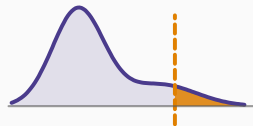


Value at Risk

Chapitre 1 : La Value at Risk et les autres mesures de risque



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Plan du chapitre

Prérequis

Avant de commencer

Les mesures de risque

Définition de la Value at Risk

Passage à l'échelle de la VaR

VaR pour les principales classes d'actifs

Décomposition de la VaR

Expected Tail Loss (ETL)

Mesures de risque cohérentes

Les trois familles de modèles de VaR

Plan du chapitre

Construire un modèle de VaR

Synthèse

Prérequis

Le cours qui précède

Calcul stochastique pour la finance, pour la modélisation en temps continu des facteurs de risque.

Les notions mobilisées

Le mouvement brownien géométrique et la loi lognormale. Les quantiles d'une distribution. Les faits stylisés des rentabilités, de l'économétrie financière.

Ce que ce cours ajoute

La Value at Risk n'est pas un modèle mais une **question de mesure** : quel montant ne sera pas dépassé, avec une probabilité donnée, sur un horizon donné.

Le cours confronte les trois façons d'y répondre — paramétrique, historique, Monte Carlo — et les met à l'épreuve du backtesting.

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Une banque, un gérant de fonds ou une trésorerie d'entreprise doivent répondre à une question simple mais redoutable : **combien peut-on perdre**, sur un horizon donné, avec un niveau de confiance donné ? La Value at Risk (VaR) est devenue, depuis les années 1990, la mesure de risque de marché de référence — imposée par les régulateurs (Bâle II/III) et utilisée en interne pour fixer des limites de trading, allouer du capital et évaluer la performance ajustée du risque. Ce chapitre pose les bases : ce qu'est la VaR, ce qu'elle n'est pas, et comment elle se compare aux autres mesures de risque.

Les mesures de risque

Écart-type comme mesure de risque

La mesure de dispersion la plus utilisée reste l'écart-type des rendements σ . Elle est simple, additive sous hypothèse de normalité, et au cœur de la théorie moderne du portefeuille (Markowitz). Mais elle pénalise **également** les hausses et les baisses : deux portefeuilles ayant le même σ peuvent avoir des profils de perte extrême radicalement différents si leurs distributions sont asymétriques.

Le problème de la symétrie

Un investisseur ne redoute pas les gains extrêmes — seulement les pertes. Les mesures de risque **de risque de baisse** (*downside risk*) ne considèrent que la partie défavorable de la distribution des rendements, ce qui est plus proche de la perception intuitive du risque.

Moments partiels inférieurs (LPM) et semi-variance

Lower partial moment d'ordre k

Pour un seuil de rendement τ (souvent $\tau = 0$ ou $\tau = \mathbb{E}[R]$), le moment partiel inférieur d'ordre k est

$$\text{LPM}_k(\tau) = \mathbb{E}[\max(\tau - R, 0)^k].$$

Le cas $k = 2$ et $\tau = \mathbb{E}[R]$ donne la **semi-variance**, qui ne mesure que la variabilité des rendements situés en dessous de leur moyenne. La racine carrée de la semi-variance est la **semi-déviation**, l'analogue "asymétrique" de l'écart-type.

Exemple

Sur dix rendements mensuels $\{-4\%, -2\%, -1\%, 0\%, 1\%, 1\%, 2\%, 3\%, 3\%, 5\%\}$, la moyenne est 0.8% . Seules les valeurs inférieures à 0.8% contribuent à la semi-variance :

$(-4\% - 0.8\%)^2, (-2\% - 0.8\%)^2, \dots$ Contrairement à la variance usuelle, les rendements de $1\%, 2\%, 3\%, 3\%, 5\%$ (au-dessus de la moyenne) ne comptent pas dans le risque : seule la queue gauche importe.

