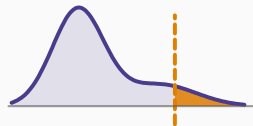


Value at Risk

Chapitre 4 : La VaR Monte Carlo



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Principe de la VaR Monte Carlo

Génération de nombres aléatoires

Simulation multivariée

Modélisation du clustering de volatilité

Modèles multivariés des facteurs de risque

Modèles comportementaux non linéaires

Études de cas

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre?

La simulation historique (chapitre 3) est prisonnière de la taille de l'échantillon disponible : on ne peut jamais simuler plus de scénarios que l'historique n'en contient. La méthode Monte Carlo lève cette contrainte en **simulant** un nombre arbitrairement grand de scénarios futurs à partir d'un modèle statistique des facteurs de risque, au prix d'un risque de modèle différent : celui de mal spécifier la distribution simulée.

Principe de la VaR Monte Carlo

VaR Monte Carlo : étapes clés

Le calcul de la VaR Monte Carlo suit un schéma en six étapes : (1) spécifier la matrice de covariance (ou, plus généralement, le modèle multivarié) des rendements des facteurs de risque sur l'horizon h ; (2) simuler un grand nombre N de tirages indépendants d'une loi standard; (3) les transformer en tirages **corrélés** via la matrice de Cholesky, avec l'espérance de rendement ciblée; (4) appliquer ces rendements simulés aux valeurs actuelles des facteurs de risque; (5) réévaluer le portefeuille sur chacun des N scénarios, pour obtenir une distribution simulée du P&L actualisé; (6) lire la VaR (et l'ETL) comme le quantile (moyenne des pertes au-delà du quantile) de cette distribution simulée.



VaR Monte Carlo vs VaR historique

La VaR Monte Carlo ne requiert **aucun historique de scénarios réels** — seulement une estimation de la matrice de covariance (ou du modèle multivarié), qui peut elle-même provenir de données historiques courtes, d'anticipations de marché (volatilités implicites), ou de scénarios de stress. C'est un avantage majeur pour les positions récentes ou les produits peu liquides, dépourvus d'historique suffisant.

Génération de nombres aléatoires

Générateurs congruentiels linéaires

La plupart des logiciels génèrent des nombres pseudo-aléatoires uniformes via des générateurs congruentiels linéaires (LCG) : $x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m$, une suite déterministe mais dont les propriétés statistiques imitent celles de tirages uniformes indépendants, à condition de choisir soigneusement a , c et m (période suffisamment longue, absence de motifs cycliques détectables). Les suites à **faible discrédance** (quasi-Monte Carlo, par exemple les suites de Sobol) remplacent l'aléa pur par un maillage déterministe de l'espace des probabilités, ce qui accélère la convergence pour un nombre modéré de dimensions.

Échantillonnage antithétique et stratifié

Deux techniques classiques réduisent l'erreur de simulation à nombre de tirages donné :

- l'**échantillonnage antithétique** associe à chaque tirage z son opposé $-z$, ce qui élimine exactement l'erreur d'échantillonnage sur les moments impairs (moyenne) sans coût supplémentaire;
- l'**échantillonnage stratifié** force les tirages à couvrir uniformément les strates de probabilité (par exemple, un tirage par centile), garantissant que les quantiles extrêmes sont bien représentés même avec peu de simulations.

Exemple

Avec seulement $N = 1000$ simulations non stratifiées, il n'est pas garanti qu'une seule observation tombe dans le centile de queue le plus extrême (1 chance sur 1000 par tirage) : le quantile à 0,1 % serait alors estimé sur zéro ou une seule observation. L'échantillonnage stratifié force explicitement au moins une observation dans chaque centile, rendant l'estimation du quantile extrême beaucoup plus stable à N donné.

Simulation multivariée

Simuler des facteurs de risque corrélés

Pour simuler un vecteur de rendements corrélés à partir de tirages indépendants, on combine deux outils : la **transformation par inverse de la fonction de répartition** (pour passer d'un tirage uniforme à un tirage suivant la loi marginale voulue — normale, Student, etc.), et la **décomposition de Cholesky** $\Omega = LL^T$ de la matrice de covariance cible Ω , qui transforme un vecteur de tirages indépendants standard $\mathbf{z}$ en un vecteur corrélé $L\mathbf{z}$ ayant exactement la covariance Ω .

