_1'' \\ L_2''' \leftarrow L_2'' \\ L_3''' \leftarrow L_3'' + 8L_2'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple 3 : $(\text{rang}(A) = 2) \neq (\text{rang}(A|B) = 3) \Rightarrow$ Aucune solution

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant ainsi que sa matrice augmentée $A|B$:

$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{lcr} x + 2y + 3z & = & 14 \\ x - 3y - 7z & = & -26 \\ 3x - 2y - 7z & = & -20 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -3 & -7 & -26 \\ 3 & -2 & -7 & -20 \end{array} \right)$$

Réduisons la matrice $A|B$ à sa forme échelonnée pour en déduire les rangs des matrices A et $A|B$:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -3 & -7 & -26 \\ 3 & -2 & -7 & -20 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{array}{l} L_1' \leftarrow L_1 \\ L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -8 & -16 & -62 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} L_1'' \leftarrow L_1' \\ L_2'' \leftarrow L_2'/(-5) \\ L_3'' \leftarrow L_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & -16 & -62 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{array}{l} L_1''' \leftarrow L_1'' \\ L_2''' \leftarrow L_2'' \\ L_3''' \leftarrow L_3'' + 8L_2'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Sous-section 4.2.5 :

Résolution d'un système linéaire

- Systèmes de Cramer
- Résolution d'un système de Cramer par inversion matricielle
- Résolution d'un système de Cramer par la méthode de Cramer
- Résolution par substitution
- Résolution par élimination de Gauss
- Résolution par élimination de Gauss - Jordan
- Cas particulier : Système homogène
- Nombre de solutions d'un système homogène

Systèmes de Cramer

Un **système de Cramer** se caractérise par une matrice des coefficients A carrée et inversible :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A_{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B_{n\times 1}} \quad , \; det(A) \neq 0$$

Un système de Cramer peut être résolu :

- par inversion matricielle
- par la méthode de Cramer
- par substitution
- par élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan

Remarque

L'inversion matricielle et la méthode de Cramer sont réservées aux systèmes de Cramer. Autrement, la résolution se fait par substitution ou par l'élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan.

Résolution d'un système de Cramer par inversion matricielle

La résolution d'un système de Cramer $\mathscr{S}$ par **inversion matricielle** consiste à l'écrire sous sa forme matricielle comme suit :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A_{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B_{n\times 1}}$$

puis à pré-multiplier les membres de cette écriture matricielle par A^{-1}, l'inverse de la matrice A :

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad IX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad \boxed{X^* = A^{-1}B}$$

Remarque

Un système de Cramer a toujours **une seule solution**.

Exemple

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant et son écriture matricielle :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+3y-z & = & -6 \\ 3x-2y-4z & = & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}}_{A_{3\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B_{3\times 1}}$$

La matrice des coefficients A est carrée et inversible, sa matrice inverse A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 14/17 & -6/17 & 5/17 \\ -5/17 & 7/17 & -3/17 \\ 13/17 & -8/17 & 1/17 \end{pmatrix}$$

On pré-multiplie les membres de l'écriture matricielle par A^{-1}, on obtient la solution X^* de $\mathscr{S}$:

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X^* = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad \boxed{X^* = [4;-3;5]^\top}$$

Résolution d'un système de Cramer par la méthode de Cramer

La résolution d'un système de Cramer $\mathscr{S}$ par la **méthode de Cramer** consiste à l'écrire sous sa forme matricielle précédente puis à définir les déterminants suivants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \cdots; \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

La solution du système $\mathscr{S}$ par la méthode de Cramer est donnée par $X^* = [x_1^*; x_2^*; \cdots; x_n^*]^\top$ avec :

$$x_1^* = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2^* = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad \cdots; \quad x_n^* = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Le déterminant Δ_{x_i} , $(i = 1, 2, \cdots, n)$ est obtenu en remplaçant la colonne des coefficients de l'inconnue x_i dans le déterminant Δ par le vecteur B des seconds membres.

Exemple

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant et son écriture matricielle :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+3y-z & = & -6 \\ 3x-2y-4z & = & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}}_{A_{3\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B_{3\times 1}}$$

Calculons les déterminants Δ, Δ_x, Δ_y et Δ_z :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -68; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 51; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -85$$

La solution du système $\mathscr{S}$ par la méthode de Cramer est donnée par :

$$x^* = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-68}{-17} = 4; \quad y^* = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{51}{-17} = -3; \quad z^* = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-85}{-17} = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X^* = [4;-3;5]^\top}$$

Résolution par substitution : 1. Éliminations successives de $x_1, x_2, \cdots, x_m$

La **résolution par substitution** d'un système linéaire $\mathscr{S}$ consiste à suivre les étapes suivantes dans un premier temps :

1. Dans la première équation du système $\mathscr{S}$, exprimer x_1 en fonction de $x_2, x_3, \cdots, x_n$ et substituer la valeur de x_1 dans les équations suivantes pour obtenir un système $\mathscr{S}_2$ sans x_1.
2. Dans la deuxième équation du système $\mathscr{S}_2$, exprimer x_2 en fonction de $x_3, x_4, \cdots, x_n$ et substituer la valeur de x_2 dans les équations suivantes pour obtenir un système $\mathscr{S}_3$ sans x_1 et x_2.
3. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir un système linéaire $\mathscr{S}'$, équivalent au système $\mathscr{S}$, dans lequel les inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_m$ ont été éliminées.

