Économétrie financière

Modélisation des rentabilités, des volatilités et des risques financiers

Jaouad Madkour
`jmadkour@uae.ac.ma`

Faculté des sciences juridiques, économiques et sociales de Tanger
Département des sciences économiques et de gestion

Site Web : jmadkour.com
Facebook : www.facebook.com/jmadkour
YouTube : www.youtube.com/JaouadMadkour

كلية العلوم القانونية والاقتصادية والاجتماعية – طنجة
FSJES TANGER

20 janvier 2025

Sommaire

Chapitre 1

Modélisation des rentabilités financières

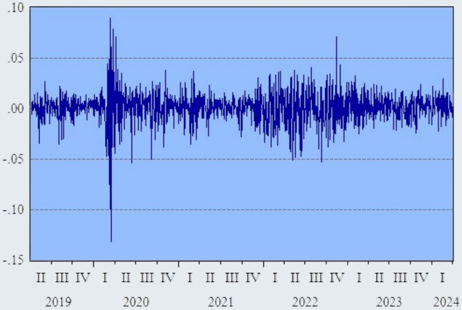
Sommaire

Section 1.1

Définitions

- Processus Générateur des Données
- Modèle
- Méthodologie de Box - Jenkins
- Processus stochastique
- Processus stochastique stationnaire
- Opérateur retard
- Polynôme retard

Processus Générateur des Données



La figure ci-contre retrace l'évolution de la log-rentabilité d'un actif financier dans le temps. Il s'agit de la représentation graphique d'une fonction mathématique inconnue qui génère à chaque instant une nouvelle observation de la log-rentabilité. Cette fonction mathématique est appelée **Processus Générateur des Données** (PGD).

Modélisation d'un Processus Générateur des Données

Le PGD étant inconnu, le rôle de l'économètre consiste à trouver la fonction mathématique qui soit la meilleure approximation possible de ce PGD. Cette approximation est appelée **modèle**, et la démarche entreprise par l'économètre le conduisant à son modèle est appelée **modélisation**.

Remarque

Un modèle n'étant qu'une approximation du PGD est par définition faux mais il peut être utile comme le souligne le statisticien britannique George BOX (Box, 1976) :

"All models are wrong, some are useful."

Méthodologie de Box and Jenkins (1976)

Box and Jenkins (1976) ont proposé une stratégie révolutionnaire dans le domaine de la modélisation des séries chronologiques. Leur méthodologie se déroule en trois étapes :

1. **Identification** de la meilleure approximation possible du PGD étudié.
2. **Estimation** des paramètres du modèle retenu dans la première étape.
3. **Validation** du modèle estimé dans la deuxième étape à l'aide de tests statistiques.

C'est cette approche qui sera présentée et étudiée dans ce cours d'économétrie financière.

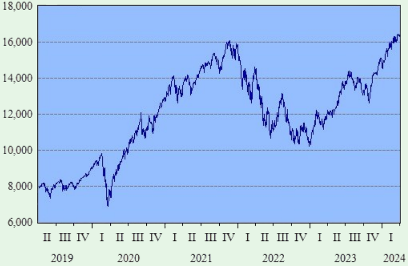
Processus stochastique

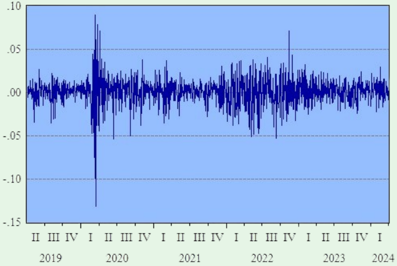
Un **processus stochastique** est une suite de variables aléatoires indexées par le temps $\{y_1, y_2, \cdots, y_t, \cdots, y_T\}$. La réalisation de ce processus constitue sa **trajectoire**.

Remarques

- Si le temps t est continu ($t \in \mathbb{R}$) alors y_t est un **processus stochastique continu**.
- Si le temps t est discret ($t \in \mathbb{Z}$) alors y_t est un **processus stochastique discret**.
- Un processus stochastique est aussi appelé **série temporelle** ou **série chronologique**.
- Ces dernières appellations sont réservées aux processus stochastiques discrets.
- Un processus stochastique est noté $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ ou simplement y_t.

Exemples





- A gauche, $\{P_t\}_t^T$ est le processus stochastique des prix d'un actif financier ;
- A droite, $\{r_t\}_t^T$ est le processus stochastique des rentabilités d'un actif financier.

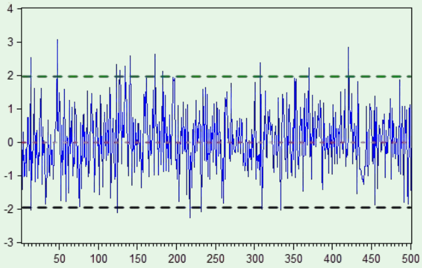
Processus stochastique stationnaire

Un processus stochastique y_t est dit **stationnaire au sens faible** ou **stationnaire au second ordre** ou encore **stationnaire en covariance** si ses moments non conditionnels d'ordres un et deux sont finis et indépendants de l'indice temporel t, c'est à dire :

1. $E\left(y_t\right) = \mu < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
2. $V\left(y_t\right) = \sigma^2 < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
3. $cov\left(y_t ; y_{t-k}\right) = \gamma_k < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \ et \ \forall k = 1, 2, \cdots$

Remarque

EXEMPLE : LE BRUIT BLANC



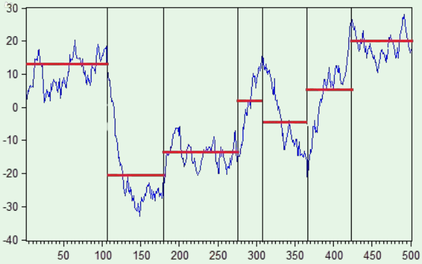
Le **bruit blanc** [a] $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_T\}$, noté $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, est un processus stochastique vérifiant 3 propriétés :

1. $E(\varepsilon_t) = 0 \;, \; \forall t = 1, 2, \cdots, T$
2. $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \;, \; \forall t = 1, 2, \cdots, T$
3. $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \;, \; \forall t = 1, 2, \cdots, T \; et \; \forall k = 1, 2, \cdots$

a. White noise en anglais.

Le bruit blanc ε_t est un processus stochastique stationnaire, il fluctue autour de sa moyenne nulle et reste à l'intérieur d'une zone stable $[-q\sigma_\varepsilon \;, \; +q\sigma_\varepsilon]$, où q est le quantile d'une distribution de probabilités.

Contre-exemple : La marche aléatoire



La **marche aléatoire** [a], ou **marche au hasard**, $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_T\}$, est un processus stochastique donné par :

$$\omega_t = \omega_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

a. Random walk en anglais.

La marche aléatoire ω_t est un processus stochastique non-stationnaire puisque sa moyenne et/ou sa variance changent dans le temps.

Théorème de décomposition de Wold

Tout processus stochastique y_t stationnaire au sens faible peut s'écrire sous forme d'une somme pondérée infinie de bruits blancs présent ε_t et passés $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ plus, éventuellement, un processus déterministe η_t parfaitement prévisible :

$$y_t = \eta_t + \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

avec :

- $\psi_0 = 1$ et $\psi_i \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < +\infty$ pour assurer l'existence des moments d'ordre 2.

Opérateur retard

L'**opérateur retard** noté L (*Lag*) ou B (*Backshift*) permet de passer d'une variable aléatoire y_t à sa valeur retardée y_{t-1} de la manière suivante :

$$y_{t-1} = Ly_t$$

Généralisation

La définition précédente de l'opérateur retard peut se généraliser comme suit :

$$y_{t-k} = L^k y_t$$

Intuition :

$$y_{t-2} = Ly_{t-1} = L\left(Ly_t\right) = L^2 y_t$$
$$y_{t-3} = Ly_{t-2} = L\left(L^2 y_t\right) = L^3 y_t \cdots$$

Remarque

Si le processus stochastique y_t prend la même valeur θ à chaque instant t, alors on a :

$$y_{t-1} = Ly_t \Longrightarrow \theta = L\theta$$

On en conclut que l'opérateur retard n'a aucun effet sur une constante. Il se comporte, de ce fait, exactement comme l'élément neutre de la multiplication, i.e. le nombre 1, quand il est appliqué à une constante.