Risque de quantile

Une autre famille de mesures se fixe directement sur un **quantile** de la distribution des pertes plutôt

Définition de la Value at Risk

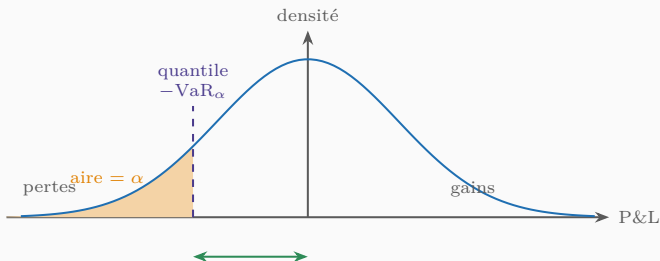
Définition mathématique

Value at Risk

Soit $P\&L_h$ la variation (perte ou gain) de la valeur d'un portefeuille sur un horizon de h jours. La VaR au seuil de confiance $100(1 - \alpha)\%$ (ou, de façon équivalente, au niveau de signification α) est le montant $VaR_{\alpha,h}$ tel que

$$\mathbb{P}(P\&L_h \leq -VaR_{\alpha,h}) = \alpha,$$

c'est-à-dire **moins le quantile de niveau α** de la distribution du P&L sur h jours. Trois paramètres doivent donc toujours être précisés : l'**horizon h** , le **niveau de confiance $1 - \alpha$** , et la **méthode** utilisée pour estimer la distribution du P&L.



VaR statique vs VaR dynamique

La **VaR statique** suppose que le portefeuille n'est pas retouché pendant l'horizon de risque : elle s'applique à une position que l'on détient sans rééquilibrage, par exemple un produit structuré. La **VaR dynamique** suppose au contraire que le portefeuille est rééquilibré (quotidiennement, en général) pour retrouver des sensibilités constantes aux facteurs de risque — pertinent pour évaluer le risque d'un trader qui gère activement son portefeuille dans les limites qui lui sont fixées. La distinction est cruciale : pour un portefeuille **linéaire**, les deux notions coïncident (à un facteur d'échelle près), mais pour un portefeuille **non linéaire** (options), elles peuvent diverger fortement, comme nous le verrons au chapitre sur les options.

Passage à l'échelle de la VaR

La règle de la racine du temps

Scaling sous rendements i.i.d.

Si les rendements quotidiens sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), la variance sur h jours est h fois la variance journalière, donc l'écart-type sur h jours est $\sqrt{h} \sigma_1$. Sous hypothèse de normalité et de rendement espéré nul, la VaR se met à l'échelle de la même façon :

$$\text{VaR}_{\alpha,h} = \sqrt{h} \text{VaR}_{\alpha,1}.$$

C'est la célèbre **règle de la racine du temps** (*square-root-of-time rule*), très commode mais qui repose sur des hypothèses fortes : absence d'autocorrélation, rendement espéré négligeable, et linéarité du portefeuille.

Corriger l'autocorrélation

En présence d'autocorrélation ρ dans les rendements, la variance sur h jours n'est plus exactement $h\sigma_1^2$: elle s'écrit

$$\text{Var}(R_h) = h\sigma_1^2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{h-1} \left(1 - \frac{k}{h} \right) \rho_k \right],$$

ce qui **major**e la VaR mise à l'échelle si l'autocorrélation est positive (persistance des rendements, rare)

VaR pour les principales classes d'actifs

VaR d'une position action mappée au marché

Pour une position action de valeur V dont le bêta au marché est β , on peut mapper le risque de l'action sur celui de l'indice de marché : la VaR (linéaire, normale) devient

$$\text{VaR} = |\beta| V \sigma_M z_\alpha \sqrt{h},$$

où σ_M est la volatilité de l'indice. Cette approche factorielle (déjà rencontrée en économétrie financière) permet d'agréger le risque de nombreuses actions à partir d'un seul facteur de risque commun, au prix d'ignorer le risque spécifique (idiosyncratique) non capturé par β .

