Introduction à l'économétrie

Applications en économie et en finance

Jaouad Madkour
`jmadkour@uae.ac.ma`

Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales de Tanger
Département des Sciences économiques et de Gestion

10 février 2026

jmadkour.org

Sommaire

Introduction

- Qu'est ce que l'économétrie ?
- Démarche de l'économétrie
- Notion de régression
- Références bibliographiques
- Plan du cours

Qu'est ce que l'économétrie ?

Samuelson, Koopmans et Stone (1954)

"L'économétrie peut être définie comme l'analyse quantitative des phénomènes économiques basée sur le développement concurrent de la théorie et de l'observation reliées par des méthodes appropriées de déduction."

Tintner (1968)

"L'économétrie [...] consiste à appliquer les mathématiques statistiques aux données économiques pour fournir une base empirique aux modèles construits par l'économie mathématique et obtenir des résultats mesurés."

Introduction

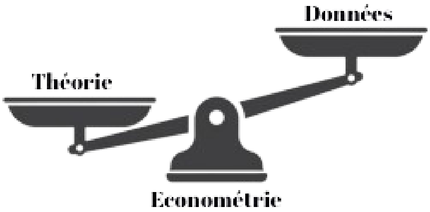
Qu'est ce que l'économétrie ?

Étymologie

Le terme *économétrie* est la fusion du terme **économie** et du terme **métrie** (= **mesure**).
Au sens littéral, l'économétrie signifie **mesure de l'économie**.

Définition

L'**économétrie** est l'application de méthodes statistiques à des données économiques pour **valider** ou **rejeter** des théories économiques.

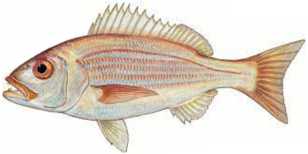


Démarche de l'économétrie

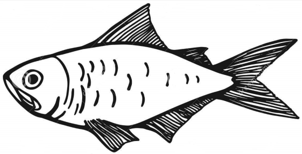
- Un **modèle** est une représentation simplifiée de la **réalité** ;
- La **modélisation économétrique** consiste à **expliquer** un phénomène économique.

> *"All models are wrong, but some are useful"*
>
> George Box (Statisticien britannique)

Réalité



Modèle 1



Modèle 2

Méthodologie traditionnelle de l'économétrie

1. Énoncé de la théorie ou des hypothèses ;
2. Spécification du modèle mathématique de la théorie ;
3. Spécification du modèle économétrique ;
4. Obtention des données ;
5. Estimation des paramètres du modèle économétrique ;
6. Test des hypothèses ;
7. Utilisation du modèle à des fins de prévision ou de contrôle.

1. Énoncé de la théorie ou des hypothèses

Loi psychologique fondamentale de Keynes (économiste):

> *"En moyenne et la plupart du temps, les hommes tendent à accroître leur consommation à mesure que leur revenu croît, mais non d'une quantité aussi grande que l'accroissement du revenu." (Keynes (1936), Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie)*

Keynes suppose que...

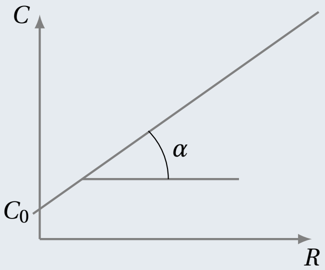
- la consommation C des ménages dépend de leur revenu R : $C = f(R)$
- la relation entre la consommation C et le revenu R est croissante : $f'(R) > 0$
- la consommation C croît moins vite que le revenu R : $\Delta C < \Delta R$
- la propension marginale à consommer est comprise entre 0 et 1 : $0 < f'(R) < 1$
- la propension moyenne à consommer diminue lorsque le revenu augmente : $PMC'(R) < 0$

2. Spécification du modèle mathématique de la théorie

- Keynes n'a donné aucune formulation mathématique à la fonction f ;
- Hicks (économiste mathématicien) a donné une forme linéaire à cette fonction :

$$C = C_0 + c.R \text{ avec } 0 < c < 1 \tag{1}$$

- C : Consommation des ménages
- R : Revenu disponible
- C_0 : Consommation incompressible $(R = 0)$
- c : Propension marginale à consommer $(= dC/dR)$
- $c = \tan(\alpha) : 0 < c < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 45°$