$$\mathscr{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{S}' : \begin{cases} x_1 = c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{23}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n + d_2 \\ \vdots \\ x_m = c_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + c_{mn}x_n + d_m \end{cases}$$

Exemple : Éliminations successives de x et y

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{lcl} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+3y-z & = & -6 \\ 3x-2y-4z & = & -2 \end{array} \right.$$

Étape 1 : Élimination de x de la première équation et substitution dans les équations suivantes :

$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{lcl} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+3y-z & = & -6 \\ 3x-2y-4z & = & -2 \end{array} \right. \Rightarrow \quad \mathscr{S}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3-2y-z \\ -y-3z & = & -12 \\ -8y-7z & = & -11 \end{array} \right.$$

Étape 2 : Élimination de y de la deuxième équation et substitution dans la troisième équation :

$$\mathscr{S}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3-2y-z \\ -y-3z & = & -12 \\ -8y-7z & = & -11 \end{array} \right. \Rightarrow \quad \mathscr{S}' : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3-2y-z \\ y & = & 12-3z \\ 17z & = & 85 \end{array} \right.$$

Résolution par substitution : 2. Substitutions récursives de $x_m, x_{m-1}, \cdots, x_1$

La **résolution par substitution** d'un système linéaire $\mathscr{S}$ consiste à suivre les étapes suivantes dans un deuxième temps :

1. Résoudre l'équation numéro m du système $\mathscr{S}'$ pour trouver la valeur x_m^* de l'inconnue x_m.
2. Substituer la valeur x_m^* de x_m dans l'équation numéro $m-1$ du système $\mathscr{S}'$ pour trouver la valeur x_{m-1}^* de x_{m-1}.
3. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir les valeurs $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*$ des inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

$$\mathscr{S}' : \begin{cases} x_1 = c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{23}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n + d_2 \\ \vdots \\ x_m = c_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + c_{mn}x_n + d_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{S}' : \begin{cases} x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^* \\ \vdots \\ x_m = x_m^* \end{cases}$$

Exemple (suite): Substitutions récursives de z et y

Étape 1 : Résolution de la dernière équation pour trouver la valeur de z :

$$\mathscr{S}': \begin{cases} x &= 3-2y-z \\ y &= 12-3z \\ 17z &= 85 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{S}': \begin{cases} x &= 3-2y-z \\ y &= 12-3z \\ z &= 5 \end{cases}$$

Étape 2 : Substitution de la valeur de z dans la deuxième équation pour trouver la valeur de y :

$$\mathscr{S}': \begin{cases} x &= 3-2y-z \\ y &= 12-3z \\ z &= 5 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{S}': \begin{cases} x &= 3-2y-z \\ y &= -3 \\ z &= 5 \end{cases}$$

Étape 3 : Substitution de y et z dans la première équation pour trouver la valeur de x :

$$\mathscr{S}': \begin{cases} x &= 3-2y-z \\ y &= -3 \\ z &= 5 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{S}': \begin{cases} x &= 4 \\ y &= -3 \\ z &= 5 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{S} = \{x^* = 4, y^* = -3, z^* = 5\}$$

Résolution par élimination de Gauss : 1. Réduction de la matrice augmentée

La **résolution par élimination de Gauss** d'un système linéaire $\mathscr{S}$ consiste à réduire sa matrice augmentée $A|B$ à sa forme échelonnée en lignes $C|D$ en lui appliquant l'algorithme de Gauss et à réécrire la matrice $C|D$ sous forme d'un nouveau système linéaire $\mathscr{S}'$ équivalent à $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \Longrightarrow A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$C|D=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1\\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} & d_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & & d_m \end{array}\right) \Longrightarrow \mathscr{S}':\left\{\begin{array}{rcl} x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n & = & d_1\\ x_2+\cdots+c_{2n}x_n & = & d_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_m & = & d_m \end{array}\right.$$

Résolution par élimination de Gauss : 2. Substitution récursive

Après avoir réduit la matrice augmentée $A|B$ du système linéaire $\mathscr{S}$ à sa forme échelonnée en lignes $C|D$ et réécrit celle-ci sous forme d'un système linéaire $\mathscr{S}'$, procéder à une **substitution récursive** de la manière suivante :

1. Résoudre l'équation numéro m du système $\mathscr{S}'$ pour trouver la valeur x_m^* de l'inconnue x_m.
2. Substituer la valeur x_m^* de x_m dans l'équation numéro $m-1$ du système $\mathscr{S}'$ pour trouver la valeur x_{m-1}^* de x_{m-1}.
3. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir les valeurs $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*$ des inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

$$\mathscr{S}' : \begin{cases} x_1 & = & x_1^* \\ x_2 & = & x_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & = & x_m^* \end{cases}$$

Exemple

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{lcr} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+3y-z & = & -6 \\ 3x-2y-4z & = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow C|D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathscr{S}':\left\{\begin{array}{lcr} 1x+2y+1z & = & 3 \\ 0x+1y+3z & = & 12 \\ 0x+0y+1z & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \mathscr{S}':\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+z & = & 3 \\ y+3z & = & 12 \\ z & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \mathscr{S}':\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+z & = & 3 \\ y & = & -3 \\ z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \mathscr{S}':\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 4 \\ y & = & -3 \\ z & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{X^* = [4;-3;5]^\top}$$

Matrice échelonnée réduite en lignes

Une matrice est dite **échelonnée réduite en lignes** (ERL) si elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{ERL} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \end{array}\right], \quad \text{où } \star \text{ sont des nombres réels quelconques.}$$

- L'élément non nul le plus à gauche dans chaque ligne est un 1, les autres éléments de la colonne contenant ce 1 sont tous nuls. Le 1 est un pivot.
- Le pivot de chaque ligne se trouve à droite des pivots des lignes supérieures.
- Les lignes nulles sont placées en bas de la matrice.

