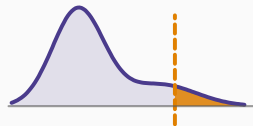


Value at Risk

Chapitre 3 : La simulation historique



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Principe de la simulation historique

Taille d'échantillon et fréquence des données

Le problème des données chevauchantes

Pondération exponentielle

Ajustement de volatilité (GARCH / EWMA)

Précision aux quantiles extrêmes

Études de cas

ETL historique

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

La méthode historique est, en pratique, la plus répandue des trois familles de modèles de VaR introduites au chapitre 1. Son principe est d'une simplicité désarmante : appliquer directement au portefeuille **actuel** les variations de marché réellement observées dans le passé, sans supposer aucune forme paramétrique pour la distribution des facteurs de risque. Cette simplicité a un prix : la qualité de l'estimation dépend entièrement de la richesse — et des limites — de l'historique disponible.

Principe de la simulation historique

VaR historique

On dispose de n scénarios historiques de rendements sur les facteurs de risque du portefeuille. Pour chaque scénario t , on recalcule le P&L qu'aurait subi le portefeuille **actuel** si ce scénario s'était reproduit aujourd'hui. On obtient ainsi n valeurs simulées de P&L, dont la distribution empirique sert directement à lire la VaR : la VaR historique à $100(1 - \alpha)\%$ est moins le quantile empirique de niveau α de cet échantillon de P&L simulés.

Aucune hypothèse distributionnelle... mais pas gratuit

Contrairement à la VaR normale, la simulation historique ne suppose ni normalité, ni linéarité du portefeuille : elle capture nativement l'asymétrie, l'épaisseur des queues, et les dépendances non linéaires entre facteurs de risque, telles qu'elles se sont manifestées dans le passé. Le prix à payer : on est prisonnier de la **taille** et de la **représentativité** de l'échantillon historique dont on dispose.

Taille d'échantillon et fréquence des données

Combien d'observations sont nécessaires ?

Contrainte fondamentale de la méthode historique

Pour estimer un quantile à $\alpha = 1\%$ avec une précision raisonnable, quelques centaines d'observations ne suffisent pas : les recommandations usuelles vont de 2 à 5 ans de données quotidiennes (500 à 1250 observations), voire davantage pour les quantiles les plus extrêmes (0,1 %). Plus le quantile visé est extrême, plus l'échantillon nécessaire est grand — et plus le risque d'utiliser des données anciennes, non représentatives du régime de marché actuel, augmente.

La racine du temps est une approximation

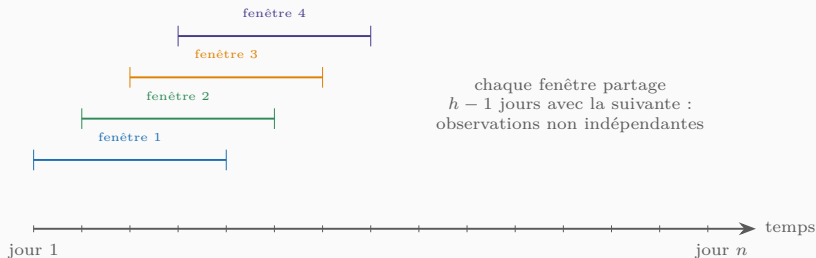
Le chapitre 1 a introduit la règle de la racine du temps, $\text{VaR}_h \approx \sqrt{h} \text{VaR}_1$, valable sous i.i.d. et normalité. Empiriquement, on observe plutôt une loi de puissance $\text{VaR}_h \approx h^\xi \text{VaR}_1$ où l'**exposant d'échelle** ξ diffère selon la classe d'actifs : $\xi \approx 0.5$ pour les indices actions (proche de la racine du temps), mais souvent $\xi < 0.5$ pour les taux de change (retour à la moyenne plus marqué) et ξ variable selon les matières premières et les taux d'intérêt. Utiliser aveuglément $\xi = 0.5$ peut donc introduire un biais significatif selon la classe d'actifs.

Le problème des données chevauchantes

Rendements chevauchants sur h jours

Pour estimer directement la VaR statique à h jours par simulation historique, il faut des rendements sur h jours consécutifs. Avec seulement n observations quotidiennes, on ne dispose que de $n - h + 1$ rendements sur h jours **chevauchants** (chacun partageant $h - 1$ jours avec le suivant), plutôt que n/h rendements réellement indépendants.