3. Spécification du modèle économétrique

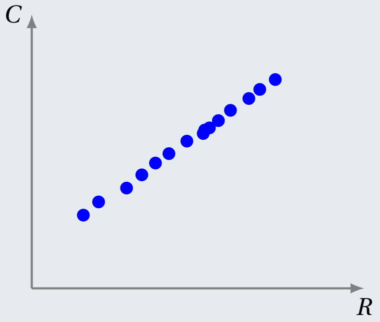
L'expression (1) suppose une relation déterministe entre la consommation C et le revenu R. Mais rien ne prouve, d'une part, que la consommation dépende exclusivement du revenu, car elle peut aussi dépendre de la taille des ménages et de l'âge des individus par exemple. Et rien ne garantit, d'autre part, que les variables économiques soient mesurées avec précision. Pour cela, un terme d'erreurs ε doit être inséré dans le modèle mathématique (1) pour tenir compte de ces deux problèmes. On obtient le modèle économétrique suivant :

$$C = C_0 + c.R + \varepsilon \tag{2}$$

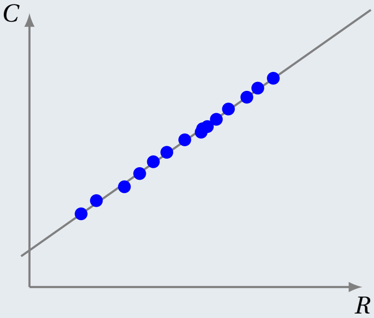
4. Obtention des données

Consommation privée (C) et PIB (R) aux USA entre 1982 et 1996 en milliards de dollars :

C	R	C	R
3081.5	4620.3	4132.2	6136.3
3240.6	4803.7	4105.8	6079.4
3407.6	5140.1	4219.8	6244.4
3566.5	5323.5	4343.6	6389.6
3708.7	5487.7	4486.0	6610.7
3822.3	5649.5	4595.3	6742.1
3972.7	5865.2	4714.1	6928.4
4064.6	6062.0		



5. Estimation des paramètres du modèle économétrique



$$\hat{C} = -184.08 + 0.7064R \qquad (3)$$

Sur la période étudiée (1982-1996):

- L'estimation du niveau moyen de la consommation est $\hat{C} = -184.08 + 0.7064R$
- L'estimation de la propension marginale à consommer est de $\hat{c} = 0.7064$
- L'estimation de la consommation incompressible est $\hat{C}_0 = -184.08$ milliards de dollars

L'estimation du modèle économétrique fournit un contenu empirique à la théorie économique.

Introduction

Démarche de l'économétrie

6. Test des hypothèses

1. On suppose que l'expression (3) est une bonne approximation de la réalité ;
2. La théorie keynésienne prévoit une propension marginale à consommer comprise entre 0 et 1 ;
3. L'estimation économétrique de la propension marginale à consommer est de $\hat{c} = 0.7064$;
4. L'estimation économétrique confirme-t-elle la théorie keynésienne de la consommation ?

Afin de valider ou rejeter la théorie keynésienne, il faut tester deux hypothèses :

- L'estimation $\hat{c} = 0.7064$ est-elle significativement différente de 0 ?
- L'estimation $\hat{c} = 0.7064$ est-elle significativement inférieure à 1 ?

7. Utilisation du modèle à des fins de prévision ou de contrôle

On suppose que les tests précédents **n'ont pas rejeté** la théorie keynésienne. L'expression (3) peut être utilisée pour prédire les valeurs futures de la consommation C sur la base des valeurs futures du revenu disponible R.