Algorithme de Gauss - Jordan

L'**algorithme de Gauss - Jordan** est similaire à l'algorithme de Gauss. La seule différence est qu'au lieu d'annuler juste les éléments de la matrices qui se trouvent sous le pivot dans la même colonne, l'algorithme de Gauss - Jordan va au-delà est annule même les éléments qui se trouvent au dessus du pivot dans la même colonne.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{O_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution par élimination de Gauss - Jordan

La **résolution par élimination de Gauss - Jordan** d'un système linéaire $\mathscr{S}$ consiste à réduire sa matrice augmentée $A|B$ à sa forme échelonnée et réduite en lignes (ERL) en lui appliquant l'algorithme de Gauss - Jordan et à réécrire la matrice ERL sous forme d'un système linéaire $\mathscr{S}"$:

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \Longrightarrow A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \text{ERL}=\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star & \bullet \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \cdots & \star & \bullet \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star & \bullet \end{array}\right) \Longrightarrow \mathscr{S}":\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & c_1 \\ x_2 & = & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_i & = & c_i \end{array}\right.$$

Exemple

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{lcr} x+2y+z & = & 3\\ 2x+3y-z & = & -6\\ 3x-2y-4z & = & -2\end{array}\right. \Longrightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1 & -6\\ 3 & -2 & -4 & -2\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 12\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right) \longrightarrow \text{ERL} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathscr{S}":\left\{\begin{array}{lcr} 1x+0y+0z & = & 4\\ 0x+1y+0z & = & -3\\ 0x+0y+1z & = & 5\end{array}\right. \Longrightarrow \mathscr{S}":\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 4\\ y & = & -3\\ z & = & 5\end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{X^* = [4;-3;5]^\top}$$

Cas particulier : Système homogène

Un système linéaire $\mathscr{S}$ est dit **homogène** si son second membre B est nul :

$$\mathscr{S}:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A_{m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{O_{m\times 1}}$$

Exemple

$$\mathscr{S}:\begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ 2x+y+3z & = & 0 \\ 4x+3y-z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A_{3\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{O_{3\times 1}}$$

Nombre de solutions d'un système homogène

Le système linéaire $\mathscr{S}$ est toujours compatible puisque $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$. En particulier :

- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) =$ nombre d'inconnues m, alors le système linéaire $\mathscr{S}$ admet une solution unique $X^* = O_{n\times 1}$ appelée **solution triviale**.
- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) <$ nombre d'inconnues m, alors le système linéaire $\mathscr{S}$ admet une infinité de solutions. Un nombre m d'inconnues sont exprimées en fonction des $m - \text{rang}(A)$ inconnues qui restent et qui prennent des valeurs arbitraires dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 : Solution unique

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 2x+4y & = & 0 \\ 2x-3y & = & 0 \\ x-4y & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A_{3\times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X_{2\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{O_{3\times 1}} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|O) = 2 \Rightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Exemple 2 : Infinité de solutions

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{lcl} x+3y-2z & = & 0\\ 4x-2y-2z & = & 0\\ x-4y+z & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -2 & -2\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}}_{A_{3\times3}}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X_{3\times1}}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{O_{3\times1}} \Rightarrow \text{rang}(A)=\text{rang}(A|O)=2<3$$

Le système admet une infinité de solutions. On fixe $3-\text{rang}(A)=3-2=1$ inconnue arbitrairement dans $\mathbb{R}$ et on exprime les autres inconnues en fonction de celle-ci.

Synthèse

Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire $\mathscr{S}$.

- Si la matrice A est carrée et inversible, alors $\mathscr{S}$ est un système de Cramer et il admet une solution unique obtenue particulièrement par inversion matricielle ou par la méthode de Cramer. Le système linéaire $\mathscr{S}$ peut également être résolu par l'élimination de Gauss ou celle de Gauss - Jordan ;
- Si le vecteur B est nul, alors $\mathscr{S}$ est un système homogène et il admet au moins le vecteur nul comme solution, sinon une infinité de solutions obtenues par élimination de Gauss ou celle de Gauss - Jordan ;

Synthèse (suite)

Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire $\mathscr{S}$.

- Dans le reste des cas, il faut comparer le rang de la matrice A au rang de la matrice augmentée $A|B$. Si ces rangs sont différents, alors le système $\mathscr{S}$ est incompatible et il n'admet aucune solution. En revanche, si ces rangs sont identiques, alors le système $\mathscr{S}$ est compatible et peut être résolu par élimination de Gauss ou celle de Gauss - Jordan. Dans ce cas, il faut commencer par comparer ces rangs au nombre d'inconnues : s'ils sont égaux au nombre d'inconnues, le système $\mathscr{S}$ admet une solution unique, sinon il admet une infinité de solutions.
- La résolution par substitution est à éviter et privilégier une méthode de résolution basée sur les matrices (inversion matricielle, méthode de Cramer, élimination de Gauss et élimination de Gauss - Jordan).