Polynôme retard

Le **polynôme retard** $\Phi(L)$ permet d'écrire une combinaison linéaire de variables retardées de manière réduite en utilisant l'opérateur retard L comme suit :

$$\begin{aligned}\phi_0 y_t + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_n y_{t-n} &= \phi_0 y_t + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \cdots + \phi_n L^n y_t \\ &= \underbrace{\left(\phi_0 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_n\right)}_{\Phi(L)} L^n y_t\end{aligned}$$

Opérateur de différence

Dans le cas particulier d'une différence première, on a :

$$y_t - y_{t-1} = y_t - L y_t = \underbrace{(1-L)}_{\Delta} y_t$$

Δ est appelé **opérateur de différence**.

Sommaire

Section 1.2

Modèle autorégressif

- Représentations
- Conditions de stationnarité
- Propriétés statistiques
- Identification
- Estimation
- Validation
- Prévision

Représentations

Modèle autorégressif d'ordre 1

Un modèle **autorégressif d'ordre 1**, noté $AR(1)$, s'écrit comme suit :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$$

avec $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\alpha_1 \neq 0$.

Remarque

Dans un modèle $AR(1)$, la variable aléatoire y_t est régressée sur sa propre valeur retardée d'une période y_{t-1}.

Exemple

$$y_t = 1 + 0.1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}(0; 1)$$

Modèle autorégressif d'ordre 2

Un modèle **autorégressif d'ordre 2**, noté $AR(2)$, s'écrit comme suit :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$$

avec $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\alpha_2 \neq 0$.

Remarque

Dans un modèle $AR(2)$, la variable aléatoire y_t est régressée sur ses propres valeurs retardées d'une et deux périodes y_{t-1} et y_{t-2}.

Exemple

$$y_t = 0.2 y_{t-1} + 0.1 y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}\,(0;1)$$

Modèle autorégressif d'ordre p

Un modèle **autorégressif d'ordre** p, noté $AR(p)$, s'écrit comme suit :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$$

avec $\varepsilon_t \sim WN\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$ et $\alpha_p \neq 0$.

Remarque

Dans un modèle $AR(p)$, la variable aléatoire y_t est régressée sur ses p valeurs retardées $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-p}$.

Exemple

$$y_t = 0.4 y_{t-1} + 0.3 y_{t-2} - 0.2 y_{t-3} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}\,(0; 1)$$

Conditions de stationnarité

Théorème : Condition de stationnarité d'un processus $AR(1)$

Soit y_t un processus stochastique ayant la représentation autorégressive $AR(1)$ suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_1 \neq 0$$

Le processus stochastique y_t est stationnaire si et seulement si son coefficient autorégressif α_1 est strictement inférieur à un en valeur absolue ($|\alpha_1| < 1$).

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(1)$ suivante :

$$y_t = 1 + 0.1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0;1)$$

Le coefficient autorégressif de cette représentation $AR(1)$ est inférieure à un en valeur absolue. On conclut que le processus stochastique y_t est stationnaire au sens faible.

Théorème : Condition de stationnarité d'un processus $AR(2)$

Soit y_t un processus stochastique ayant la représentation autorégressive $AR(2)$ suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_2 \neq 0$$

Le processus stochastique y_t est stationnaire si et seulement si ses coefficients autorégressifs α_1 et α_2 vérifient les conditions suivantes :

- $|\alpha_2| < 1$
- $\alpha_2 + \alpha_1 < 1$
- $\alpha_2 - \alpha_1 < 1$

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0;1)$$

Les coefficients autorégressifs de cette représentation $AR(2)$ vérifient les conditions suivantes :

- $|0.1| < 1$
- $0.1 + 0.2 = 0.3 < 1$
- $0.1 - 0.2 = -0.1 < 1$

On conclut que le processus stochastique y_t est stationnaire au sens faible.

Écriture alternative d'un $AR(p)$

Le modèle $AR(p)$ s'écrit de manière réduite à l'aide d'un polynôme retard comme suit :

$$
\begin{aligned}
y_t &= \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\
y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \cdots - \alpha_p y_{t-p} &= \theta + \varepsilon_t \\
y_t - \alpha_1 L y_t - \alpha_2 L^2 y_t - \cdots - \alpha_p L^p y_t &= \theta + \varepsilon_t \\
y_t \underbrace{\left(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \cdots - \alpha_p L^p\right)}_{\alpha(L)} &= \theta + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

D'où :

$$\alpha(L)\, y_t = \theta + \varepsilon_t$$

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0;1)$$

Alternativement, on peut réécrire cette représentation $AR(2)$ comme suit :

$$\begin{aligned} y_t &= 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \\ y_t - 0.2y_{t-1} - 0.1y_{t-2} &= \varepsilon_t \\ y_t - 0.2Ly_t - 0.1L^2y_t &= \varepsilon_t \\ y_t \underbrace{(1 - 0.2L - 0.1L^2)}_{\alpha(L)} &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\alpha(L)y_t = \varepsilon_t}$$

Équation caractéristique d'un $AR(p)$

A tout modèle $AR(p)$ on associe une **équation caractéristique**, notée EC, donnée par :

$$\alpha(z) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_p z^p = 0$$

Remarque

La stationnarité d'un processus stochastique y_t ayant une représentation $AR(p)$ est déterminée par les racines de son équation caractéristique $\alpha(z) = 0$.

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0;1)$$

L'équation caractéristique de cette représentation $AR(2)$ s'écrit :

$$\boxed{\alpha(z) = 0 \Longleftrightarrow 1 - 0.2z - 0.1z^2 = 0}$$

Théorème : Condition de stationnarité d'un processus $AR(p)$

Soit y_t un processus stochastique ayant la représentation autorégressive $AR(p)$ suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_p \neq 0$$

Le processus stochastique y_t est stationnaire si et seulement si toutes les racines $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_p^*$ de son équation caractéristique $\alpha(z) = 0$ sont strictement supérieures à un en module [a].

a. Le module est la généralisation de la valeur absolue dans l'ensemble des nombres complexes.

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0;1)$$

L'équation caractéristique de cette représentation $AR(2)$ peut se réécrire, en multipliant ses membres par -10, comme suit :

$$z^2 + 2z - 10 = 0$$

La résolution de cette équation donne $(\Delta = 44)$:

$$z_1^* = -4.32 \qquad\qquad z_2^* = 2.32$$

Les racines z_1^* et z_2^* de l'équation caractéristique étant strictement supérieures à un en module, on conclut que le processus stochastique y_t est stationnaire au sens faible.

Corollaire

Soit y_t un processus stochastique ayant la représentation autorégressive $AR(p)$ suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_p \neq 0$$

Le processus stochastique y_t est stationnaire si et seulement si toutes les racines inverses $1/z_1^*, 1/z_2^*, \cdots, 1/z_p^*$ de son équation caractéristique $\alpha(z) = 0$, dites **racines caractéristiques**, se trouvent strictement à l'intérieur du cercle unitaire.

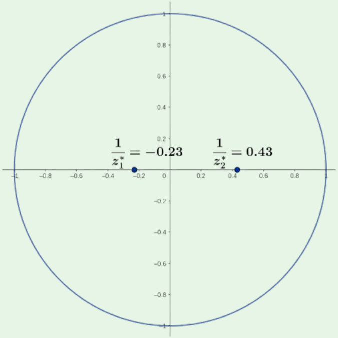
Remarque

Si l'une des racines caractéristiques associées à un processus stochastique y_t se trouve sur le cercle unitaire, on dit que ce processus a une **racine unitaire**. Le processus stochastique y_t est dans ce cas **non-stationnaire**.

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0;1)$$



Les racines caractéristiques $1/z_1^* = -0.23$ et $1/z_2^* = 0.43$ de l'équation caractéristique étant strictement à l'intérieur du cercle unitaire, on conclut que le processus stochastique y_t est stationnaire au sens faible.