Exemple :

On suppose que l'on veuille prédire la dépense de consommation moyenne en 1997, le PIB étant de 7269.8 milliards de dollars. Il suffit de remplacer R par 7269.8 dans l'expression (3), on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{C}_{1997} &= -184.08 + 0.7064 \times 7269.8 \\ &= 4951.31 \text{ milliards de dollars}\end{aligned}$$

Notion de régression

L'objet principal de l'économétrie est l'**analyse de régression** :

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_k \mathbf{x}_k + \varepsilon$$

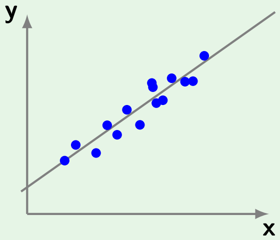
- $\mathbf{y}$: la **régressande** (ou encore **variable dépendante**, **expliquée** ou **endogène**)
- $\mathbf{x}$: les **régresseurs** (ou encore **variables indépendantes**, **explicatives** ou **exogènes**)
- β : les **paramètres** du modèle de régression
- ε : le **terme d'erreurs** (ou encore **innovations**, **perturbations** ou **chocs**)

Le modèle de consommation keynésien est **un modèle de régression linéaire simple** :

$$C = C_0 + cY + \varepsilon$$

Toute la question est de savoir...

- ... comment estimer les paramètres β ? et comment les interpréter ?
- ... comment tester la significativité (individuelle et jointe) des régresseurs $\mathbf{x}$?
- ... comment évaluer la qualité d'estimation du modèle ? et comment l'améliorer ?
- ... comment choisir entre des modèles concurrents ? et comment les utiliser ?



$$\mathbf{y} = a + b\mathbf{x} + \varepsilon$$

Références bibliographiques

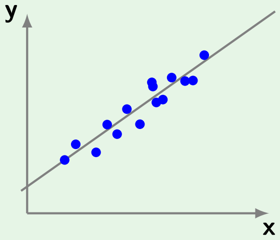
- Bazen, S. et Sabatier M. (2007). Économétrie : des fondements à la modélisation. Vuibert.
- Davidson, R. and MacKinnon, J.G. (2021). Foundations of Econometrics.
- Gujarati, D.N. (2004). Basic Econometrics. Fourth edition. The McGraw-Hill Companies ;
- Gujarati, D.N. (2004). Student Solutions Manual for Use with Basic Econometrics (Fourth edition). McGraw-Hill higher education ;
- Gujarati, D.N. and Bernier, B. (2004). Économétrie. Ouvertures économiques. De Boeck Supérieur ;
- Wooldridge, J. (2024). Introductory Econometrics : A Modern Approach. (n.p.): Cengage South-Western.

Plan du cours

Sommaire

Chapitre 1

La régression linéaire simple



$$\mathbf{y} = a + b\mathbf{x} + \varepsilon \Longrightarrow \hat{\mathbf{y}} = \hat{a} + \hat{b}\mathbf{x}$$

$$\hat{a} = \overline{\mathbf{y}} - \hat{b}\overline{\mathbf{x}} \qquad \hat{b} = \frac{cov(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$$

La régression linéaire simple

Régression linéaire simple :

$$\mathbf{y} = a + b\mathbf{x} + \varepsilon$$

Régression linéaire simple pour l'observation i :

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \cdots, n$$

Erreurs :

$$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i \ , \ i = 1, 2, \cdots, n$$

Carrés des erreurs :

$$\varepsilon_i^2 = \left(y_i - a - bx_i\right)^2 \ , \ i = 1, 2, \cdots, n$$

La régression linéaire simple

Somme des carrés des erreurs :

$$f(a,b) \equiv \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)^2$$

Estimateurs des moindres carrés ordinaires :

$$\hat{a} = \text{arg } \min_{a} f(a,b)$$

$$\hat{b} = \text{arg } \min_{b} f(a,b)$$

La régression linéaire simple

Minimisation de la somme des carrés des erreurs $f(a,b)$ par rapport au paramètre a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a}\left(y_i - a - bx_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-2)\left(y_i - a - bx_i\right) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right)
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{a} - bx_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{a} - \sum_{i=1}^{n} bx_i = 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{a} - \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\bar{\mathbf{y}} - \hat{a} - b\bar{\mathbf{x}} = 0 \Longleftrightarrow \hat{a} = \bar{\mathbf{y}} - b\bar{\mathbf{x}}$$