Sommaire

Section 4.3 :

Applications en gestion

Sous-section 4.3.1 :

Application en gestion de la production

Problème 1 : Planification de la production dans une entreprise

Pour fabriquer 3 produits X, Y et Z, une entreprise utilise 3 ressources R1, R2 et R3 selon les conditions suivantes :

- Une unité de X nécessite 3 unités de R1, 1 unité de R2 et 2 unités de R3 ;
- Une unité de Y nécessite 2 unités de R1, 2 unités de R2 et 1 unité de R3 ;
- Une unité de Z nécessite 1 unité de R1, 3 unités de R2 et 2 unités de R3.

Sachant que cette entreprise dispose de 100 unités de R1, de 90 unités de R2 et de 80 unités de R3, quelles sont les quantités x, y et z des produits X, Y et Z, respectivement, qu'elle peut fabriquer avec toutes ses ressources disponibles ?

Formalisation mathématique : Équations des contraintes sur les ressources

Les contraintes sur chacune des ressources peuvent se formaliser sous forme d'équations :

- Ressource R1 : Les 100 unités disponibles doivent être réparties entre le produit X (3 unités), le produit Y (2 unités) et le produit Z (1 unité). Mathématiquement, cette contrainte s'écrit :

$$100 = 3x + 2y + z$$

- Ressource R2 : Les 90 unités disponibles doivent être réparties entre le produit X (1 unité), le produit Y (2 unités) et le produit Z (3 unités). Mathématiquement, cette contrainte s'écrit :

$$90 = x + 2y + 3z$$

- Ressource R3 : Les 80 unités disponibles doivent être réparties entre le produit X (2 unités), le produit Y (1 unité) et le produit Z (2 unités). Mathématiquement, cette contrainte s'écrit :

$$80 = 2x + y + 2z$$

Modélisation mathématique : Système linéaire & Écriture matricielle

Les quantités x, y et z des produits X, Y et Z, respectivement, que l'entreprise peut fabriquer avec toutes ses ressources disponibles sont obtenues par la résolution du système linéaire $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 3x+2y+z & = & 100 \\ x+2y+3z & = & 90 \\ 2x+y+2z & = & 80 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix}}_{B}, \quad \underbrace{\det(A) = 8 \neq 0}_{A \text{ est inversible}}$$

La matrice A étant carrée et inversible, $\mathscr{S}$ est donc un système de Cramer et il admet en conséquence une solution unique.

Remarque

$\mathscr{S}$ étant un système de Cramer, il peut être résolu par toutes les méthodes abordées dans le cours. En particulier, il peut être résolu par inversion matricielle et par la méthode de Cramer.

Résolution mathématique : Inversion matricielle

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -3/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -3/8 & 1/8 & 1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow X^* = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/8 & -3/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -3/8 & 1/8 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 75/4 \\ 15 \\ 55/4 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Méthode de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \ , \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 100 & 2 & 1 \\ 90 & 2 & 3 \\ 80 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 150 \ , \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 1 \\ 1 & 90 & 3 \\ 2 & 80 & 2 \end{vmatrix} = 120 \ , \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 100 \\ 1 & 2 & 90 \\ 2 & 1 & 80 \end{vmatrix} = 110$$

$$\Longrightarrow x^* = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{150}{8} = \frac{75}{4} \ , \ y^* = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{120}{8} = 15 \ , \ z^* = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{110}{8} = \frac{55}{4} \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 75/4 \\ 15 \\ 55/4 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$

$$\mathscr{S}:\begin{cases} 3x+2y+z &= 100\\ x+2y+3z &= 90\\ 2x+y+2z &= 80\end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}100\\90\\80\end{pmatrix}}_{B} \Longrightarrow A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&100\\1&2&3&90\\2&1&2&80\end{array}\right)$$

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&100\\1&2&3&90\\2&1&2&80\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&90\\3&2&1&100\\2&1&2&80\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&90\\0&-4&-8&-170\\2&1&2&80\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&90\\0&-4&-8&-170\\0&-3&-4&-100\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&90\\0&1&2&170/4\\0&-3&-4&-100\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&90\\0&1&2&170/4\\0&0&2&110/4\end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ rang$(A)=$ rang$(A|B)=3$ (nombre d'inconnues), le système $\mathscr{S}$ admet une solution unique.