Propriétés statistiques

Espérance mathématique $E(y_t)$

Soit y_t un processus stochastique ayant la représentation autorégressive $AR(p)$ suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_p \neq 0$$

Sous l'hypothèse de stationnarité du processus y_t, on pose $E(y_t) \equiv \mu$:

$$\underbrace{E(y_t)}_{\mu} = \theta + \alpha_1 \underbrace{E(y_{t-1})}_{\mu} + \alpha_2 \underbrace{E(y_{t-2})}_{\mu} + \cdots + \alpha_p \underbrace{E(y_{t-p})}_{\mu} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0} \Longrightarrow \mu = \theta + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu + \cdots + \alpha_p \mu$$

D'où :

$$\boxed{\mu = \frac{\theta}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_p}}$$

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(1)$ suivante :

$$y_t = 1 + 0.1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0;1)$$

Le processus stochastique y_t étant stationnaire, on pose $E(y_t) \equiv \mu$:

$$\underbrace{E\left(y_t\right)}_{\mu} = 1 + 0.1\,\underbrace{E\left(y_{t-1}\right)}_{\mu} + \underbrace{E\left(\varepsilon_t\right)}_{0} \Longrightarrow \mu = 1 + 0.1\mu$$

D'où :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{1-0.1} \approx 1.11}$$

Remarque : Processus centré

Soit y_t un processus stochastique ayant la représentation autorégressive $AR(p)$ sans terme constant suivante :

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_p \neq 0$$

Sous l'hypothèse de stationnarité du processus y_t, l'espérance mathématique $E\left(y_t\right)$ est nulle puisque :

$$\boxed{\mu = \frac{0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_p} = 0}$$

Dans ce cas, y_t un **processus stochastique centré**.

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}\,(0;1)$$

Le processus stochastique y_t étant stationnaire, on pose $E(y_t) \equiv \mu$:

$$\underbrace{E\left(y_t\right)}_{\mu} = 0.2\underbrace{E\left(y_{t-1}\right)}_{\mu} + 0.1\underbrace{E\left(y_{t-2}\right)}_{\mu} + \underbrace{E\left(\varepsilon_t\right)}_{0} \Longrightarrow \mu = 0.2\mu + 0.1\mu$$

D'où :

$$\boxed{\mu = \frac{0}{1-0.2-0.1} = 0}$$

Variance $V(y_t)$

Soit y_t un processus stochastique ayant la représentation autorégressive $AR(1)$ suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_1 \neq 0$$

Sous l'hypothèse de stationnarité du processus y_t, on pose $V(y_t) \equiv \sigma^2$:

$$\underbrace{V(y_t)}_{\sigma^2} = \alpha_1^2 \underbrace{V(y_{t-1})}_{\sigma^2} + \underbrace{V(\varepsilon_t)}_{\sigma_\varepsilon^2} \Longrightarrow \sigma^2 = \alpha_1^2 \sigma^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

D'où :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha_1^2}}$$

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(1)$ suivante :

$$y_t = 1 + 0.1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}(0;1)$$

Le processus stochastique y_t étant stationnaire, on pose $V(y_t) \equiv \sigma^2$:

$$\underbrace{V\left(y_t\right)}_{\sigma^2} = 0.1^2 \underbrace{V\left(y_{t-1}\right)}_{\sigma^2} + \underbrace{V\left(\varepsilon_t\right)}_{1} \Longrightarrow \sigma^2 = 0.1^2 \sigma^2 + 1$$

D'où :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{1 - 0.1^2} \approx 0.01}$$

Remarque

Pour tout processus stochastique y_t ayant une représentation autorégressive $AR(p)$ avec $p \geq 2$, le calcul de la variance $V(y_t)$ fait intervenir l'autocovariance $cov(y_t, y_{t-k})$. Ainsi, la variance et la fonction d'autocovariance sont obtenues simultanément par la résolution des équations de Yule - Walker, en se rappelant que $V(y_t) = cov(y_t, y_t)$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t, y_{t-k}\right)$

Soit y_t^c la version centrée d'un processus stochastique y_t ayant une représentation autorégressive $AR(p)$:

$$y_t^c = \cancel{\theta} + \alpha_1 y_{t-1}^c + \alpha_2 y_{t-2}^c + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^c + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \alpha_p \neq 0$$

Sous l'hypothèse de stationnarité du processus y_t, on pose $cov\left(y_t, y_{t-k}\right) \equiv \gamma_k$:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E\left[\left(y_t - \mu\right)\left(y_{t-k} - \mu\right)\right] = E\left(y_t^c y_{t-k}^c\right) \\
&= E(\alpha_1 y_{t-1}^c y_{t-k}^c + \alpha_2 y_{t-2}^c y_{t-k}^c + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^c y_{t-k}^c + \varepsilon_t y_{t-k}^c) \\
&= \alpha_1 \underbrace{E(y_{t-1}^c y_{t-k}^c)}_{\gamma_{k-1}} + \alpha_2 \underbrace{E(y_{t-2}^c y_{t-k}^c)}_{\gamma_{k-2}} + \cdots + \alpha_p \underbrace{E(y_{t-p}^c y_{t-k}^c)}_{\gamma_{k-p}} + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-k}^c)}_{cov(\varepsilon_t, y_{t-k}^c)}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \alpha_p \gamma_{k-p} + cov(\varepsilon_t, y_{t-k}^c)}$$

Fonction d'autocovariance $cov(y_t, y_{t-k})$ - Suite

$cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k}) =?$:

$$y^c_{t-k} = \alpha_1 y^c_{t-k-1} + \alpha_2 y^c_{t-k-2} + \cdots + \alpha_p y^c_{t-k-p} + \varepsilon_{t-k}$$

$$\varepsilon_t y^c_{t-k} = \alpha_1 \varepsilon_t y^c_{t-k-1} + \alpha_2 \varepsilon_t y^c_{t-k-2} + \cdots + \alpha_p \varepsilon_t y^c_{t-k-p} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}$$

$$\underbrace{E(\varepsilon_t y^c_{t-k})}_{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k})} = \alpha_1 \underbrace{E(\varepsilon_t y^c_{t-k-1})}_{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k-1})} + \alpha_2 \underbrace{E(\varepsilon_t y^c_{t-k-2})}_{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k-2})} + \cdots + \alpha_p \underbrace{E(\varepsilon_t y^c_{t-k-p})}_{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k-p})} + \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k})}_{cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})}$$

$$k = 0 \Longrightarrow cov(\varepsilon_t, y^c_t) = \alpha_1 \underbrace{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-1})}_{0} + \alpha_2 \underbrace{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-2})}_{0} + \cdots + \alpha_p \underbrace{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-p})}_{0} + \underbrace{cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t)}_{\sigma^2_\varepsilon}$$

$$k > 0 \Longrightarrow cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k}) = \alpha_1 \underbrace{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k-1})}_{0} + \cdots + \alpha_p \underbrace{cov(\varepsilon_t, y^c_{t-k-p})}_{0} + \underbrace{cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})}_{0}$$

Fonction d'autocovariance $cov(y_t, y_{t-k})$ - Suite

Finalement :

$$\boxed{\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \alpha_p \gamma_{k-p} + \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & si \;\; k = 0 \\ 0 & si \;\; k > 0 \end{cases}}$$

Notons que la variance de y_t correspond au cas particulier de la fonction d'autocovariance γ_k pour $k = 0$, c'est à dire : $V(y_t) = \gamma_0$.