Chevauchement et distorsion des queues (suite)



Pourquoi le chevauchement pose problème

Les observations chevauchantes ne sont pas indépendantes : la perte extrême la plus grande dans l'échantillon sur h jours **ne peut pas dépasser** la somme des h plus grandes pertes quotidiennes consécutives observées dans l'historique. Le chevauchement **tronque** artificiellement la queue de la distribution des rendements sur h jours, ce qui conduit à **sous-estimer** la VaR aux quantiles les plus extrêmes, en particulier lorsque l'horizon h est long par rapport à la taille de l'échantillon.

Étude de cas : sensibilité à la taille d'échantillon

Avec un échantillon de 5000 jours (environ 20 ans), on dispose d'environ 500 rendements non chevauchants sur 10 jours — suffisant pour estimer un quantile à 10 %, mais tout juste suffisant pour un quantile à 1 % (on ne dispose alors que d'environ 5 observations extrêmes), et **insuffisant** pour un quantile à 0,1 % : il n'y a tout simplement pas assez de données pour l'estimer de façon fiable sans recourir au chevauchement, qui lui-même introduit un biais de sous-estimation à ces niveaux de confiance extrêmes.

Pondération exponentielle

VaR historique pondérée exponentiellement

Plutôt que de pondérer également toutes les observations historiques, on peut leur attribuer un poids décroissant exponentiellement avec leur ancienneté : l'observation vieille de k jours reçoit un poids proportionnel à λ^k pour un facteur de décroissance $\lambda < 1$ (typiquement $\lambda \approx 0.95-0.99$). Le quantile empirique est alors calculé sur la distribution empirique **pondérée**, ce qui rend le modèle plus réactif aux évolutions récentes des conditions de marché.

Un compromis réactivité / stabilité

Un λ proche de 1 donne un poids quasi uniforme (VaR peu réactive mais stable); un λ plus faible privilégie fortement les observations récentes (VaR plus réactive mais plus volatile et plus sensible au bruit d'échantillonnage). Ce compromis est le même que celui rencontré avec l'EWMA en économétrie financière.

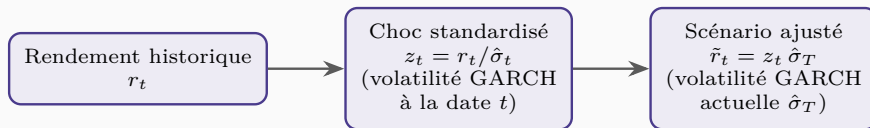
Ajustement de volatilité (GARCH / EWMA)

Simulation historique ajustée de la volatilité

Plutôt que d'utiliser directement les rendements historiques bruts, on les **standardise** par leur volatilité conditionnelle estimée au moment historique t (via EWMA ou GARCH), pour obtenir des chocs standardisés $z_t = r_t / \hat{\sigma}_t$ approximativement i.i.d. On **re-multiplie** ensuite chaque choc standardisé par la volatilité conditionnelle **actuelle** $\hat{\sigma}_T$ pour obtenir un scénario de rendement ajusté :

$$\tilde{r}_t = z_t \hat{\sigma}_T = \frac{r_t}{\hat{\sigma}_t} \hat{\sigma}_T.$$

Cette méthode adapte l'historique brut au régime de volatilité **présent**, ce que la simulation historique standard ne fait pas.



Exemple : S&P 500

Si la volatilité GARCH était de 12 % lors d'un choc historique de -3% et que la volatilité actuelle est de 24 % (marché deux fois plus agité), le choc standardisé $z_t = -3\%/12\% = -0.25$ est re-multiplié par 24% pour donner un scénario ajusté de -6% — deux fois plus sévère que le choc brut, ce qui reflète mieux le risque courant du marché.

Filtered Historical Simulation (FHS)

La simulation historique filtrée combine ajustement de volatilité GARCH et simulation historique multi-pas : on filtre la série historique par un modèle GARCH pour obtenir des résidus standardisés i.i.d., puis on ré-échantillonne (avec ou sans remise, y compris par *bootstrap*) ces résidus pour simuler des trajectoires futures, sur lesquelles on applique la dynamique GARCH estimée pour reconstruire des rendements simulés cohérents avec le régime de volatilité courant. Cette approche corrige simultanément les deux limites principales de la méthode historique standard : l'absence d'adaptation à la volatilité courante, et la contrainte de taille d'échantillon liée au chevauchement.