Résolution mathématique : Élimination de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 170/4 \\ 0 & 0 & 2 & 110/4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 1x+2y+3z & = & 90 \\ 0x+1y+2z & = & 170/4 \\ 0x+0y+2z & = & 110/4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z & = & 90 \\ y+2z & = & 85/2 \\ 2z & = & 55/2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z & = & 90 \\ y+2z & = & 85/2 \\ z & = & 55/4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z & = & 90 \\ y & = & 15 \\ z & = & 55/4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 75/4 \\ y = 15 \\ z = 55/4 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 75/4 \\ 15 \\ 55/4 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Élimination de Gauss - Jordan

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 100 \\ 1 & 2 & 3 & 90 \\ 2 & 1 & 2 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 170/4 \\ 0 & 0 & 2 & 110/4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 170/4 \\ 0 & 0 & 1 & 55/4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 55/4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 195/4 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 55/4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 75/4 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 55/4 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} 1x+0y+0z & = & 75/4 \\ 0x+1y+0z & = & 15 \\ 0x+0y+1z & = & 55/4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 75/4 \\ y & = & 15 \\ z & = & 55/4 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 75/4 \\ 15 \\ 55/4 \end{pmatrix}}$$

Vérification : Substitution des solutions dans le système linéaire

$$\mathscr{S}:\begin{cases} 3x+2y+z &= 100 \\ x+2y+3z &= 90 \\ 2x+y+2z &= 80 \end{cases} \Longrightarrow \mathscr{S}:\begin{cases} 3\times\dfrac{75}{4}+2\times 15+\dfrac{55}{4} &= \dfrac{225+120+55}{4} &= 100 \\ \dfrac{75}{4}+2\times 15+3\times\dfrac{55}{4} &= \dfrac{75+120+165}{4} &= 90 \\ 2\times\dfrac{75}{4}+15+2\times\dfrac{55}{4} &= \dfrac{150+60+110}{4} &= 80 \end{cases}$$

Sous-section 4.3.2 :
Application en gestion des ressources humaines

Problème 2 : Organisation du travail dans une entreprise

Pour accomplir 3 tâches A, B et C, une entreprise doit organiser son équipe de travail composée de 3 employés, selon les conditions suivantes :

- La tâche A nécessite 4 heures de travail ;
- La tâche B nécessite 5 heures de travail ;
- La tâche C nécessite 3 heures de travail.

Les employés ont les disponibilités suivantes :

- L'employé 1 dispose de 20 heures ;
- L'employé 2 dispose de 30 heures ;
- L'employé 3 dispose de 40 heures.

Combien d'heures de travail affecter à chaque employé pour accomplir toutes les tâches ?

Formalisation mathématique : Équations des contraintes

On formalise les heures de travail consacrées par chaque employé à chaque tâche comme suit :

- x_1, x_2 et x_3 : Les heures que l'employé 1 consacre aux tâches A, B et C, respectivement.
- y_1, y_2 et y_3 : Les heures que l'employé 2 consacre aux tâches A, B et C, respectivement.
- z_1, z_2 et z_3 : Les heures que l'employé 3 consacre aux tâches A, B et C, respectivement.

Les contraintes sur les heures de travail pour chaque tâche peuvent s'écrire sous forme d'équations :

- Tâche A : $x_1 + y_1 + z_1 = 4$
- Tâche B : $x_2 + y_2 + z_2 = 5$
- Tâche C : $x_3 + y_3 + z_3 = 3$

Les contraintes sur les heures disponibles des employés peuvent s'écrire sous forme d'équations :

- Employé 1 : $x_1 + x_2 + x_3 = 20$
- Employé 2 : $y_1 + y_2 + y_3 = 30$
- Employé 3 : $z_1 + z_2 + z_3 = 40$

Modélisation mathématique : Système linéaire

Le nombre d'heures que chaque employé doit consacrer à chaque tâche pour que l'entreprise accomplisse toutes les tâches est donné par la résolution du système linéaire $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{lcr} x_1+y_1+z_1 & = & 4 \\ x_2+y_2+z_2 & = & 5 \\ x_3+y_3+z_3 & = & 3 \\ x_1+x_2+x_3 & = & 20 \\ y_1+y_2+y_3 & = & 30 \\ z_1+z_2+z_3 & = & 40 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \mathscr{S}:\left\{\begin{array}{lcr} 1x_1+1y_1+1z_1+0x_2+0y_2+0z_2+0x_3+0y_3+0z_3 & = & 4 \\ 0x_1+0y_1+0z_1+1x_2+1y_2+1z_2+0x_3+0y_3+0z_3 & = & 5 \\ 0x_1+0y_1+0z_1+0x_2+0y_2+0z_2+1x_3+1y_3+1z_3 & = & 3 \\ 1x_1+0y_1+0z_1+1x_2+0y_2+0z_2+1x_3+0y_3+0z_3 & = & 20 \\ 0x_1+1y_1+0z_1+0x_2+1y_2+0z_2+0x_3+1y_3+0z_3 & = & 30 \\ 0x_1+0y_1+1z_1+0x_2+0y_2+1z_2+0x_3+0y_3+1z_3 & = & 40 \end{array}\right.$$

Remarque

$\mathscr{S}$ n'étant pas un système de Cramer, il ne peut être résolu par inversion matricielle ou par la méthode de Cramer. En revanche, il peut être résolu par substitution, par élimination de Gauss ou par élimination de Gauss - Jordan.

Résolution mathématique : Écriture matricielle

L'écriture matricielle $AX = B$ du système linéaire $\mathscr{S}$ ainsi que sa matrice augmentée $A|B$ sont les suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}}_{B} \Longrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)}_{A|B}$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40
\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40
\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$ (suite)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 46 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$ (suite)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -78 \end{array}\right) \Longrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{l} \text{rang}(A) = 5 \\ \\ \text{rang}(A|B) = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B)}_{\text{Le système linéaire } \mathscr{S} \text{ est incompatible}}$$

Sous-section 4.3.3 :

Application en logistique

Problème 3 : Livraison de marchandises à des clients

Une entreprise dispose de marchandises dans 2 entrepôts (A et B) et doit les livrer à 3 clients (C1, C2 et C3).