Remarque

Sous l'hypothèse de stationnarité de y_t, on a :

$$\gamma_k = cov(y_t, y_{t-k}) = cov(y_{t+k}, y_t) = cov(y_t, y_{t+k}) = cov(y_t, y_{t-(-k)}) = \gamma_{-k}$$

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}(0;1)$$

On a :

$$\gamma_k = 0.2\gamma_{k-1} + 0.1\gamma_{k-2} + \begin{cases} 1 & si \ \ k = 0 \\ 0 & si \ \ k > 0 \end{cases}$$

Fonction d'autocorrélation $corr(y_t, y_{t-k})$

La fonction d'autocorrélation $corr(y_t, y_{t-k})$ entre y_t et y_{t-k}, notée ρ_k, est donnée par le rapport entre la fonction d'autocovariance γ_k et la variance γ_0. On obtient :

$$\boxed{\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p\rho_{k-p} + \begin{cases} \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} & si \;\; k = 0 \\ 0 & si \;\; k > 0 \end{cases}}$$

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}\,(0;1)$$

On a :

$$\rho_k = 0.2\rho_{k-1} + 0.1\rho_{k-2} + \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_0} & si \ \ k = 0 \\ 0 & si \ \ k > 0 \end{cases}$$

Équations de Yule-Walker

Les **équations de Yule-Walker** sont données par :

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \alpha_1\rho_0 + \alpha_2\rho_1 + \cdots + \alpha_p\rho_{1-p} \\
\rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_0 + \cdots + \alpha_p\rho_{2-p} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La résolution par substitution récursive de ces équations permet d'obtenir les coefficients d'autocorrélation ρ_i et *in fine* les autocovariances γ_i.

Exemple

On considère un processus stochastique y_t ayant la représentation $AR(2)$ suivante :

$$y_t = 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}\,(0;1)$$

Équations de Yule-Walker :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.2\rho_0 + 0.1\rho_{-1} \\ \rho_2 &= 0.2\rho_1 + 0.1\rho_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sachant que $\rho_0 = 1$ et $\rho{-1} = \rho_1$, on a :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.2 + 0.1\rho_1 && (1) \\ \rho_2 &= 0.2\rho_1 + 0.1 && (2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{\rho_1 \approx 0.22} \text{ et } (2) \Rightarrow \boxed{\rho_2 \approx 0.14}$$

Exemple - Suite

$$(1) \Rightarrow \boxed{\rho_1 \approx 0.22} \text{ et } (2) \Rightarrow \boxed{\rho_2 \approx 0.14}$$

La variance :

$$\rho_0 = 1 = 0.2\rho_1 + 0.1\rho_2 + \frac{1}{\gamma_0} \Longrightarrow \boxed{\gamma_0 = V(y_t) \approx 1.06}$$

La fonction d'autocovariance :

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \Longleftrightarrow \boxed{\gamma_1 = \rho_1\gamma_0 \approx 0.2332}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \Longleftrightarrow \boxed{\gamma_2 = \rho_2\gamma_0 \approx 0.1484}$$

$$\vdots$$

Variance $V(y_t)$ et fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$:

- Variance $V(y_t)$:

$$\gamma_0 = 0.1\gamma_1 + 0.2\gamma_2 + 1$$

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 0.1\frac{\gamma_1}{\gamma_0} + 0.2\frac{\gamma_2}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_0}$$

$$1 = 0.1\rho_1 + 0.2\rho_2 + \frac{1}{\gamma_0}$$

d'où :

$$\gamma_0 = \frac{1}{1 - 0.1\rho_1 - 0.2\rho_2}$$

Variance $V(y_t)$ et fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$

- Fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$:

  Equations de Yule - Walker :

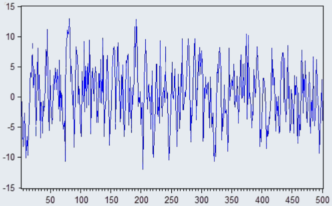
$$\rho_1 = 0.1 + 0.2\rho_1 = 0.1250$$
$$\rho_2 = 0.1\rho_1 + 0.2 = 0.2125$$
$$\rho_3 = 0.1\rho_2 + 0.2\rho_1 = 0.04625$$
$$\vdots$$

  et

$$\gamma_0 = 1.0582$$

  d'où :

$$AR(1): y_t = 0.2 + 0.5 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$




```
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+1 @LAST
Y = 0.2 + 0.5 * Y( -1 ) + e
```

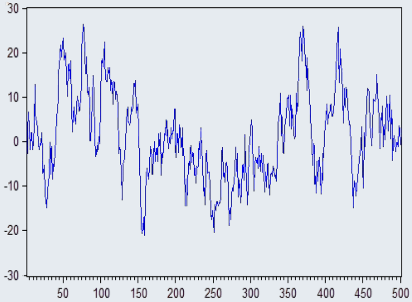
Simulation de modèles AR

```
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+1 @LAST
Y = 0.2 + Y( -1 ) + e
```

$$AR(1) : y_t = 0.2 + y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Simulation de modèles AR

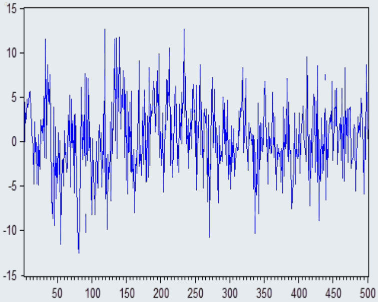
```
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+1 @LAST
Y = 0.2 + 0.9 * Y( -1 ) + e
```



$$AR(1): y_t = 0.2 + 0.9 y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Simulation de modèles AR

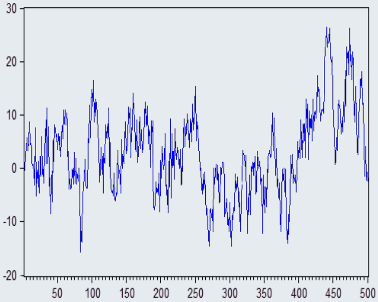
```
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+2 @LAST
Y = 0.3 + 0.1 * Y( -1 ) + 0.4 * Y( -2 ) + e
```



$$AR(2): y_t = 0.3 + 0.1 y_{t-1} + 0.4 y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Simulation de modèles AR

SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+2 @LAST
Y = 0.3 + 0.5 * Y(-1) + 0.4 * Y(-2) + e



$$AR(2): y_t = 0.3 + 0.5 y_{t-1} + 0.4 y_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Sommaire

Section 1.3

Modèle moyenne mobile

-
-
-
-

Formule analytique d'un $MA(1)$

Un modèle *moyenne mobile d'ordre 1*, noté $MA(1)$, met en relation la variable aléatoire y_t avec la valeur retardée d'une période du choc ε_{t-1} selon la forme analytique suivante :

$$y_t = \theta + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \tag{3}$$

avec $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon)$ et $\beta_1 \neq 0$.

alternativement

Alternativement, le modèle (3) peut s'écrire de manière réduite à l'aide d'un polynôme retard :

$$
\begin{aligned}
y_t &= \theta + \beta_1 L\varepsilon_t + \varepsilon_t \\
&= \theta + \left(1 + \beta_1 L\right)\varepsilon_t \\
&= \theta + \beta\left(L\right)\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

avec $\beta\left(L\right) \equiv 1 + \beta_1 L$.

Espérance non conditionnelle $E(y_t)$

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= E(\theta + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\
&= \theta + \beta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0} \\
&= \theta
\end{aligned}
$$

L'espérance du processus y_t ne dépend pas du temps t.

Variance non conditionnelle $V\left(y_t\right)$

$$
\begin{aligned}
V\left(y_t\right) &= V\left(\theta + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\right) \\
&= \beta_1^2 \underbrace{V\left(\varepsilon_{t-1}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{V\left(\varepsilon_t\right)}_{\sigma_\varepsilon^2} \\
&= \beta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
&= \left(1 + \beta_1^2\right) \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

La variance du processus y_t ne dépend pas du temps t.

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

$$\begin{aligned}
cov\left(y_t; y_{t-k}\right) &= E\{[y_t - \underbrace{E\left(y_t\right)}_{\theta}][y_{t-k} - \underbrace{E\left(y_{t-k}\right)}_{\theta}]\} \\
&= E\left[\left(\beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\right)\left(\beta_1 \varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}\right)\right] \\
&= E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k} + \beta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k} + \beta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k-1}\right) \\
&= E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1}\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k}\right) + \beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k-1}\right) \\
&= cov\left(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k}\right) + \beta_1 cov\left(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-k-1}\right) + \beta_1 cov\left(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k}\right) \\
&\quad + \beta_1^2 cov\left(\varepsilon_{t-1}; \varepsilon_{t-k-1}\right)
\end{aligned}$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

- $k = 1$:

$$
\begin{aligned}
cov\left(y_t; y_{t-1}\right) &= \underbrace{E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\right)}_{0} + \beta_1 \underbrace{E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}\right)}_{0} + \beta_1 \underbrace{E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \beta_1^2 \underbrace{E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right)}_{0} \\
&= \beta_1 \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

- $k > 1$:

$$
\begin{aligned}
cov\left(y_t; y_{t-k}\right) &= \underbrace{E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}\right)}_{0} + \beta_1 \underbrace{E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1}\right)}_{0} + \beta_1 \underbrace{E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k}\right)}_{0} + \beta_1^2 \underbrace{E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k-1}\right)}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$

$$cov(y_t; y_{t-k}) = \begin{cases} \beta_1 \sigma_\varepsilon^2 \ \ si \ \ k = 1 \\ \\ 0 \ \ si \ \ k > 1 \end{cases} , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \ \ et \ \ k \neq 0$$

La fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$ ne dépend pas du temps t.

