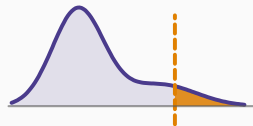


Value at Risk

Chapitre 5 : La VaR des portefeuilles d'options



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

VaR statique et VaR dynamique pour les options

Approximations analytiques

VaR historique pour les options

Portefeuilles d'options sur plusieurs sous-jacents

VaR Monte Carlo pour les options

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Les trois chapitres précédents ont posé les méthodes de calcul de la VaR (normale, historique, Monte Carlo) pour des portefeuilles essentiellement **linéaires**. Les options sont fondamentalement différentes : leur valeur est une fonction **non linéaire** des facteurs de risque sous-jacents (prix, volatilité, temps). Cette non-linéarité — le **gamma** — invalide plusieurs résultats acquis jusqu'ici, à commencer par la règle de la racine du temps. Ce chapitre montre pourquoi, et comment adapter chacune des trois méthodes.

VaR statique et VaR dynamique pour les options

Le gamma brise la mise à l'échelle

Rappel : effets delta, gamma, vega, thêta

Le P&L (non actualisé) d'une position optionnelle sur un horizon court s'approxime par un développement de Taylor :

$$\Delta f \approx \delta \Delta S + \frac{1}{2} \gamma (\Delta S)^2 + \nu \Delta \sigma + \theta \Delta t,$$

où δ (delta), γ (gamma), ν (vega) et θ (thêta) sont les sensibilités de la position au prix du sous-jacent, à sa convexité, à la volatilité implicite et au temps. Le **gamma positif** (positions longues) réduit la VaR par rapport à une approximation purement linéaire (delta seul); le **gamma négatif** (positions courtes) l'augmente.

Pourquoi la racine du temps échoue

Pour un portefeuille **statique** (non rééquilibré), la VaR correcte à h jours doit être estimée directement à partir de la distribution du P&L sur h jours — car le terme en $(\Delta S)^2$ ne se met **pas** à l'échelle en $\sqrt{h}$ comme le terme linéaire $\delta \Delta S$. Mettre à l'échelle une VaR à 1 jour par $\sqrt{h}$ (comme on le ferait pour un portefeuille linéaire) revient à ignorer entièrement l'effet gamma sur l'horizon complet, et à sous-estimer (position longue) ou sur-estimer (position courte) fortement la VaR statique.

Approximations analytiques

VaR delta-normale (delta-normal VaR)

L'approximation la plus simple ignore le gamma et traite l'option comme une position linéaire de sensibilité δ au sous-jacent : sous hypothèse de normalité des rendements du sous-jacent, la VaR delta-normale est

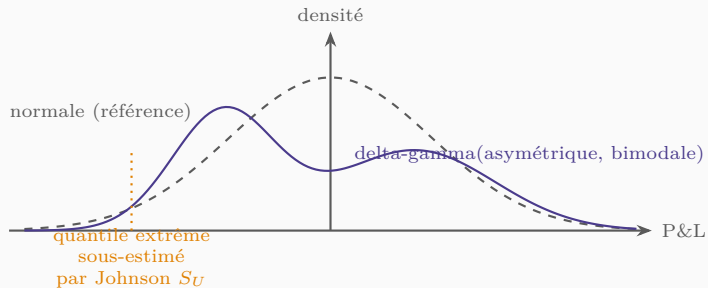
$$\text{VaR}_\delta = |\delta| S \sigma z_\alpha \sqrt{h}.$$

C'est un cas particulier direct de la VaR linéaire normale du chapitre 1, appliquée à la sensibilité delta. Elle est rapide à calculer mais très imprécise dès que le gamma ou le vega de la position sont significatifs — c'est-à-dire pour la plupart des positions optionnelles réelles.