- Le client C1 a commandé 90 unités de marchandises ;
- Le client C2 a commandé 150 unités de marchandises ;
- Le client C3 a commandé 130 unités de marchandises.

Les contraintes sur les capacités des dépôts sont les suivantes :

- L'entrepôt A peut envoyer un total de 190 unités de marchandises ;
- L'entrepôt B peut envoyer un total de 180 unités de marchandises.

Déterminer les quantités de marchandises à envoyer de chaque entrepôt à chacun des clients.

Formalisation mathématique : Équations des contraintes

Désignons les quantités de marchandises envoyées de chaque entrepôt à chaque client par :

- x_1 : Quantité de marchandises envoyées de l'entrepôt A au client C1 ;
- x_2 : Quantité de marchandises envoyées de l'entrepôt A au client C2 ;
- x_3 : Quantité de marchandises envoyées de l'entrepôt A au client C3 ;
- y_1 : Quantité de marchandises envoyées de l'entrepôt B au client C1 ;
- y_2 : Quantité de marchandises envoyées de l'entrepôt B au client C2 ;
- y_3 : Quantité de marchandises envoyées de l'entrepôt B au client C3.

Commande de chaque client :

- Client C1 : $x_1 + y_1 = 90$
- Client C2 : $x_2 + y_2 = 150$
- Client C3 : $x_3 + y_3 = 130$

Capacité de chaque entrepôt :

- Entrepôt E1 : $x_1 + x_2 + x_3 = 190$
- Entrepôt E2 : $y_1 + y_2 + y_3 = 180$

Modélisation mathématique : Système linéaire

Les quantités de marchandises à envoyer de chaque entrepôt à chacun des clients sont données par la résolution du système linéaire $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S}:\begin{cases} x_1+y_1 &= 90\\ x_2+y_2 &= 150\\ x_3+y_3 &= 130\\ x_1+x_2+x_3 &= 190\\ y_1+y_2+y_3 &= 180 \end{cases} \Longrightarrow \mathscr{S}:\begin{cases} 1x_1+0x_2+0x_3+1y_1+0y_2+0y_3 &= 90\\ 0x_1+1x_2+0x_3+0y_1+1y_2+0y_3 &= 150\\ 0x_1+0x_2+1x_3+0y_1+0y_2+1y_3 &= 130\\ 1x_1+1x_2+1x_3+0y_1+0y_2+0y_3 &= 190\\ 0x_1+0x_2+0x_3+1y_1+1y_2+1y_3 &= 180 \end{cases}$$

Remarque

$\mathscr{S}$ n'étant pas un système de Cramer, il ne peut être résolu par inversion matricielle ou par la méthode de Cramer. En revanche, il peut être résolu par substitution, par élimination de Gauss ou par élimination de Gauss - Jordan.

Modélisation mathématique : Écriture matricielle

L'écriture matricielle $AX = B$ du système linéaire $\mathscr{S}$ ainsi que sa matrice augmentée $A|B$ sont les suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ 130 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix}}_{B} \Longrightarrow A|B = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 190 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right)$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$

$$A|B = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 190 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 190 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right)$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$ (suite)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{l} \text{rang}(A) = 4 \\ \text{rang}(A|B) = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)}_{\text{Le système linéaire } \mathscr{S} \text{ est compatible}}$$

Comme $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 < 6$ (nombre d'inconnues), le système linéaire $\mathscr{S}$ admet une infinité de solutions.

Résolution mathématique : Élimination de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 & = & 90 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 & = & 100 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 & = & 130 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1y_1 + 1y_2 + 1y_3 & = & 180 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 & = & 90 \\ x_2 + x_3 - y_1 & = & 100 \\ x_3 + y_3 & = & 130 \\ y_1 + y_2 + y_3 & = & 180 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 90 - (180 - y_2 - y_3) & = & y_2 + y_3 - 90 \\ x_2 = 100 + (180 - y_2 - y_3) - (130 - y_3) & = & 150 - y_2 \\ x_3 & = & 130 - y_3 \\ y_1 & = & 180 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X^* = [y_2 + y_3 - 90 \ ; \ 150 - y_2 \ ; \ 130 - y_3 \ ; \ 180 - y_2 - y_3 \ ; \ y_2 \ ; \ y_3]^\top \ , \ \forall y_2, y_3 \in \mathbb{R}}$$

Résolution mathématique : Élimination de Gauss - Jordan

$$
A|B = \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 190 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{Gauss}}
\left(\begin{array}{cccc|cc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|cc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 90 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 280 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|cc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -90 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 280 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Résolution mathématique : Élimination de Gauss - Jordan (suite)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -90 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 180 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} 1x_1+0x_2+0x_3+0y_1-1y_2-1y_3 & = & -90 \\ 0x_1+1x_2+0x_3+0y_1+1y_2+0y_3 & = & 150 \\ 0x_1+0x_2+1x_3+0y_1+0y_2+1y_3 & = & 130 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+1y_1+1y_2+1y_3 & = & 180 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0y_1+0y_2+0y_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} x_1-y_2-y_3 & = & -90 \\ x_2+y_2 & = & 150 \\ x_3+y_3 & = & 130 \\ y_1+y_2+y_3 & = & 180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & y_2+y_3-90 \\ x_2 & = & 150-y_2 \\ x_3 & = & 130-y_3 \\ y_1 & = & 180-y_2-y_3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \boxed{X^* = [y_2+y_3-90\ ;\ 150-y_2\ ;\ 130-y_3\ ;\ 180-y_2-y_3\ ;\ y_2\ ;\ y_3]^\top\ ,\ \forall y_2, y_3 \in \mathbb{R}}$$