Rappel

Un processus stochastique y_t est *stationnaire au sens faible* si ses moments non conditionnels d'ordres un et deux sont finis et indépendants de l'indice temporel t, c'est à dire :

1. $E(y_t) = \mu < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
2. $V(y_t) = \sigma^2 < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
3. $cov(y_t; y_{t-k}) = \gamma_k < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \ et \ k \neq 0$

Les propriétés statistiques d'un $MA(1)$

1. $E(y_t) = \theta \;,\; \forall t = 1, 2, \cdots, T$
2. $V(y_t) = (1 + \beta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 \;,\; \forall t = 1, 2, \cdots, T$
3. $cov(y_t; y_{t-k}) = \begin{cases} \beta_1 \sigma_\varepsilon^2 & si \;\; k = 1 \\ 0 & si \;\; k > 1 \end{cases} \;,\; \forall t = 1, 2, \cdots, T \;\; et \;\; k \neq 0$

Il en résulte qu'un modèle $MA(1)$ est toujours stationnaire.

modèle moyenne mobile d'ordre q

Un modèle *moyenne mobile d'ordre q*, noté $MA(p)$, met en relation la variable aléatoire y_t avec les q valeurs retardées du choc $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots, \varepsilon_{t-q}$ selon la forme analytique suivante :

$$y_t = \theta + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \tag{4}$$

avec $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\beta_q \neq 0$.

alternativement

Alternativement, le modèle (4) peut s'écrire de manière réduite à l'aide d'un opérateur retard :

$$
\begin{aligned}
y_t &= \theta + \beta_1 L\varepsilon_t + \beta_2 L^2 \varepsilon_t + \cdots + \beta_q L^q \varepsilon_t + \varepsilon_t \\
y_t &= \theta + \left(1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + \beta_q L^q\right) \varepsilon_t \\
y_t &= \theta + \beta(L)\,\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

avec $\beta(L) \equiv 1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + \beta_q L^q$.

Espérance non conditionnelle $E(y_t)$:

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= E\left(\theta + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t\right) \\
&= \theta + \beta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{0} + \beta_2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2})}_{0} + \cdots + \beta_q \underbrace{E(\varepsilon_{t-q})}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0} \\
&= \theta
\end{aligned}
$$

L'espérance du processus y_t ne dépend pas du temps t.

Variance non conditionnelle $V\left(y_t\right)$

$$
\begin{aligned}
V\left(y_t\right) &= V\left(\theta+\beta_1\varepsilon_{t-1}+\beta_2\varepsilon_{t-2}+\cdots+\beta_q\varepsilon_{t-q}+\varepsilon_t\right)\\
&= \beta_1^2\underbrace{V\left(\varepsilon_{t-1}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2}+\beta_2^2\underbrace{V\left(\varepsilon_{t-2}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2}+\cdots+\beta_q^2\underbrace{V\left(\varepsilon_{t-q}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2}+\underbrace{V\left(\varepsilon_t\right)}_{\sigma_\varepsilon^2}\\
&= \left(1+\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

La variance du processus y_t ne dépend pas du temps t.

Fonction d'autocovariance $cov(y_t;y_{t-k})$

$$
\begin{aligned}
cov(y_t;y_{t-k}) =& E\{[y_t - \underbrace{E(y_t)}_{\theta}][y_{t-k} - \underbrace{E(y_{t-k})}_{\theta}]\} \\
=& E\left[\left(\beta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t\right)\left(\beta_1\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t-k-q} + \varepsilon_{t-k}\right)\right] \\
=& E[\varepsilon_t\left(\varepsilon_{t-k} + \beta_1\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t-k-q}\right) \\
& + \beta_1\varepsilon_{t-1}\left(\varepsilon_{t-k} + \beta_1\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t-k-q}\right) \\
& + \cdots \\
& + \beta_q\varepsilon_{t-q}\left(\varepsilon_{t-k} + \beta_1\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t-k-q}\right)]
\end{aligned}
$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

$$
\begin{aligned}
cov\left(y_t; y_{t-k}\right) = & E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k} + \beta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \beta_q\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-q} \\
& + \beta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + \beta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \beta_1\beta_q\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-q} \\
& + \cdots \\
& + \beta_q\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-k} + \beta_q\beta_1\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \beta_q^2\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-k-q}) \\
\\
= & E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1}\right) + \cdots + \beta_q E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-q}\right) \\
& + \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}\right) + \beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}\right) + \cdots + \beta_1\beta_q E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-q}\right) \\
& + \cdots \\
& + \beta_q E\left(\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-k}\right) + \beta_q\beta_1 E\left(\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-k-1}\right) + \cdots + \beta_q^2 E\left(\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-k-q}\right)
\end{aligned}
$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

- $q = 2 \ et \ k = 1$:

$$\begin{aligned}
cov\left(y_t; y_{t-1}\right) = & E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}\right) + \beta_2 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}\right) \\
& + \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}\right) + \beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right) + \beta_1 \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}\right) \\
& + \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1}\right) + \beta_2 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}\right) + \beta_2^2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3}\right) \\
= & \beta_1 \sigma_\varepsilon^2 + \beta_2 \beta_1 \sigma_\varepsilon^2 \\
= & \left(\beta_1 + \beta_2 \beta_1\right) \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

- $q = 2\ et\ k = 2$:

$$\begin{aligned} cov\left(y_t; y_{t-2}\right) =& E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_2 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-4}\right) \\ & + \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right) + \beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_1 \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-4}\right) \\ & + \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}\right) + \beta_2 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_2^2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-4}\right) \\ =& \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}\right) \\ =& \beta_2 \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

- $q = 2 \ et \ k = 3$:

$$\begin{aligned} cov\left(y_t; y_{t-3}\right) =& E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-4}\right) + \beta_2 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-5}\right) \\ & + \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-4}\right) + \beta_1 \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-5}\right) \\ & + \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_2 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-4}\right) + \beta_2^2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-5}\right) \\ =& 0 \end{aligned}$$

- $q = 2 \ et \ k > 2$:

$$cov\left(y_t; y_{t-k}\right) = 0$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$:

Modèle $MA(2)$

$$cov\left(y_t; y_{t-k}\right) = \begin{cases} \left(\beta_1 + \beta_2\beta_1\right)\sigma_\varepsilon^2 & si \;\; k = 1 \\ \beta_2\sigma_\varepsilon^2 & si \;\; k = 2 \\ 0 & si \;\; k > 2 \end{cases} \quad , \; \forall t = 1, 2, \cdots, T \;\; et \;\; k \neq 0$$

La fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$ ne dépend pas du temps t.

Fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$

- $q = 3 \ et \ k = 1$:

$$\begin{aligned}
cov(y_t; y_{t-1}) = & E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \beta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \beta_2 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}) \beta_3 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-4}) \\
& + \beta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \beta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + \beta_1 \beta_2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}) + \beta_1 \beta_3 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-4}) \\
& + \beta_2 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1}) + \beta_2 \beta_1 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}) + \beta_2^2 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3}) + \beta_2 \beta_3 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-4}) \\
& + \beta_3 E(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-1}) + \beta_3 \beta_1 E(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-2}) + \beta_3 \beta_2 E(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-3}) + \beta_3^2 E(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \beta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \beta_2 \beta_1 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}) + \beta_3 \beta_2 E(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-3}) \\
& = \beta_1 \sigma_\varepsilon^2 + \beta_2 \beta_1 \sigma_\varepsilon^2 + \beta_3 \beta_2 \sigma_\varepsilon^2 \\
& = (\beta_1 + \beta_2 \beta_1 + \beta_3 \beta_2) \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

- $q=3 \ et \ k=2$:

$$
\begin{aligned}
cov\left(y_t; y_{t-2}\right) =& E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}\right)+\beta_1 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}\right)+\beta_2 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-4}\right)+\beta_3 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-5}\right) \\
&+\beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right)+\beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}\right)+\beta_1 \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-4}\right)+\beta_1 \beta_3 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-5}\right) \\
&+\beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}\right)+\beta_2 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3}\right)+\beta_2^2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-4}\right)+\beta_2 \beta_3 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-5}\right) \\
&+\beta_3 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-2}\right)+\beta_3 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-3}\right)+\beta_3 \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-4}\right)+\beta_3^2 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-5}\right) \\
\\
=& \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}\right)+\beta_3 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-3}\right) \\
=& \beta_2 \sigma_\varepsilon^2+\beta_3 \beta_1 \sigma_\varepsilon^2 \\
=& \left(\beta_2+\beta_3 \beta_1\right) \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

- $q = 3 \;\; et \;\; k = 3$:

$$
\begin{aligned}
cov\left(y_t; y_{t-3}\right) = & E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-4}\right) + \beta_2 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-5}\right) + \beta_3 E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-6}\right) \\
& + \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-4}\right) + \beta_1 \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-5}\right) + \beta_1 \beta_3 E\left(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-6}\right) \\
& + \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_2 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-4}\right) + \beta_2^2 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-5}\right) + \beta_2 \beta_3 E\left(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-6}\right) \\
& + \beta_3 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-3}\right) + \beta_3 \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-4}\right) + \beta_3 \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-5}\right) + \beta_3^2 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-6}\right) \\
= & \beta_3 E\left(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t-3}\right) \\
= & \beta_3 \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t;y_{t-k}\right)$

- $q=3\ et\ k=4$:

$$
\begin{aligned}
cov\left(y_t;y_{t-4}\right) =& E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-4}\right)+\beta_1 E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-5}\right)+\beta_2 E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-6}\right)+\beta_3 E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-7}\right)\\
& +\beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-4}\right)+\beta_1^2 E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-5}\right)+\beta_1\beta_2 E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-6}\right)+\beta_1\beta_3 E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-7}\right)\\
& +\beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-4}\right)+\beta_2\beta_1 E\left(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-5}\right)+\beta_2^2 E\left(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-6}\right)+\beta_2\beta 3 E\left(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-7}\right)\\
& +\beta_3 E\left(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-4}\right)+\beta_3\beta_1 E\left(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-5}\right)+\beta_3\beta_2 E\left(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-6}\right)+\beta_3^2 E\left(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-7}\right)\\
=& 0
\end{aligned}
$$

- $q=3\ et\ k>3$:

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$

Modèle $MA(3)$

$$cov\left(y_t; y_{t-k}\right) = \begin{cases} \left(\beta_1 + \beta_2\beta_1 + \beta_3\beta_2\right)\sigma_\varepsilon^2 & si \;\; k = 1 \\ \left(\beta_2 + \beta_3\beta_1\right)\sigma_\varepsilon^2 & si \;\; k = 2 \\ \beta_3\sigma_\varepsilon^2 & si \;\; k = 3 \\ 0 & si \;\; k > 3 \end{cases} \quad , \; \forall t = 1, 2, \cdots, T \;\; et \;\; k \neq 0$$

La fonction d'autocovariance $cov\left(y_t; y_{t-k}\right)$ ne dépend pas du temps t.

Fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$

Modèle $MA(q)$

$$cov(y_t; y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q-k} \beta_i \beta_{k+i} & si \;\; k \leq q \\ \\ 0 & si \;\; k > q \end{cases} \quad , \; \forall t = 1, 2, \cdots, T \;,\; k \neq 0 \;\; et \;\; \beta_0 = 1$$

La fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$ ne dépend pas du temps t.

Rappel

Un processus stochastique y_t est *stationnaire au sens faible* si ses moments non conditionnels d'ordres un et deux sont finis et indépendants de l'indice temporel t, c'est à dire :

1. $E(y_t) = \mu < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
2. $V(y_t) = \sigma^2 < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
3. $cov(y_t; y_{t-k}) = \gamma_k < \infty \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \ et \ k \neq 0$

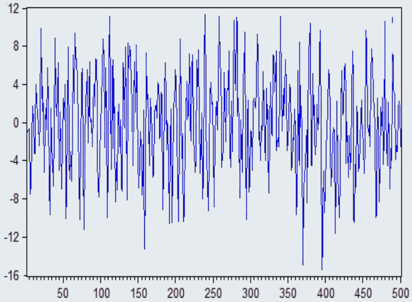
Les propriétés statistiques d'un $MA(q)$

1. $E(y_t) = \theta \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
2. $V(y_t) = \left(1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2 \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$
3. $cov(y_t; y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q-k} \beta_i \beta_{k+i} & si \ \ k \leq q \\ 0 & si \ \ k > q \end{cases} \quad \forall t = 1, 2, \cdots, T$

Il en résulte qu'un modèle $MA(q)$ est toujours stationnaire.

Simulations de modèles MA

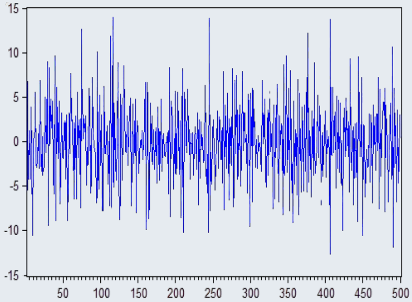
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
Y = 0.8 * e(-1) + e



$$MA(1): y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Simulations de modèles MA

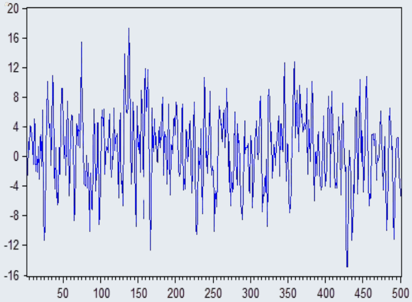
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
Y = -0.5 * e(-1) + e



$$MA(1): y_t = -0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Simulations de modèles MA

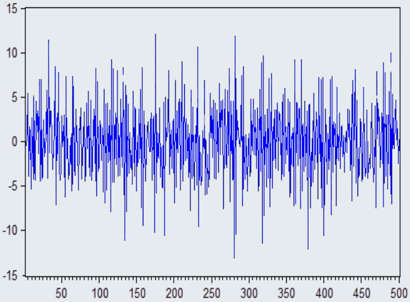
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
Y = 0.8 * e(-1) + 0.3 * e(-2) + e



$$MA(2) : y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Simulations de modèles MA

SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
Y = -0.5 * e(-1) + 0.3 * e(-2) + e



$$MA(2) : y_t = -0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Section 1.4

Modèle autorégressif moyenne mobile

modèle autorégressif moyenne mobile d'ordre $(1,1)$

Un modèle *autorégressif moyenne mobile d'ordre* $(1,1)$, noté $ARMA(1,1)$, met en relation la variable aléatoire y_t avec sa valeur retardée d'une période y_{t-1} et la valeur retardée d'une période du choc ε_{t-1} selon la forme analytique suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \tag{5}$$

avec $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\alpha_1 \neq 0$ et $\beta_1 \neq 0$.

aletrnativement

Alternativement, le modèle (5) peut s'écrire de manière réduite à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$
\begin{aligned}
y_t - \alpha_1 y_{t-1} &= \theta + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
y_t - \alpha_1 L y_t &= \theta + \beta_1 L \varepsilon_t + \varepsilon_t \\
(1 - \alpha_1 L)\, y_t &= \theta + \left(1 + \beta_1 L\right) \varepsilon_t \\
\alpha(L)\, y_t &= \theta + \beta(L)\, \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

avec $\alpha(L) \equiv 1 - \alpha_1 L$ et $\beta(L) \equiv 1 + \beta_1 L$.