PV01 et VaR obligataire

Pour une obligation ou un portefeuille de taux, la sensibilité clé est le **PV01** (*price value of a basis point*) : la variation de valeur pour un mouvement de 1 point de base du taux. La VaR de taux s'obtient alors en multipliant le PV01 par la volatilité du taux (en points de base) et le quantile choisi :

$$\text{VaR} = \text{PV01} \times \sigma_{\Delta y} \text{ (en pb)} \times z_{\alpha} \sqrt{h}.$$

Pour un portefeuille exposé à plusieurs points de la courbe des taux, le PV01 devient un **vecteur** de sensibilités, et la VaR combine ce vecteur avec la matrice de covariance des mouvements de taux à différentes maturités — exactement comme pour un portefeuille multi-actifs.

Application : desk de trésorerie

Un desk de trésorerie détient un portefeuille obligataire avec un PV01 total de 50 000 € (perte de 50 000 € si tous les taux montent d'un point de base). Si la volatilité quotidienne des taux est de 6 points de base, la VaR à 1 jour et 99 % est $50\,000 \times 6 \times 2.33 \approx 699\,000$ €. Sur 10 jours, en appliquant la racine du temps, elle passe à environ **2.21** millions d'euros.

Décomposition de la VaR

Décomposition systématique / spécifique

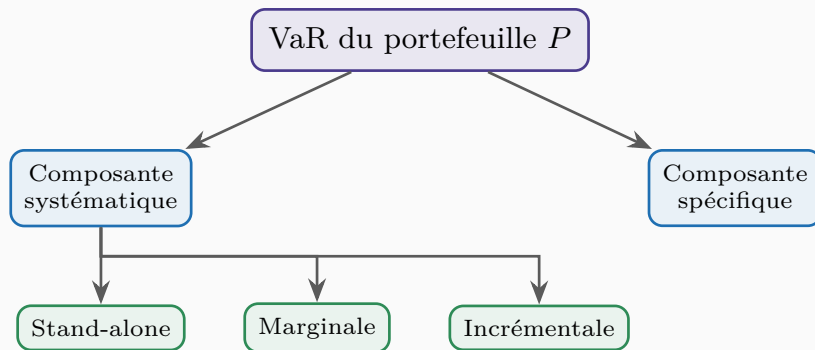
Comme pour la variance d'un portefeuille factoriel, la VaR totale peut se décomposer entre une composante **systématique** (liée aux facteurs de risque communs) et une composante **spécifique** (idiosyncratique, propre à chaque position). Sous hypothèse de normalité et pour un portefeuille de nombreuses positions, le risque spécifique tend à se diversifier, si bien que la composante systématique domine largement la VaR d'un grand portefeuille diversifié.

Trois notions de contribution au risque

Pour une position i au sein d'un portefeuille P :

- la VaR **stand-alone** est la VaR de la position i isolée, sans tenir compte des autres positions ;
- la VaR **marginale** mesure la sensibilité de la VaR du portefeuille à une variation infinitésimale de la taille de la position i , $\partial \text{VaR}_P / \partial w_i$;
- la VaR **incrémentale** est la différence entre la VaR du portefeuille avec et sans la position i , $\text{VaR}_P - \text{VaR}_{P \setminus i}$.

Ces trois notions coïncident rarement : la VaR stand-alone ignore la diversification, tandis que la VaR marginale et la VaR incrémentale en tiennent compte, mais à des échelles différentes (une variation infinitésimale contre un retrait complet de la position).



Application : allocation de capital

Une banque alloue son capital réglementaire aux différents desks de trading en fonction de leur contribution **marginale** au risque global — et non de leur VaR stand-alone — précisément parce que la diversification entre desks réduit le risque total. Un desk peut avoir une VaR stand-alone élevée mais une contribution marginale faible s'il est peu corrélé avec le reste du portefeuille de la banque.