La régression linéaire simple

Minimisation de la somme des carrés des erreurs $f(a,b)$ par rapport au paramètre b :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}\left[(y_i-\overline{\mathbf{y}}) - b(x_i-\overline{\mathbf{x}})\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} -2(x_i-\overline{\mathbf{x}})\left[(y_i-\overline{\mathbf{y}}) - b(x_i-\overline{\mathbf{x}})\right]
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}\right|_{b=\hat{b}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mathbf{x}})\left[(y_i-\overline{\mathbf{y}}) - \hat{b}(x_i-\overline{\mathbf{x}})\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mathbf{x}})(y_i-\overline{\mathbf{y}}) - \sum_{i=1}^{n}\hat{b}(x_i-\overline{\mathbf{x}})^2 = 0$$

$$\hat{b} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mathbf{x}})(y_i-\overline{\mathbf{y}})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mathbf{x}})^2} \iff \hat{b} = \frac{cov(\mathbf{x},\mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$$

La régression linéaire simple

Théorème :

Les estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires des paramètres a et b d'une régression linéaire simple $\mathbf{y} = a + b\mathbf{x} + \varepsilon$ sont respectivement donnés par :

$$\hat{a} = \overline{\mathbf{y}} - b\overline{\mathbf{x}} \qquad \hat{b} = \frac{cov(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$$

Remarque :

Les estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires des paramètres β_i , $i = 0, 1, \cdots, k$ d'une régression linéaire multiple $\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1\mathbf{x}_1 + \beta_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_k\mathbf{x}_k + \varepsilon$ peuvent également être obtenus de la même manière que précédemment, mais les calculs seront longs et fastidieux. Dans ce cas, on passe à une écriture matricielle de la régression linéaire multiple pour tirer avantage des simplicités des calculs offertes par l'algèbre linéaire.

La régression linéaire simple

Application : Consommation (C) et PIB (R) aux USA entre 1982 et 1996 en milliards de dollars

C	R
3081.5	4620.3
3240.6	4803.7
3407.6	5140.1
3566.5	5323.5
3708.7	5487.7
3822.3	5649.5
...	...
4105.8	6079.4
4219.8	6244.4
4343.6	6389.6
4486.0	6610.7
4595.3	6742.1
4714.1	6928.4

$$\overline{C} = \frac{3081.5 + 3240.6 + \cdots + 4714.1}{15} = 3964.087$$

$$\overline{R} = \frac{4620.3 + 4803.7 + \cdots + 6928.4}{15} = 5872.193$$

$$V(C) = \frac{3081.5^2 + 3240.6^2 + \cdots + 4714.1^2}{15} - (3964.087)^2 = 223783.728$$

$$V(R) = \frac{4620.3^2 + 4803.7^2 + \cdots + 6928.4^2}{15} - (5872.193)^2 = 447738.633$$

$$\overline{C.R} = \frac{3081.5 \times 4620.3 + \cdots + 4714.1 \times 6928.4}{15} = 23594169.473$$

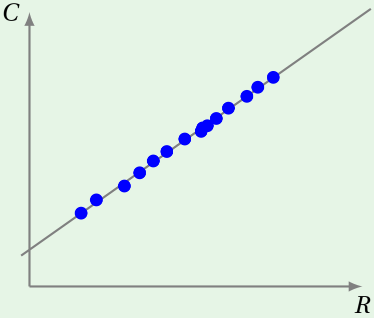
$$cov(C,R) = 23594169.473 - 3964.087 \times 5872.193 = 316286.176$$

$$\rho(C,R) = \frac{316286,176}{\sqrt{223783.728}\sqrt{447738.633}} = 0.999$$

La régression linéaire simple

Application : Consommation (C) et PIB (R) aux USA entre 1982 et 1996 en milliards de dollars

Estimation des paramètres du modèle de consommation keynésien $C = C_0 + c.R + \varepsilon$:



$$\hat{C} = -184.08 + 0.7064R$$

- Propension marginale à consommer c :

$$\hat{c} = \frac{cov(C,R)}{V(R)} = \frac{316286.176}{447738.633} = 0.7064$$

- Consommation incompressible C_0 :

$$\hat{C}_0 = \overline{C} - \hat{c}.\overline{R} = 3964.087 - 0.7064 \times 5872.193 = -184.08$$

Sommaire

Chapitre 2 :

La régression linéaire multiple

1. Rappels de calcul matriciel
2. La méthode des moindres carrés ordinaires

Sous-section 1 :

Régression linéaire multiple

La régression linéaire multiple

Régression linéaire multiple :