Condition de stationnarité d'un $ARMA(1,1)$

Le modèle $ARMA(1,1)$ est le mélange d'un modèle $AR(1)$ qui n'est pas toujours stationnaire et d'un modèle $MA(1)$ qui est au contraire toujours stationnaire. Par conséquent, la condition de stationnarité d'un modèle $ARMA(1,1)$ provient de celle de sa partie autorégressive $AR(1)$, en l'occurrence $|\alpha_1| < 1$.

Espérance non conditionnelle $E(y_t)$

Sous l'hypothèse de stationnarité de y_t, notons $E(y_t) \equiv \mu$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
\underbrace{E(y_t)}_{\mu} &= E(\theta + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\
&= \theta + \alpha_1 \underbrace{E(y_{t-1})}_{\mu} + \beta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0} \\
\mu &= \theta + \alpha_1 \mu \\
\mu(1-\alpha_1) &= \theta
\end{aligned}
$$

d'où :

$$\mu = \frac{\theta}{1-\alpha_1}$$

Variance non conditionnelle $V\left(y_t\right)$

Sous l'hypothèse de stationnarité de y_t, notons $V\left(y_t\right) \equiv \sigma^2$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
\underbrace{V\left(y_t\right)}_{\sigma^2} &= V\left(\theta + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\right) \\
&= \alpha_1^2 \underbrace{V\left(y_{t-1}\right)}_{\sigma^2} + \beta_1^2 \underbrace{V\left(\varepsilon_{t-1}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{V\left(\varepsilon_t\right)}_{\sigma_\varepsilon^2} + 2\alpha_1 \underbrace{cov\left(y_{t-1}, \varepsilon_t\right)}_{0} \\
&\quad + 2\beta_1 \underbrace{cov\left(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t\right)}_{0} + 2\alpha_1\beta_1 \underbrace{cov\left(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}\right)}_{?}
\end{aligned}
$$

Variance non conditionnelle $V\left(y_t\right)$

$$
\begin{aligned}
cov\left(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}\right) &= E\{[y_{t-1} - \mu][\varepsilon_{t-1} - \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{0}]\} \\
&= E[\varepsilon_{t-1}(\alpha_1 y_{t-2} + \beta_1 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1})] \\
&= \alpha_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} y_{t-2})}_{0} + \beta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1})}_{\sigma_\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\sigma^2 = \alpha_1^2 \sigma^2 + \beta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2\alpha_1 \beta_1 \sigma_\varepsilon^2
$$

Enfin :

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t, y_{t-k}\right)$

Sous l'hypothèse de stationnarité de y_t, notons $cov\left(y_t, y_{t-k}\right) \equiv \gamma_k$

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\underbrace{E\left(y_t\right)}_{\mu} = \theta + \alpha_1 \underbrace{E\left(y_{t-1}\right)}_{\mu} + \beta_1 \underbrace{E\left(\varepsilon_{t-1}\right)}_{0} + \underbrace{E\left(\varepsilon_t\right)}_{0}$$

$$y_t - \mu = \alpha_1\left(y_{t-1} - \mu\right) + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Fonction d'autocovariance $cov\left(y_t, y_{t-k}\right)$

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= E\left[\left(y_t - \mu\right)\left(y_{t-k} - \mu\right)\right] \\
&= E\{[\alpha_1\left(y_{t-1} - \mu\right) + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t][y_{t-k} - \mu]\} \\
&= E\left[\alpha_1\left(y_{t-1} - \mu\right)\left(y_{t-k} - \mu\right) + \beta_1 \varepsilon_{t-1}\left(y_{t-k} - \mu\right) + \varepsilon_t\left(y_{t-k} - \mu\right)\right] \\
&= \alpha_1 E\left[\left(y_{t-1} - \mu\right)\left(y_{t-k} - \mu\right)\right] + \beta_1 E\{[\varepsilon_{t-1} - \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{0}][y_{t-k} - \mu]\} \\
&\quad + E\{[\varepsilon_t - \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0}][y_{t-k} - \mu]\} \\
&= \alpha_1 cov\left(y_{t-1}; y_{t-k}\right) + \beta_1 cov(\varepsilon_{t-1}; y_{t-k}) + cov(\varepsilon_t; y_{t-k})
\end{aligned}
$$

Fonction d'autocovariance $cov(y_t, y_{t-k})$

$$\gamma_1 = \alpha_1 \underbrace{cov(y_{t-1}; y_{t-1})}_{\sigma^2} + \beta_1 \underbrace{cov(\varepsilon_{t-1}; y_{t-1})}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{cov(\varepsilon_t; y_{t-1})}_{0}$$

$$= \alpha_1 \sigma^2 + \beta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \alpha_1 \underbrace{cov(y_{t-1}; y_{t-2})}_{\gamma_1} + \beta_1 \underbrace{cov(\varepsilon_{t-1}; y_{t-2})}_{0} + \underbrace{cov(\varepsilon_t; y_{t-2})}_{0}$$

$$= \alpha_1 \gamma_1$$

$$\gamma_k = \alpha_1 \underbrace{cov(y_{t-1}; y_{t-k})}_{\gamma_{k-1}} + \beta_1 \underbrace{cov(\varepsilon_{t-1}; y_{t-k})}_{0} + \underbrace{cov(\varepsilon_t; y_{t-k})}_{0}$$

$$= \alpha_1 \gamma_{k-1}$$

modèle autorégressif moyenne mobile d'ordre (p,q)

Un modèle *autorégressif moyenne mobile d'ordre* (p,q), noté $ARMA(p,q)$, met en relation la variable aléatoire y_t avec ses p valeurs retardées $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-p}$ et les q valeurs retardées du choc $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots, \varepsilon_{t-q}$ selon la forme analytique suivante :

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T \tag{6}$$

avec $\varepsilon_t \sim WN\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$ et $\alpha_p \neq 0$ et $\beta_q \neq 0$.

alternativement

Alternativement, le modèle (6) peut s'écrire de manière réduite à l'aide de polynômes retard comme suit :

$$
\begin{aligned}
y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \cdots - \alpha_p y_{t-p} &= \theta + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \\
y_t - \alpha_1 L y_t - \cdots - \alpha_p L^p y_t &= \theta + \beta_1 L \varepsilon_t + \cdots + \beta_q L^q \varepsilon_t + \varepsilon_t \\
\left(1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_p L^p\right) y_t &= \theta + \left(1 + \beta_1 L + \cdots + \beta_q L^q\right) \varepsilon_t \\
\alpha(L)\, y_t &= \theta + \beta(L)\, \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

avec $\alpha(L) \equiv 1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_p L^p$ et $\beta(L) \equiv 1 + \beta_1 L + \cdots + \beta_q L^q$.

Remarque

$$ARMA(0,q) \equiv MA(q)$$

$$ARMA(p,0) \equiv AR(p)$$

Condition de stationnarité d'un $ARMA(p,q)$

Le modèle $ARMA(p,q)$ est le mélange d'un modèle $AR(p)$ qui n'est pas toujours stationnaire et d'un modèle $MA(q)$ qui est au contraire toujours stationnaire. Par conséquent, la condition de stationnarité d'un modèle $ARMA(p,q)$ provient de celle de sa partie autorégressive $AR(p)$, en l'occurrence $|z_i| > 1$, $\forall i = 1, 2, \cdots, p$...