Vérification : Substitution des solutions dans le système linéaire

Prenons des valeurs quelconques de y_2 et y_3 dans $\mathbb{R}$, des zéros pour simplifier les calculs :

$$\mathscr{S}: \begin{cases} x_1 + y_1 & = & 90 \\ x_2 + y_2 & = & 150 \\ x_3 + y_3 & = & 130 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 190 \\ y_1 + y_2 + y_3 & = & 180 \end{cases} \Longrightarrow \mathscr{S}: \begin{cases} -90 + 180 & = & 90 \\ 150 + 0 & = & 150 \\ 130 + 0 & = & 130 \\ -90 + 150 + 130 & = & 190 \\ 180 + 0 + 0 & = & 180 \end{cases}$$

Sous-section 4.3.4 :

Application en gestion financière

Problème 4 : Répartition du budget total d'une entreprise

Une entreprise doit répartir un budget total de 90000 DH entre 3 services : marketing, administration et production. La répartition de ce budget doit se faire selon les conditions suivantes :

- Le budget alloué au marketing est le double de celui alloué à l'administration ;
- Le budget alloué à la production est le triple de celui alloué à l'administration.

Déterminer le montant des budgets que cette entreprise doit allouer à chacun des services.

Formalisation mathématique : Équations des contraintes

On formalise les budgets alloués à chacun des services comme suit :

- x : Budget alloué au marketing ;
- y : Budget alloué à l'administration ;
- z : Budget alloué à la production.

Les contraintes sur les budgets sont les suivantes :

- Budget total : $x+y+z=90000$
- Budget du marketing : $x=2y$
- Budget de la production : $z=3y$

Modélisation mathématique : Système linéaire & Écriture matricielle

Les budgets alloués à chacun des services sont donnés par la résolution du système $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S}:\begin{cases} x+y+z & = & 90000 \\ x & = & 2y \\ z & = & 3y \end{cases} \Longrightarrow \mathscr{S}:\begin{cases} 1x+1y+1z=90000 \\ 1x-2y+0z=0 \\ 0x-3y+1z=0 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 90000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice carrée A est inversible $\left(\det(A) = -6 \neq 0\right)$, le système linéaire $\mathscr{S}$ est un système de Cramer et il admet en conséquence une solution unique.

Remarque

$\mathscr{S}$ étant un système de Cramer, il peut être résolu par toutes les méthodes abordées dans le cours. En particulier, il peut être résolu par inversion matricielle et par la méthode de Cramer.

Résolution mathématique : Inversion matricielle

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow X^* = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30000 \\ 15000 \\ 45000 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Méthode de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 90000 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 90000 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 90000 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow x^* = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-180000}{-6} = 30000 \ , \ y^* = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-90000}{-6} = 15000 \ , \ z^* = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-270000}{-6} = 45000$$

$$\boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30000 \\ 15000 \\ 45000 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 90000 \\ x & = & 2y \\ z & = & 3y \end{array}\right. \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 90000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \Longrightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 0 & -3 & -1 & -90000 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 0 & 1 & 1/3 & 30000 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 0 & 1 & 1/3 & 30000 \\ 0 & 0 & 2 & 90000 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 \ \text{(nombre d'inconnues)}$$

Le système linéaire $\mathscr{S}$ admet une solution unique.

Résolution mathématique : Élimination de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 0 & 1 & 1/3 & 30000 \\ 0 & 0 & 2 & 90000 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1x+1y+1z & = & 90000 \\ 0x+1y+z/3 & = & 30000 \\ 0x+0y+2z & = & 90000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 90000 \\ y+z/3 & = & 30000 \\ z & = & 45000 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 90000 \\ y & = & 15000 \\ z & = & 45000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 30000 \\ y & = & 15000 \\ z & = & 45000 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30000 \\ 15000 \\ 45000 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Élimination de Gauss - Jordan

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 0 & 1 & 1/3 & 30000 \\ 0 & 0 & 2 & 90000 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 0 & 1 & 1/3 & 30000 \\ 0 & 0 & 1 & 45000 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90000 \\ 0 & 1 & 0 & 15000 \\ 0 & 0 & 1 & 45000 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 45000 \\ 0 & 1 & 0 & 15000 \\ 0 & 0 & 1 & 45000 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30000 \\ 0 & 1 & 0 & 15000 \\ 0 & 0 & 1 & 45000 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 1x+0y+0z & = & 30000 \\ 0x+1y+0z & = & 15000 \\ 0x+0y+1z & = & 45000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 30000 \\ y & = & 15000 \\ z & = & 45000 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30000 \\ 15000 \\ 45000 \end{pmatrix}}$$

Vérification : Substitution des solutions dans le système linéaire

$$\begin{cases} x+y+z &= 90000 \\ y &= 15000 \\ z &= 45000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 30000+15000+45000 &= 90000 \\ 15000 &= 15000 \\ 45000 &= 45000 \end{cases}$$

Sous-section 4.3.5 :

Application en marketing

Problème 5 : Répartition des dépenses publicitaires d'une entreprise

Une entreprise investit dans 3 canaux publicitaires : la télévision, la radio et les réseaux sociaux. Elle a fixé à cet effet un budget de 120000 DH pour un nombre total de publicités égal à 120. Elle veut que les publicités sur les réseaux sociaux soient 2 fois celles à la radio.