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_k \mathbf{x}_k + \varepsilon$$

Régression linéaire multiple pour chaque observation i , $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \cdots + \beta_k x_{k1} + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_k x_{k2} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \\
&\vdots \\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + \cdots + \beta_k x_{kn} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

Sous-section 2 :

Écriture matricielle de la régression linéaire multiple

La régression linéaire multiple

Écriture matricielle de la régression linéaire multiple :

$$y = X\beta + \varepsilon$$

avec :

$$\underset{n\times 1}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underset{n\times(k+1)}{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1i} & x_{2i} & \cdots & x_{ki} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \quad \underset{(k+1)\times 1}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad \underset{n\times 1}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Erreurs :

$$\varepsilon = y - X\beta$$

Sous-section 3 :

Estimateurs des moindres carrés ordinaires

La régression linéaire multiple

Somme des carrés des erreurs :

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon^\top \varepsilon = (y - X\beta)^\top (y - X\beta)$$

Estimateurs des moindres carrés ordinaires :

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} (y - X\beta)^\top (y - X\beta)$$

La régression linéaire multiple

Rappels :

- Dérivée du produit scalaire des vecteurs $\mathbf{u(x)}$ et $\mathbf{v(x)}$ par rapport au vecteur $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\top \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}.\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}.\mathbf{u}$$

- Dérivée du produit matriciel de la matrice $\mathbf{A}$ et du vecteur $\mathbf{x}$ par rapport au vecteur $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top$$

La régression linéaire multiple

Minimisation de la somme des carrés des erreurs $(y - X\beta)^\top(y - X\beta)$ par rapport à β :

$$\frac{\partial \varepsilon^\top \varepsilon}{\partial \beta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta}\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta}\varepsilon = 2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta}\varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} = \frac{\partial (y - X\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial X\beta}{\partial \beta} = \mathbf{0} - X^\top$$

$$\frac{\partial \varepsilon^\top \varepsilon}{\partial \beta} = -2X^\top(y - X\beta)$$

$$\left.\frac{\partial \varepsilon^\top \varepsilon}{\partial \beta}\right|_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \Longleftrightarrow X^\top(y - X\hat{\beta}) = 0 \Longleftrightarrow X^\top y = X^\top X\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1}X^\top y$$

La régression linéaire multiple

Théorème :

L'estimateur par la méthode des moindres carrés ordinaires des paramètres $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k)^\top$ d'une régression linéaire multiple $\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_k \mathbf{x}_k + \varepsilon$ est donné par :

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$$

Remarque :

Les estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires des paramètres a et b d'une régression linéaire simple $\mathbf{y} = a + b\mathbf{x} + \varepsilon$ peuvent également être obtenus de la même manière que précédemment à partir de l'écriture matricielle $y = X\beta + \varepsilon$ de la régression linéaire simple.

Sous-section 4 :

Cas particulier : Estimateurs des paramètres d'une régression linéaire simple

Cas particulier : Estimateurs des paramètres d'une régression linéaire simple

Les estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires des paramètres a et b d'une régression linéaire simple $\mathbf{y} = a + b\mathbf{x} + \varepsilon$ peuvent également être obtenus de la même manière que précédemment à partir de l'écriture matricielle $y = X\beta + \varepsilon$ de la régression linéaire simple, avec :

$$\underset{n\times 1}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underset{n\times 2}{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_i \\ \vdots & \ddots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad \underset{2\times 1}{\beta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \underset{n\times 1}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y = \begin{pmatrix} \overline{y} - \hat{b}\overline{x} \\ \frac{cov(x,y)}{v(x)} \end{pmatrix}$$

La régression linéaire multiple

Application 1 : Consommation (C) et PIB (R) aux USA entre 1940 et 1950 en milliards de dollars

R	C
241	226
280	240
319	235
331	245
345	255
340	265
332	295
320	300
339	305
338	315
371	325

Modèle de consommation keynésien **sans** prise en compte de l'impact de la deuxième guerre mondiale (une régression linéaire simple):

$$C = \beta_0 + \beta_1 . R + \varepsilon = X\beta + \varepsilon$$

La régression linéaire multiple

Estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires selon l'approche statistique

