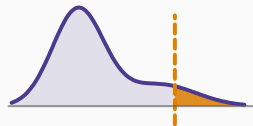


Value at Risk

Chapitre 2 : VaR linéaire paramétrique



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La VaR linéaire normale

VaR systématique et décomposition

Application par classe d'actifs

Au-delà de la loi normale

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Le chapitre 1 a défini la VaR comme un quantile de la distribution des profits et pertes. Ce chapitre en donne la forme la plus simple et la plus utilisée en pratique : la **VaR linéaire paramétrique**, qui suppose une distribution connue (d'abord normale) des rendements des facteurs de risque et une exposition **linéaire** du portefeuille à ces facteurs. C'est le socle analytique — une **formule fermée** — sur lequel se comparent toutes les méthodes ultérieures (simulation historique, Monte Carlo, options).

La VaR linéaire normale

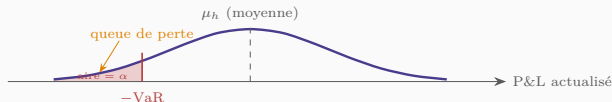
La formule fondamentale

VaR normale linéaire

Si le rendement du portefeuille sur l'horizon h est normal, d'espérance actualisée μ_h et d'écart-type σ_h , la VaR au seuil α , exprimée en pourcentage de la valeur du portefeuille, est

$$\text{VaR}_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sigma_h - \mu_h,$$

où Φ^{-1} est le quantile de la loi normale standard. Le premier terme mesure le risque, le second — l'**ajustement de dérive** — retranche le rendement attendu.



L'hypothèse simplificatrice courante

Sur des horizons courts, on suppose souvent que le portefeuille rapporte le taux sans risque, donc que l'espérance actualisée μ_h est **nulle**. La formule se réduit alors à $\text{VaR}_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sigma_h$: la VaR est simplement proportionnelle à la **volatilité**.

Mise à l'échelle dans le temps

La règle de la racine du temps

Sous l'hypothèse de rendements **i.i.d. normaux** (moyenne nulle), la VaR à h jours se déduit de la VaR à 1 jour par

$$\text{VaR}_{h,\alpha} = \sqrt{h} \text{VaR}_{1,\alpha}.$$

C'est pourquoi on ne calcule souvent que la VaR à 1 jour, la VaR réglementaire à 10 jours s'en déduisant par $\sqrt{10}$.

Correction pour autocorrélation

Si les rendements quotidiens sont **autocorrélés** (coefficient ρ), la règle $\sqrt{h}$ est fausse : la variance à h jours n'est plus $h\sigma^2$ mais comporte un terme correctif fonction de ρ et de h . Une autocorrélation **positive** gonfle la VaR de long terme, une autocorrélation **négative** la réduit.

Pourquoi pas de GARCH ici ?

Le modèle linéaire paramétrique exige de connaître la distribution du prix à h jours. C'est le cas sous l'hypothèse i.i.d. (même loi qu'en historique), mais **pas** sous un processus GARCH : la somme de h rendements non i.i.d. n'a pas de loi connue en forme fermée. Capturer le *clustering* de volatilité impose alors la **simulation Monte Carlo** (chapitre 4).

VaR systématique et décomposition

Du modèle factoriel à la VaR

VaR systématique

Quand le portefeuille est mappé à des facteurs de risque via un modèle linéaire $Y = \sum_i \theta_i X_i$ (sensibilités θ , facteurs X de loi normale multivariée de covariance Ω), la VaR systématique est

$$\text{VaR}_{\text{syst}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{\theta' \Omega_h \theta} - \theta' \mu_h.$$

Toute l'information tient dans le **vecteur de sensibilités** et la **matrice de covariance** des facteurs.

Trois façons de découper la VaR

La **VaR stand-alone** d'un groupe de facteurs (actions, taux, change...) est la VaR calculée comme si ce groupe était seul. La **VaR marginale** mesure la contribution de chaque facteur à la VaR totale (via le gradient), et ces contributions **somment exactement** à la VaR totale. La **VaR incrémentale** est la variation de VaR lorsqu'on ajoute ou retire une position.

Sous-additivité et diversification

Comme mesure fondée sur l'écart-type d'une loi normale, la VaR normale linéaire est **sous-additive** : la VaR d'un portefeuille est inférieure (ou égale) à la somme des VaR stand-alone de ses composantes.

L'écart mesure le **bénéfice de diversification**, d'autant plus grand que les facteurs sont peu (ou

Application par classe d'actifs

Portefeuilles sensibles aux taux

Un portefeuille obligataire est représenté par une séquence de flux mappés sur des maturités standard. Les sensibilités sont les **PV01** des flux; les facteurs, la courbe LIBOR et un ou plusieurs *spreads* de crédit. On disaggrège alors la VaR totale en **VaR LIBOR** et **VaR de spread de crédit**.

Portefeuilles d'actions

Pour un portefeuille d'actions, on décompose la VaR en part **systematique** (risque de marché via les bêtas) et part **spécifique** (risque idiosyncratique). Sur un portefeuille international, on isole en outre **VaR actions**, **VaR de change** et **VaR de taux**, chacune stand-alone puis agrégée.

Réduire la dimension par ACP

Quand les facteurs de taux sont nombreux (par ex. 60 maturités), l'**analyse en composantes principales** ramène le risque à 2-3 composantes (niveau, pente, courbure) qui expliquent l'essentiel de la variance — rendant le calcul et l'interprétation de la VaR bien plus maniables.

Au-delà de la loi normale

Autres formes paramétriques

VaR de Student et mélanges

Les rendements financiers ont des **queues épaisses** que la normale sous-estime. Trois modèles paramétriques gardent une solution analytique : la loi de **Student t** (queues plus épaisses), le **mélange de normales** et le **mélange de Student**. Ils relèvent la VaR aux seuils de confiance élevés, là où la normale est trop optimiste.

EWMA et RiskMetrics

La covariance des facteurs peut être estimée par **moyenne mobile à pondération exponentielle** (EWMA), qui donne plus de poids aux données récentes — c'est le cœur de la méthodologie **RiskMetrics** de JP Morgan. Elle réagit vite aux changements de régime, mais dépend fortement du choix de la constante de lissage.

De la VaR à l'ETL

Chaque modèle paramétrique admet aussi une formule analytique pour l'**Expected Tail Loss** (perte moyenne au-delà de la VaR), mesure cohérente qui complète la VaR. Pour une distribution fortement asymétrique et leptokurtique (par ex. l'indice de spread iTraxx), un **mélange** capture bien mieux le risque de queue qu'une normale.

Synthèse

Synthèse du chapitre

La **VaR linéaire paramétrique** fournit une **formule fermée** : $\text{VaR} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma_h - \mu_h$, mise à l'échelle par $\sqrt{h}$ sous l'hypothèse i.i.d. normale. Le passage aux **facteurs de risque** permet de décomposer la VaR (systématique/spécifique, stand-alone/marginale/incrémentale) et de mesurer la **diversification** via la sous-additivité. Quand la normale ne suffit pas, on recourt à **Student**, aux **mélanges** et à l'estimation **EWMA** — sans quitter le cadre analytique. Dès que l'exposition devient non linéaire (options) ou la volatilité non i.i.d. (GARCH), il faut passer aux méthodes de **simulation** des chapitres suivants.