Simulation en un pas vs en plusieurs pas

Pour un horizon h , on peut simuler directement des rendements sur h jours en un seul pas (avec la covariance à h jours), ou simuler h rendements journaliers successifs et les cumuler le long d'une trajectoire (**simulation multi-pas**). La seconde approche est indispensable dès que l'on veut incorporer une dynamique — *clustering* de volatilité, autocorrélation — qui ne se réduit pas à une simple covariance statique sur h jours.

Importance sampling

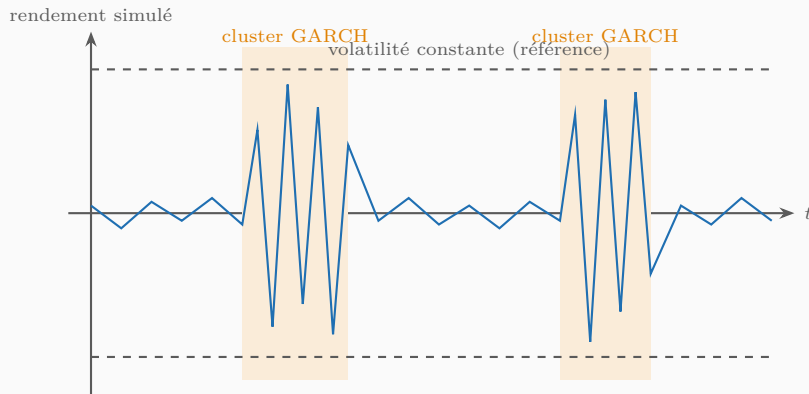
Lorsque l'on s'intéresse à un quantile très extrême (0,1 % ou moins), la grande majorité des simulations « gaspillent » du calcul dans la partie centrale de la distribution. L'**importance sampling** consiste à simuler préférentiellement dans la région d'intérêt (la queue), puis à repondérer chaque scénario par le rapport entre la vraie densité et la densité de simulation, ce qui réduit fortement la variance de l'estimateur du quantile extrême à nombre de simulations donné.

Modélisation du clustering de volatilité

Simuler une volatilité qui varie dans le temps

Une simulation Monte Carlo i.i.d. multivariée normale ignore le *clustering* de volatilité (périodes calmes et agitées qui s'enchaînent) documenté au chapitre sur les modèles GARCH (économétrie financière).

En simulation multi-pas, on peut faire évoluer la volatilité **le long de chaque trajectoire simulée** selon un processus EWMA ou GARCH asymétrique, ce qui capture le retour à la moyenne de la volatilité et l'effet de levier (chocs négatifs qui augmentent davantage la volatilité future que des chocs positifs de même ampleur).



Exemple comparatif

Sur un même portefeuille, la VaR Monte Carlo calculée sous hypothèse de volatilité **constante** est systématiquement plus faible que celle calculée avec un modèle GARCH : le modèle GARCH ajoute de l'incertitude sur la trajectoire de la volatilité elle-même, en plus de l'incertitude sur les rendements. L'écart entre les deux VaR s'accroît avec la taille d'un choc récent sur le marché — un choc important fait bondir la volatilité conditionnelle GARCH, et donc la VaR GARCH, bien plus que la VaR à volatilité constante.

Basculer entre régimes de volatilité

Pour la VaR à long horizon (plusieurs mois), un modèle GARCH à **changement de régime markovien** (*Markov-switching GARCH*) permet de représenter des bascules discrètes entre régimes de volatilité (calme / turbulent), plus réalistes qu'une seule dynamique GARCH continue sur un horizon long — la probabilité de transition vers un régime turbulent devenant elle-même une composante du risque simulé.

Modèles multivariés des facteurs de risque

Alternatives à la normale multivariée

Quatre familles de modèles multivariés sont couramment utilisées pour les facteurs de risque en Monte Carlo : la **loi normale multivariée** (simple mais sous-estime la probabilité des événements extrêmes conjoints); la **loi de Student multivariée** (même structure de corrélation, mais queues plus épaisses, contrôlées par le nombre de degrés de liberté); les **mélanges de lois normales** (*normal mixture*, utiles pour représenter des « scénarios de crise » distincts des conditions normales de marché); et les modèles à **copule**, qui séparent explicitement le choix des lois marginales de celui de la structure de dépendance entre facteurs.