R	C
241	226
280	240
319	235
331	245
345	255
340	265
332	295
320	300
339	305
338	315
371	325

$$\overline{R} = \frac{241+280+\cdots+371}{11} = 323.273$$

$$\overline{C} = \frac{226+240+\cdots+325}{11} = 273.273$$

$$V(R) = \frac{241^2+280^2+\cdots+371^2}{11} - (273.273)^2 = 1118.198347$$

$$V(C) = \frac{226^2+240^2+\cdots+325^2}{11} - (323.273)^2 = 1147.107438$$

$$\overline{C.R} = \frac{226\times 241+\cdots+325\times 371}{11} = 89107.364$$

$$cov(C,R) = 89107.364 - 273.273\times 323.273 = 765.744$$

$$\rho(C,R) = \frac{765.744}{\sqrt{1147.107438}\sqrt{1118.198347}} = 0.676$$

La régression linéaire multiple

Estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires selon l'approche statistique

R	C
241	226
280	240
319	235
331	245
345	255
340	265
332	295
320	300
339	305
338	315
371	325

$$\hat{\beta}_0 = \overline{C} - \hat{\beta}_1 \times \overline{R} = 273.273 - 0.6848 \times 323.273 = 51.8951$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{cov(C,R)}{V(R)} = \frac{765.744}{1118.198347} = 0.6848$$

La régression linéaire multiple

Estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires selon l'approche algébrique

$$\underset{11\times1}{C} = \begin{pmatrix} 226 \\ 240 \\ 235 \\ 245 \\ 255 \\ 265 \\ 295 \\ 300 \\ 305 \\ 315 \\ 325 \end{pmatrix} \quad \underset{11\times2}{X} = \begin{pmatrix} 1 & 241 \\ 1 & 280 \\ 1 & 319 \\ 1 & 331 \\ 1 & 345 \\ 1 & 340 \\ 1 & 332 \\ 1 & 320 \\ 1 & 339 \\ 1 & 338 \\ 1 & 371 \end{pmatrix} \quad \underset{2\times1}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad \underset{11\times1}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top C = \begin{pmatrix} 51.8951 \\ 0.6848 \end{pmatrix}$$

La régression linéaire multiple

Application 2 : Consommation (C) et PIB (R) aux USA entre 1940 et 1950 en milliards de dollars

R	C	G
241	226	0
280	240	0
319	235	1
331	245	1
345	255	1
340	265	1
332	295	0
320	300	0
339	305	0
338	315	0
371	325	0

Modèle de consommation keynésien **avec** prise en compte de l'impact de la deuxième guerre mondiale (une régression linéaire multiple):

$$C = \beta_0 + \beta_1.R + \beta_2.G + \varepsilon = X\beta + \varepsilon$$

La régression linéaire multiple

Estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires selon l'approche algébrique

$$\underset{11\times 1}{C} = \begin{pmatrix} 226 \\ 240 \\ 235 \\ 245 \\ 255 \\ 265 \\ 295 \\ 300 \\ 305 \\ 315 \\ 325 \end{pmatrix} \quad \underset{11\times 3}{X} = \begin{pmatrix} 1 & 241 & 0 \\ 1 & 280 & 0 \\ 1 & 319 & 1 \\ 1 & 331 & 1 \\ 1 & 345 & 1 \\ 1 & 340 & 1 \\ 1 & 332 & 0 \\ 1 & 320 & 0 \\ 1 & 339 & 0 \\ 1 & 338 & 0 \\ 1 & 371 & 0 \end{pmatrix} \quad \underset{3\times 1}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad \underset{11\times 1}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top C = \begin{pmatrix} 14.4954 \\ 0.8575 \\ -50.6897 \end{pmatrix}$$

Sommaire

Chapitre 3 :

La géométrie des moindres carrés ordinaires

1. La géométrie du calcul matriciel
2. La géométrie des moindres carrés ordinaires

La géométrie des moindres carrés ordinaires

Davidson et MacKinnon (2021), *Foundations of Econometrics, p. 52*

> *"Une fois que l'on a une compréhension approfondie de la géométrie impliquée dans les moindres carrés ordinaires, on peut souvent s'épargner de nombreuses lignes d'algèbre fastidieuses par un simple argument géométrique."*

Sommaire