Les prix unitaires des publicitaires sont les suivants :

- Une publicité à la télévision coûte 1500 DH ;
- Une publicité à la radio coûte 500 DH ;
- Une publicité sur les réseaux sociaux coûte 1000 DH.

Combien de publicités cette entreprise devrait-elle consacrer à chacun des canaux ?

Formalisation mathématique : Équations des contraintes

On formalise les nombres de publicités sur chacun des canaux comme suit :

- x : Le nombre de publicités à la télévision ;
- y : Le nombre de publicités à la radio ;
- z : Le nombre de publicités sur les réseaux sociaux.

Les contraintes sur les budgets sont les suivantes :

- Total des publicités :$x + y + z = 120$
- Budget total : $1500x + 500y + 1000z = 120000$
- Condition : $z = 2y$

Modélisation mathématique : Système linéaire & Écriture matricielle

Le nombre de publicités à diffuser sur chaque canal est donné par la résolution du système $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S}:\begin{cases} x+y+z &= 120 \\ 1500x+500y+1000z &= 120000 \\ z &= 2y \end{cases} \iff \mathscr{S}:\begin{cases} 1x+1y+1z &= 120 \\ 1500x+500y+1000z &= 120000 \\ 0x-2y+1z &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1500 & 500 & 1000 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 120 \\ 120000 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \Rightarrow \det(A) = -2000 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}$$

Le système linéaire $\mathscr{S}$ est un système de Cramer, il admet en conséquence une solution unique.

Remarque

$\mathscr{S}$ étant un système de Cramer, il peut être résolu par toutes les méthodes abordées dans le cours. En particulier, il peut être résolu par inversion matricielle et par la méthode de Cramer.

Résolution mathématique : Inversion matricielle

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/2000 & -1/4 \\ 3/4 & -1/2000 & -1/4 \\ 3/2 & -1/1000 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^* = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/2000 & -1/4 \\ 3/4 & -1/2000 & -1/4 \\ 3/2 & -1/1000 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 120000 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Méthode de Cramer

$$\Delta = \det(A) \ , \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 120 & 1 & 1 \\ 120000 & 500 & 1000 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \ , \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 120 & 1 \\ 1500 & 120000 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ , \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1200 \\ 1500 & 500 & 120000 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow x^* = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-60000}{-2000} = 30 \ , \ y^* = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-60000}{-2000} = 30 \ , \ z^* = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-120000}{-2000} = 60 \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Rangs des matrices A et $A|B$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1500 & 500 & 1000 & 120000 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 3 & 1 & 2 & 240 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & -2 & -1 & -120 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1/2 & 60 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1/2 & 60 \\ 0 & 0 & 2 & 120 \end{array}\right) \Longrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{l} \text{rang}(A) = 3 \\ \\ \text{rang}(A|B) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)}_{\text{Le système linéaire } \mathscr{S} \text{ est compatible}}$$

Comme $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$ (nombre d'inconnues), le système linéaire $\mathscr{S}$ admet une solution unique.

Résolution mathématique : Élimination de Gauss

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1500 & 500 & 1000 & 120000 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1/2 & 60 \\ 0 & 0 & 2 & 120 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 1x+1y+1z & = & 120 \\ 0x+1y+0.5z & = & 60 \\ 0x+0y+2z & = & 120 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 120 \\ y+0.5z & = & 60 \\ z & = & 60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 120 \\ y & = & 30 \\ z & = & 60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=30 \\ z=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}}$$

Résolution mathématique : Élimination de Gauss - Jordan

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1500 & 500 & 1000 & 120000 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1/2 & 60 \\ 0 & 0 & 2 & 120 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1/2 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 1x+0y+0z = 30 \\ 0x+1y+0z = 30 \\ 0x+0y+1z = 60 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 30 \\ z = 60 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{X^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}}$$

Vérification : Substitution des solutions dans le système linéaire

$$\begin{cases} x+y+z & = & 120 \\ 1500x+500y+1000z & = & 120000 \\ z & = & 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 30+30+60 & = & 120 \\ 1500\times 30+500\times 30+1000\times 60 & = & 120000 \\ 60 & = & 2\times 30 \end{cases}$$

Bibliographie

Bronson, R. and Costa, G. (2008). *Matrix Methods : Applied Linear Algebra*. EBL-Schweitzer. Academic Press.

Dodge, Y. (2007). *Mathématiques de base pour économistes*. Springer.

Dussart, J., Joukoff, N., Loulit, A., Szafarz, A., and Gillet, R. (2004). *Mathématiques appliquées à la gestion : Collection Synthex*. Synthex économie gestion. Pearson.