VaR de benchmark (tracking error)

Pour un portefeuille géré par rapport à un indice de référence, on définit la **VaR de benchmark** comme la VaR de l'écart entre le rendement du portefeuille et celui du benchmark, $R_P - R_B$. Elle mesure le risque actif pris par le gérant, indépendamment du risque du marché lui-même — le pendant, en termes de perte extrême, de la tracking error usuelle.

Expected Tail Loss (ETL)

Expected Tail Loss / Expected Shortfall

L'ETL (aussi appelée *Expected Shortfall*, ES, ou *Conditional VaR*, CVaR) est la perte moyenne conditionnelle au dépassement de la VaR :

$$\text{ETL}_{\alpha,h} = \mathbb{E}[-P\&L_h \mid P\&L_h \leq -\text{VaR}_{\alpha,h}].$$

Contrairement à la VaR, l'ETL tient compte de **l'ampleur** des pertes extrêmes au-delà du seuil : par construction, $\text{ETL}_{\alpha,h} \geq \text{VaR}_{\alpha,h}$ toujours.

Pourquoi l'ETL séduit les régulateurs

Depuis Bâle III/FRTB, les régulateurs privilégient l'ETL (à 97,5 %) plutôt que la VaR (à 99 %) pour le calcul des exigences de fonds propres de marché — précisément parce que l'ETL est une mesure de risque **cohérente** (voir plus loin), sensible à la queue de distribution au-delà du seuil, ce qui la rend moins manipulable et plus robuste aux distributions à queue épaisse.

Mesures de risque cohérentes

Cohérence d'une mesure de risque

Une mesure de risque $\rho(\cdot)$ est dite **cohérente** si elle vérifie quatre axiomes, pour tous portefeuilles X, Y et tout scalaire $c \geq 0$:

1. **Monotonicité** : si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$ (une position toujours moins bonne est plus risquée).
2. **Invariance par translation** : $\rho(X + c) = \rho(X) - c$ (ajouter du cash sans risque réduit le risque d'autant).
3. **Homogénéité positive** : $\rho(cX) = c \rho(X)$ (doubler la position double le risque).
4. **Sous-additivité** : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (la diversification ne peut pas augmenter le risque).

Pourquoi la sous-additivité compte

La sous-additivité formalise l'idée que **la diversification réduit (ou au pire ne change pas) le risque total**. Une mesure de risque qui violerait cet axiome pourrait inciter, de façon absurde, à scinder un portefeuille en sous-entités séparées pour réduire artificiellement les exigences de capital réglementaire.

La VaR n'est pas toujours cohérente

Contre-exemple : options binaires

Considérons deux options binaires indépendantes, chacune ayant 4 % de chances de perdre 100 (et 96 % de chances de ne rien perdre). À un seuil de confiance de 95 %, la VaR de chaque position **isolée** est nulle : la probabilité de perte dépasse le seuil de 5% pour aucune des deux (la perte ne survient que 4 % du temps, en dessous des 5 % de queue). Mais pour le portefeuille des deux options combinées, la probabilité qu'**au moins une** subisse une perte est environ $1 - (0.96)^2 \approx 7.84\% > 5\%$: la VaR du portefeuille combiné est donc strictement positive, alors que la somme des VaR individuelles est nulle. On a $\text{VaR}(X + Y) > \text{VaR}(X) + \text{VaR}(Y)$: la sous-additivité est **violée**.

Portée pratique du contre-exemple

Ce résultat n'est pas qu'une curiosité théorique : il montre que la VaR peut, dans certaines configurations (produits de crédit, options binaires, portefeuilles à faible probabilité de défaut mais perte importante), **pénaliser artificiellement la diversification**. L'ETL, en revanche, est toujours une mesure cohérente : c'est l'un des arguments majeurs en sa faveur, aux côtés de sa sensibilité à l'ampleur des pertes extrêmes.

Les trois familles de modèles de VaR

Trois approches pour estimer la distribution du P&L

Estimer la VaR revient toujours à estimer une distribution (ou un quantile) du P&L futur du portefeuille.