Précision aux quantiles extrêmes

Le quantile empirique est bruité en queue de distribution

Le quantile empirique brut (la k -ième plus grande perte de l'échantillon) est une estimation très instable dès que α est petit — un seul point de donnée supplémentaire ou manquant peut déplacer sensiblement l'estimation. Plusieurs techniques de lissage permettent d'obtenir des estimations plus précises et plus stables du quantile extrême.

Techniques de lissage du quantile

Quatre approches principales sont utilisées en pratique :

- **Lissage par noyau (kernel)** : on remplace la fonction de répartition empirique en escalier par une version lissée (convolution avec un noyau, par exemple gaussien), ce qui stabilise l'estimation du quantile.
- **Loi de Pareto généralisée (GPD)** : la théorie des valeurs extrêmes justifie d'ajuster une GPD à la queue de la distribution au-delà d'un seuil élevé, puis d'en dériver le quantile extrême par extrapolation paramétrique.
- **Développement de Cornish-Fisher** : on corrige le quantile normal z_α par des termes correctifs fonction de l'asymétrie (skewness) et de l'aplatissement (kurtosis) empiriques de l'échantillon.
- **Distribution de Johnson S_U** : on ajuste une famille de distributions à quatre paramètres (calée sur les quatre premiers moments empiriques) et on en déduit le quantile par inversion de sa fonction de répartition.

Comparaison empirique

Sur un même échantillon de rendements actions à forte kurtosis, le quantile empirique brut à 0,1 % est souvent instable et bruité (dominé par une poignée d'observations extrêmes), tandis que les méthodes GPD et Johnson S_U donnent des estimations plus lisses et généralement plus élevées (plus prudentes), le développement de Cornish-Fisher occupant une position intermédiaire — précise pour des quantiles modérément extrêmes (1 %, 5 %) mais moins fiable au-delà.

Études de cas

Cinq configurations types

La méthode historique s'applique, avec des adaptations spécifiques, à des portefeuilles très divers : flux de trésorerie et obligations (mapping sur des facteurs de taux à différentes maturités), positions actions individuelles (décomposition systématique/spécifique du chapitre 1), portefeuilles actions internationaux (risque de change combiné au risque actions, avec corrélations croisées), obligations internationales (risque de taux et de change combinés), et portefeuilles de trading sur spreads de raffinage (*crack spread*) dans l'énergie, où les positions sur plusieurs contrats à terme corrélés doivent être agrégées avec soin.

Le fil conducteur des études de cas

Dans chaque cas, la difficulté n'est presque jamais le calcul du quantile lui-même, mais la construction correcte du **mapping** entre les positions du portefeuille et un nombre gérable de facteurs de risque pour lesquels un historique suffisamment long et fiable est disponible.

ETL historique

ETL par simulation historique

L'ETL historique s'estime simplement en moyennant les pertes de l'échantillon simulé qui dépassent la VaR :

$$\widehat{\text{ETL}}_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \sum_{t: -P \& L_t > \text{VaR}_{\alpha}} (-P \& L_t),$$

où n_{α} est le nombre d'observations dépassant la VaR. Cette estimation hérite directement des limites de taille d'échantillon de la VaR historique : avec peu d'observations dans la queue, l'ETL empirique est encore plus instable que la VaR elle-même, ce qui motive le recours aux techniques de lissage de quantile (GPD notamment) également pour l'ETL.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 3

- La simulation historique applique directement les scénarios de marché passés au portefeuille actuel : aucune hypothèse distributionnelle paramétrique.
- La contrainte majeure est la **taille d'échantillon** : les quantiles extrêmes nécessitent des historiques longs, rarement disponibles sans recourir aux données chevauchantes.
- Les données **chevauchantes** permettent d'estimer la VaR statique à h jours mais **tronquent la queue** de la distribution, biaisant la VaR extrême vers le bas.
- L'**ajustement de volatilité** (EWMA/GARCH) et la **simulation historique filtrée** adaptent l'historique brut au régime de volatilité courant.
- Les techniques de lissage de quantile (noyau, GPD, Cornish-Fisher, Johnson S_U) stabilisent l'estimation aux niveaux de confiance extrêmes.

Vers le chapitre 4

La méthode Monte Carlo lève la principale contrainte de la simulation historique — la taille limitée de l'échantillon — en simulant un nombre arbitrairement grand de scénarios à partir d'un modèle statistique des facteurs de risque. C'est l'objet du prochain chapitre.