Non-normalité du P&L delta-gamma

Dès que l'on inclut le terme en gamma, le P&L approché $\delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma(\Delta S)^2$ n'est **plus normal**, même si ΔS l'est : c'est une forme quadratique de variable normale, dont la distribution est typiquement **asymétrique** et **bimodale** pour certaines combinaisons de delta et de gamma. Les moments (variance, asymétrie, aplatissement) de cette distribution peuvent se calculer analytiquement à partir de δ , γ et de la matrice de covariance des facteurs de risque, sans simulation.

VaR delta-gamma (suite)



Ajustement d'une distribution de Johnson S_U

Connaissant les quatre premiers moments de la distribution delta-gamma, on peut leur ajuster une distribution de Johnson S_U (comme au chapitre 3 pour les quantiles extrêmes) et en déduire un quantile approché — donc une VaR — sans recourir à la simulation. Cette approche analytique est rapide, mais elle **capture mal la queue** de la vraie distribution du P&L : la comparaison avec la VaR Monte Carlo (voir plus loin) montre systématiquement que l'approximation de Johnson sous-estime l'ampleur de l'effet gamma aux quantiles extrêmes.

VaR historique pour les options

Comparer VaR statique et VaR dynamique en pratique

Exemple : call et put sur le S&P 500

Pour une position non couverte sur un call ou un put européen à 30 jours sur le S&P 500 (indice à 1400, volatilité 20 %), la VaR historique à 1 % sur 10 jours diffère fortement selon l'hypothèse de rééquilibrage : pour une position **longue** sur le put, la VaR dynamique (mise à l'échelle depuis la VaR à 1 jour) est d'environ 10 500 \$, contre seulement 7 100 \$ pour la VaR statique (estimée directement sur des rendements chevauchants à 10 jours) — l'effet gamma, favorable à une position longue, réduit fortement la VaR statique par rapport à la VaR dynamique qui le sous-estime. Pour une position **courte** sur le même put, c'est l'inverse : la VaR statique (environ 19 500 \$) dépasse la VaR dynamique (16 700 \$), le gamma négatif d'une position courte étant, lui, correctement amplifié seulement dans le calcul statique.

L'effet vega complique le tableau

Au-delà du gamma, l'effet vega dépend du signe de la corrélation prix-volatilité. Sur les indices actions, cette corrélation est négative (la volatilité monte quand les prix baissent) : cela **augmente** la VaR d'une position courte sur un put (et, plus généralement, de toute position à delta positif et vega négatif), et la règle de la racine du temps, en ignorant l'asymétrie de cette relation à haute fréquence, a tendance à **surestimer** l'effet vega des options sur indices actions.

Exemple : put couvert en delta

Pour un put vendu sur futures S&P 500, la VaR à 1 % à 1 jour de la position **non couverte** peut atteindre plusieurs milliers de dollars (par exemple 6 500 \$ pour une position type), alors qu'une couverture en delta seule la réduit fortement (par exemple à moins de 2 000 \$) — mais ne l'annule pas, car le gamma et le vega de l'option restent non couverts. Une couverture simultanée delta-gamma-vega (en ajoutant d'autres options sur le même sous-jacent) réduit encore la VaR résiduelle, sans toutefois l'annuler complètement : même un portefeuille rééquilibré quotidiennement pour maintenir delta, gamma et vega nuls conserve une VaR non nulle, car les mouvements de marché entre deux rééquilibrages ne sont jamais infinitésimaux.

VaR historique multi-pas pour options exotiques

Pour une option dont le prix dépend de la **trajectoire** du sous-jacent (par exemple une option *look-back*, dont le prix dépend du minimum atteint par le sous-jacent), le calcul de la VaR exige une **simulation historique multi-pas** : on utilise des séquences de h rendements historiques consécutifs (préservant l'autocorrélation et le *clustering* de volatilité tels qu'observés historiquement) plutôt qu'un unique rendement sur h jours. C'est un avantage propre à la méthode historique — la méthode Monte Carlo doit, elle, explicitement modéliser cette dépendance temporelle (chapitre 4) pour obtenir le même résultat.