Trois grandes familles de méthodes coexistent :

- **VaR linéaire normale** (*normal linear VaR*, ou VaR paramétrique) : on suppose que les rendements des facteurs de risque sont normaux et le portefeuille linéaire, ce qui donne une formule analytique fermée pour la VaR.
- **Simulation historique** : on applique directement les scénarios historiques observés sur les facteurs de risque au portefeuille actuel, sans hypothèse distributionnelle paramétrique.
- **VaR Monte Carlo** : on simule un grand nombre de scénarios futurs à partir d'un modèle statistique (paramétrique ou semi-paramétrique) des facteurs de risque, puis on réévalue le portefeuille sur chaque scénario.

Aucune méthode n'est universellement supérieure

Chaque approche a ses forces et ses limites : la VaR normale est rapide mais suppose la normalité et la linéarité; la simulation historique capture les dépendances empiriques mais est limitée par la taille de l'échantillon disponible; Monte Carlo est flexible (peut intégrer asymétrie, épaisseur des queues, non-linéarités) mais dépend fortement du modèle statistique choisi pour les facteurs de risque — une source de **risque de modèle**. Les trois prochains chapitres du cours approfondissent chacune de ces familles.

Étude de cas : le S&P 500

Sur un même portefeuille indiciel S&P 500, les trois méthodes appliquées aux mêmes données historiques donnent des VaR à 1 % qui diffèrent typiquement de 10 à 20 % les unes des autres : la VaR normale sous-estime souvent le risque de queue (les rendements actions ont un excès de kurtosis significatif), tandis que la simulation historique et Monte Carlo (avec une distribution à queue épaisse) donnent des estimations plus proches et plus élevées. Cet écart illustre concrètement le **risque de modèle** inhérent au choix de la méthode de calcul de la VaR.

Construire un modèle de VaR

Processus de construction d'un modèle de VaR

La mise en place d'un modèle de VaR opérationnel suit typiquement sept étapes : (1) identifier les facteurs de risque pertinents et les positions à mapper sur ces facteurs; (2) collecter et nettoyer les données historiques; (3) choisir l'horizon et le niveau de confiance; (4) choisir la famille de modèle (normal, historique, Monte Carlo); (5) estimer les paramètres du modèle (covariances, distributions); (6) calculer la VaR (et l'ETL); (7) **valider** le modèle par backtesting — comparer les VaR prédites aux pertes effectivement réalisées.

Le backtesting, étape trop souvent négligée

Un modèle de VaR n'est utile que s'il est régulièrement confronté aux réalisations : si les dépassements de VaR sont bien plus fréquents que le niveau de confiance annoncé ne le prévoit, le modèle sous-estime systématiquement le risque. Le backtesting rigoureux des modèles de VaR fera l'objet d'un chapitre dédié, plus loin dans le cours.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 1

- La VaR est **moins le quantile de niveau α** de la distribution du P&L sur un horizon h ; elle nécessite de préciser horizon, niveau de confiance et méthode.
- Distinguer VaR **statique** (position non rééquilibrée) et VaR **dynamique** (rééquilibrée) — cruciale pour les portefeuilles non linéaires.
- La racine du temps met la VaR à l'échelle sous hypothèse i.i.d.; l'autocorrélation et la dérive introduisent des corrections.
- La VaR se décompose en composantes systématique/spécifique, et en contributions stand-alone, marginale, incrémentale.
- L'ETL (perte moyenne au-delà de la VaR) est toujours **cohérente**; la VaR, elle, peut violer la sous-additivité.
- Trois familles de modèles : VaR normale, simulation historique, Monte Carlo — chacune avec ses propres sources de risque de modèle.

Vers le chapitre 3

Le chapitre 2 (VaR linéaire paramétrique) viendra compléter ce panorama. Nous poursuivons directement avec la **simulation historique**, la méthode la plus utilisée en pratique par les institutions