Exemple : VaR sous mélange de normales

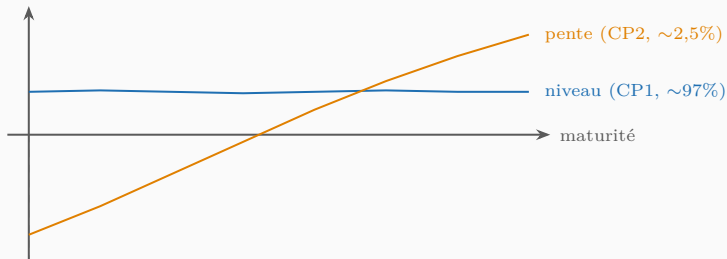
Un modèle à deux régimes — 95 % du temps en régime « calme » (faible volatilité, faible corrélation) et 5 % du temps en régime « crise » (volatilité et corrélations plus élevées) — donne, à VaR à 1 %, une estimation nettement supérieure à celle d'un modèle normal simple calibré sur la même volatilité moyenne : c'est le régime de crise, bien que rare, qui domine le quantile extrême recherché.

Analyse en composantes principales

Réduire la dimension des facteurs de risque

Lorsque de nombreux facteurs de risque sont fortement corrélés — typiquement une courbe des taux ou une structure par terme de contrats à terme — l'analyse en composantes principales (ACP, déjà vue en économétrie financière) permet de représenter l'essentiel de la variabilité conjointe par deux ou trois composantes orthogonales (niveau, pente, courbure), plutôt que par l'ensemble des points de la courbe. La simulation Monte Carlo ne porte alors que sur ces quelques composantes, avec un gain de temps de calcul considérable et une décomposition naturelle du risque en « tendance », « inclinaison » et « convexité ».

mouvement de la courbe



Modèles comportementaux non linéaires

Régression non linéaire entre facteurs de risque

Certaines relations entre facteurs de risque sont intrinsèquement non linéaires et asymétriques — par exemple, la relation entre le niveau d'un indice actions et son indice de volatilité implicite (effet dit *smirk*), souvent modélisée par une régression quadratique du type

$\Delta \ln(\text{Vol}) = a + b \Delta \ln(S) + c (\Delta \ln S)^2 + \varepsilon$. Intégrer cette relation dans la simulation (plutôt qu'une simple corrélation linéaire) améliore la représentation du risque de volatilité en cas de choc important sur le prix.

Études de cas

Trois cas illustratifs

Le chapitre se conclut par trois études de cas combinant les outils précédents : un portefeuille de flux de trésorerie multi-devises, dont la VaR combine copule et ACP pour gérer un grand nombre de facteurs de taux et de change corrélés; un portefeuille actions où un mélange de normales représente explicitement un « scénario de krach » distinct du régime normal; et un portefeuille de change dont la VaR Monte Carlo intègre un clustering GARCH de la volatilité et des corrélations, pertinent lors des périodes de tensions sur le marché des changes.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 4

- La VaR Monte Carlo simule un grand nombre de scénarios à partir d'un **modèle statistique** des facteurs de risque, sans être limitée par la taille d'un historique.
- La qualité de la simulation dépend de la génération de nombres aléatoires (réduction de variance : antithétique, stratifié, importance sampling) et du choix du modèle multivarié (normale, Student, mélange, copule).
- La simulation **multi-pas** permet d'incorporer le *clustering* de volatilité (EWMA, GARCH, y compris à changement de régime pour le long terme).
- L'ACP réduit la dimension des facteurs de risque fortement corrélés (courbes de taux, structures par terme) avec une perte de précision généralement faible.
- Le principal risque de modèle en Monte Carlo provient du choix — potentiellement erroné — du modèle statistique des facteurs de risque, et non de l'erreur de simulation elle-même (contrôlable par un plus grand nombre de tirages).

Vers le chapitre 5

Les chapitres 1, 3 et 4 ont posé les fondations pour des portefeuilles globalement **linéaires**. Le prochain chapitre applique ces trois méthodes — normale, historique, Monte Carlo — au cas nettement plus