Espérance non conditionnelle $E(y_t)$

Sous l'hypothèse de stationnarité de y_t, on note $E(y_t) \equiv \mu$:

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

$$\underbrace{E(y_t)}_{\mu} = E\left(\theta + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t\right)$$

$$= \theta + \alpha_1 \underbrace{E(y_{t-1})}_{\mu} + \cdots + \alpha_p \underbrace{E(y_{t-p})}_{\mu} + \beta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{0} + \cdots + \beta_q \underbrace{E(\varepsilon_{t-q})}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0}$$

$$\mu = \theta + \alpha_1 \mu + \cdots + \alpha_p \mu$$

d'où :

$$\mu = \frac{\theta}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_p}$$

Variance non conditionnelle $V\left(y_t\right)$

Sous l'hypothèse de stationnarité de y_t, on note $V\left(y_t\right) \equiv \sigma^2$:

$$y_t = \theta + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

$$\underbrace{V\left(y_t\right)}_{\sigma^2} = V\left(\theta + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t\right)$$

$$= \alpha_1^2 \underbrace{V\left(y_{t-1}\right)}_{\sigma^2} + \cdots + \alpha_p^2 \underbrace{V\left(y_{t-p}\right)}_{\sigma^2} + \beta_1^2 \underbrace{V\left(\varepsilon_{t-1}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \cdots + \beta_q^2 \underbrace{V\left(\varepsilon_{t-q}\right)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{V\left(\varepsilon_t\right)}_{\sigma_\varepsilon^2}$$

$$+ 2 \sum_{i \leq j} \alpha_i \beta_j cov\left(y_{t-i}; \varepsilon_{t-j}\right)$$

$$\sigma^2 = \alpha_1^2 \sigma^2 + \cdots + \alpha_p^2 \sigma^2 + \beta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \cdots + \beta_q^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2 \sum_{i \leq j} \alpha_i \beta_j cov\left(y_{t-i}; \varepsilon_{t-j}\right)$$

d'où :

Fonction d'autocovariance $cov(y_t; y_{t-k})$

- $k > max(p,q)$:

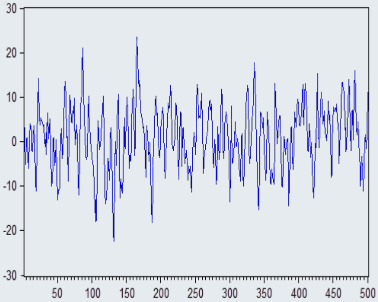
$$\gamma_k = \alpha_1\gamma_{k-1} + \alpha_2\gamma_{k-2} + \cdots + \alpha_p\gamma_{k-p}$$

- $k < max(p,q+1)$:

  Le calcul de la fonction d' d' autocovariance devient compliqué !

simulations de modèles $ARMA$

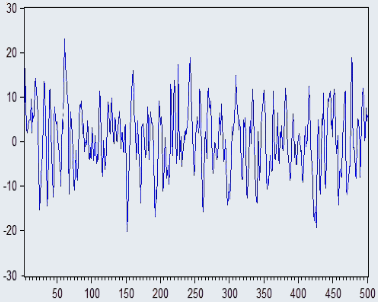
```
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+1 @LAST
Y = 0.2 + 0.5 * Y( -1 ) + 0.8 * e( -1 ) + e
```



$$ARMA(1,1): y_t = 0.2 + 0.5 y_{t-1} + 0.8 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

simulations de modèles *ARMA*

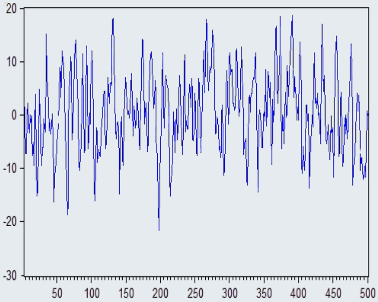
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+2 @LAST
Y = 0.2 + 0.5 * Y(-1) + 0.8 * e(-1) + 0.2 * e(-2) + e



$$ARMA(1,2): y_t = 0.2 + 0.5 y_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

simulations de modèles $ARMA$

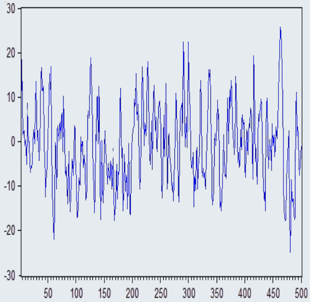
```
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+2 @LAST
Y = 0.2+0.5*Y(-1)+0.1*Y(-2)+0.8*e(-1)+e
```



$$ARMA(2,1): y_t = 0.2 + 0.5y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \;,\; \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

simulations de modèles $ARMA$

```
SERIES e = 2 * NRND
SERIES Y = 0
SMPL @FIRST+2 @LAST
Y=0.2+0.5*Y(-1)+0.1*Y(-2)+0.8*e(-1)+0.2*e(-2)+e
```



$$ARMA(2,2): y_t = 0.2 + 0.5 y_{t-1} + 0.1 y_{t-2} + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

Sommaire

Section 1.5

Racine unitaire

- Marche aléatoire
- Séries temporelles stationnaires autour d'une tendance
- Modèles généraux de racine unitaire
- Test de racine unitaire

Marche aléatoire

Marche aléatoire sans dérive

Un processus stochastique y_t est appelé **marche aléatoire** [a] **sans dérive** s'il s'écrit comme :

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$$

a. La marche aléatoire est la traduction de Random walk, traduite également par Marche au hasard.

Remarque

Si la distribution de probabilités de ε_t est symétrique, et sachant y_{t-1}, alors le processus stochastique y_t a autant de chance de croître que de décroître, d'où sa qualification de marche aléatoire.

Représentation AR d'une marche aléatoire sans dérive

Telle que définie précédemment, une marche aléatoire sans dérive n'est qu'un cas particulier d'un modèle $AR(1)$ dans lequel le coefficient autorégressif est égal à 1 :

$$y_t = 1.y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$$

Remarque

Le coefficient autorégressif étant égal à 1 implique que l'équation caractéristique associée à une marche aléatoire sans dérive a une **racine unitaire** et ne respecte pas la condition de stationnarité au sens faible. Une marche aléatoire sans dérive est en conséquence non-stationnaire au sens faible.

Représentation MA d'une marche aléatoire sans dérive

Par substitution récursive, une marche aléatoire sans dérive a une représentation $MA(\infty)$:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= (y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &\dots \\ y_t &= \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots \end{aligned}$$

Remarque

L'impact des chocs ε_{t-i} sur y_t ne diminue pas avec le temps, ils ont un **effet permanent**. La marche aléatoire sans dérive a, de ce fait, une bonne mémoire mesurée par une fonction d'autocorrélation très proche de l'unité.

Marche aléatoire avec dérive

Un processus stochastique y_t est appelé **marche aléatoire avec dérive** s'il s'écrit comme :

$$y_t = \theta + y_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$$

La constante θ est appelée **dérive**.

Remarque

La dérive θ représente la tendance temporelle du processus stochastique y_t. En effet :

$$\begin{aligned}
y_1 &= \theta + y_0 + \varepsilon_1, \ y_0 \text{ est la valeur initiale de } y_t \\
y_2 &= \theta + \theta + y_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 2\theta + y_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \\
&\cdots \\
y_t &= \underbrace{\theta t}_{\text{tendance}} + y_0 + \underbrace{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1}_{\text{marche aléatoire sans dérive}}
\end{aligned}$$

Séries temporelles stationnaires autour d'une tendance

Stationnarité autour d'une tendance déterministe

Un processus stochastique y_t est **stationnaire autour d'une tendance déterministe** s'il s'écrit comme :

$$y_t = a + bt + x_t \ , \ \forall t = 1, 2, \cdots, T$$

où $a + bt$ est une tendance déterministe et x_t est un processus stochastique stationnaire.

Remarque

Annexes

Annexes

Remarque préliminaire

Tout au long de ce cours, il sera fait appel aux notions d'espérance mathématique, de variance et de covariance qu'il faut savoir manipuler. Celles-ci, et plus particulièrement la covariance, peuvent donner lieu à des calculs fastidieux. Afin de les simplifier et d'en réduire le nombre, les variables aléatoires seront centrées de sorte que la covariance entre deux variables aléatoires soit simplement égale à l'espérance mathématique de leur produit. Une variable aléatoire centrée étant une variable dont l'espérance est nulle :

$$cov(X,Y) = E\left[\left(X - \underbrace{E(X)}_{0}\right)\left(Y - \underbrace{E(Y)}_{0}\right)\right] = E[XY]$$

Bibliographie

Box, G. and Jenkins, G. (1976). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Holden-Day series in time series analysis and digital processing. Holden-Day.

Box, G. E. P. (1976). Science and statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 71(356):791–799.

Danielsson, J. (2011). *Financial Risk Forecasting : The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab*. The Wiley Finance Series. Wiley.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36.