Portefeuilles d'options sur plusieurs sous-jacents

VaR d'un portefeuille d'options internationales

Pour un portefeuille d'options sur plusieurs indices (par exemple FTSE 100, S&P 500, DAX 30), chaque sous-portefeuille se résume par ses sensibilités delta, gamma et vega **en valeur** (converties dans une devise commune), et la VaR du portefeuille global combine ces sensibilités avec la matrice de covariance des rendements de prix et de volatilité de chaque indice — exactement le même principe multivarié que pour un portefeuille d'actions multi-facteurs, appliqué cette fois aux trois Grecs plutôt qu'au seul delta.

Exemple : portefeuille international

Pour un portefeuille d'options sur trois indices, la VaR à 1 % à 1 jour calculée en delta seul peut sous-estimer très largement le risque réel : ajouter le gamma (souvent négatif net pour un book d'options vendues) peut faire plus que doubler la VaR, et ajouter le vega modifie encore le résultat selon le signe net du vega et la corrélation prix-volatilité de chaque marché — qui peut différer d'un indice à l'autre.

VaR Monte Carlo pour les options

Avantage de Monte Carlo pour les options

La VaR Monte Carlo réévalue directement l'option (ou l'approxime par un mapping delta-gamma-vega) sur chaque scénario simulé des facteurs de risque, pour un portefeuille statique **ou** dynamique, sans les limites d'échantillon de la méthode historique. C'est la seule méthode qui permette d'estimer proprement la VaR **statique** d'un portefeuille d'options sur un horizon long, sans recourir à des données chevauchantes ni à une mise à l'échelle erronée par la racine du temps.

Mais un risque de modèle spécifique

En contrepartie, la VaR Monte Carlo pour options hérite de tous les choix de modélisation du chapitre 4 (normalité ou non, *clustering* de volatilité, dépendance prix-volatilité) — mal spécifier l'un de ces éléments biaise directement la VaR de l'option, en particulier via l'effet vega et le gamma, qui sont précisément les canaux par lesquels ces choix de modèle affectent le plus la VaR.

Étude de cas : book de trading d'options sur pétrole

Pour un book d'options sur futures de pétrole brut, rééquilibré quotidiennement à delta-gamma-vega nul sur chaque maturité, la VaR Monte Carlo dynamique révèle un risque résiduel significatif malgré la neutralité apparente du portefeuille : les mouvements **non parallèles** de la courbe des futures et de la structure par terme des volatilités (que l'ACP du chapitre 4 permet précisément de quantifier, via une deuxième composante de « pente ») ne sont pas couverts par une neutralité aux Grecs nets, qui ne protège que contre les mouvements parallèles.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- La non-linéarité (gamma) des options invalide la règle de la racine du temps pour une VaR **statique** : il faut alors simuler ou observer directement les rendements sur l'horizon h complet.
- La VaR **delta-normale** ignore le gamma et le vega ; la VaR **delta-gamma** (via Johnson S_U) les intègre analytiquement mais capture mal la queue de distribution.
- La VaR **historique** pour options distingue nettement VaR statique (gamma pleinement reflété, mais tronqué par le chevauchement) et VaR dynamique (gamma sous-estimé par construction).
- Les options à trajectoire dépendante et les portefeuilles multi-sous-jacents exigent un mapping delta-gamma-vega multivarié, ou une simulation historique/Monte Carlo multi-pas.
- La VaR **Monte Carlo** est la méthode la plus flexible pour les options — statique ou dynamique — mais son exactitude dépend entièrement de la qualité du modèle des facteurs de risque sous-jacent (chapitre 4).
- Un portefeuille neutre en delta, gamma et vega **nets** n'est couvert que contre les mouvements parallèles des facteurs de risque ; les mouvements non parallèles (changements de pente, de convexité) peuvent laisser subsister une VaR non négligeable.