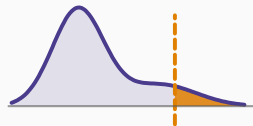


Value at Risk

Chapitre 8 : Allocation de capital



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Deux notions de capital

Le cadre réglementaire de Bâle

Capital économique

Risque d'agrégation

Mesures de performance ajustées au risque

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Pourquoi calcule-t-on une VaR ? En dernière instance, pour répondre à une question de gouvernance : combien de capital une institution doit-elle détenir face à ses risques de marché, et comment ce capital doit-il être réparti entre ses activités ? Ce chapitre referme le cours en reliant la VaR — mesure statistique — à sa finalité économique et réglementaire : le **capital**, sa mesure, son allocation et l'évaluation de la performance ajustée du risque.

Deux notions de capital

Capital réglementaire vs capital économique

Le **capital réglementaire** est le minimum légal imposé par les superviseurs bancaires : la banque doit soit appliquer des règles standardisées, soit faire valider un modèle interne, mais elle n'est jamais totalement libre de choisir sa méthode. Le **capital économique** (EC) est une estimation interne, propre à chaque institution, de la capitalisation nécessaire pour rester solvable avec une probabilité donnée sur un horizon donné — libre de toute contrainte réglementaire, mais devant rester acceptable pour les actionnaires et les agences de notation.

Deux conventions comptables

La comptabilité au **coût historique** enregistre les flux de trésorerie tels qu'ils surviennent, complétée par des provisions prudentes; elle est simple mais tournée vers le passé. La comptabilité en **juste valeur** (*fair value*) valorise les positions au prix de marché (*mark-to-market*) ou à un prix modélisé (*mark-to-model*); plus subjective, elle est en revanche tournée vers l'avenir — seule base pertinente pour l'évaluation du risque. Le **trading book** (positions liquides, intention de négociation) utilise la juste valeur; le **banking book** (positions de long terme, peu liquides) utilise généralement le coût historique.

Le cadre réglementaire de Bâle

Pilier 1, 2, 3

L'accord de Bâle II repose sur trois piliers complémentaires : le **Pilier 1** fixe les exigences minimales de capital; le **Pilier 2** organise la supervision et la revue prudentielle (y compris la possibilité, pour le superviseur, d'imposer une charge de capital additionnelle); le **Pilier 3** impose la transparence et la discipline de marché par la publication d'informations.

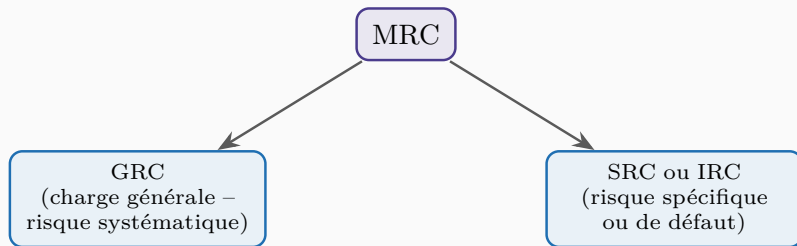
Le ratio de solvabilité (ratio de Cooke)

Le ratio de solvabilité rapporte le **capital éligible** (réparti en trois strates de fiabilité décroissante — capital de base, capital complémentaire, capital sous-complémentaire) aux **actifs pondérés des risques** (somme des risques de marché, de crédit et opérationnel). Le minimum réglementaire est généralement de 8 % pour une banque bien notée, mais les superviseurs nationaux peuvent l'exiger plus élevé.

MRC = charge générale + charge spécifique

La charge de capital pour risque de marché (MRC) se décompose en une **charge générale** (GRC, couvrant le risque systématique du marché) et, pour les expositions actions et taux, une **charge spécifique ou incrémentale** (SRC ou IRC, couvrant le risque idiosyncratique et le risque de défaut) :

$$\text{MRC} = \text{GRC} + \{\text{SRC ou IRC}\}.$$



GRC sous modèle interne

Pour une banque utilisant un modèle interne validé, la GRC est

$$\text{GRC} = k \times \max \left(\overline{\text{VaR}}_{60j}, \text{VaR}_{\text{hier}} \right),$$

où $\overline{\text{VaR}}_{60j}$ est la moyenne de la VaR à 1 % à 10 jours sur les 60 derniers jours, et le multiplicateur $k \in [3, 4]$ dépend des résultats de backtesting (chapitre 6) : zone verte, $k = 3$; zone rouge, $k = 4$.

Pourquoi un multiplicateur de 3 à 4 ?

Même avec $k = 3$ et sous hypothèse normale i.i.d., la GRC correspond à environ 7 écarts-types de perte — une probabilité de dépassement de l'ordre de 10^{-12} sur 10 jours. Ce multiplicateur, bien plus conservateur qu'une VaR à 99,9 % annuelle, reflète la défiance des régulateurs envers les hypothèses simplificatrices (normalité, i.i.d.) des modèles de VaR, ainsi que le besoin d'amortir les fortes variations procycliques de la charge de capital.

L'approche par blocs (building block)

À défaut de modèle interne validé, la banque applique des règles standardisées, catégorie par catégorie d'exposition (actions, change, matières premières, taux). Pour les actions par exemple, la GRC est de 8 % de l'exposition nette et la charge spécifique (SRC) est de 8 % (ou 4 % si le portefeuille est liquide et bien diversifié) de l'exposition brute — sans compensation entre positions longues et courtes.

La charge de risque incrémentale (IRC)

Introduite après la crise de 2007-2008, l'IRC couvre le risque de défaut et de migration de notation sur un horizon d'un an, à 99,9 % de confiance, en tenant compte de l'horizon de liquidité propre à chaque position (un mois pour les actions cotées liquides, jusqu'à un an pour les résécuritisations). Elle répond à un constat : la VaR standard, calculée sur un historique de rendements récents, ne capture pas les pertes rares mais massives liées à un défaut ou à une dégradation de notation.

Capital économique

Le capital économique comme capitalisation minimale

Soit A_0 la valeur actuelle des actifs d'une firme et R_A le rendement annuel de ces actifs. Le capital économique est le montant minimal de capitalisation nette garantissant, avec probabilité $1 - \alpha$, la solvabilité de la firme dans un an :

$$EC = A_0 - D_0^*, \quad \text{où } D_0^*(1 + R_D) = A_0(1 + R_{A,\alpha})$$

et $R_{A,\alpha}$ est le quantile de niveau α de la distribution du rendement des actifs. Autrement dit, l'EC est la valeur actualisée de l'écart entre le rendement **espéré** des actifs et leur quantile α — c'est, fondamentalement, une VaR appliquée au bilan de la firme entière.

Exemple

Une firme a des actifs de 50 M€, un rendement attendu de 5 % et une volatilité de 10 %; son passif actuel est de 40 M€, financé à 3 %. La probabilité d'insolvabilité dans un an est de 1,19 %. Pour ramener cette probabilité à 0,1 %, le passif maximal admissible tombe à 35,97 M€, ce qui implique un capital économique de **14,03 M€** — le montant minimal de fonds propres nécessaires pour garantir la solvabilité au niveau de confiance visé.

Risque d'agrégation

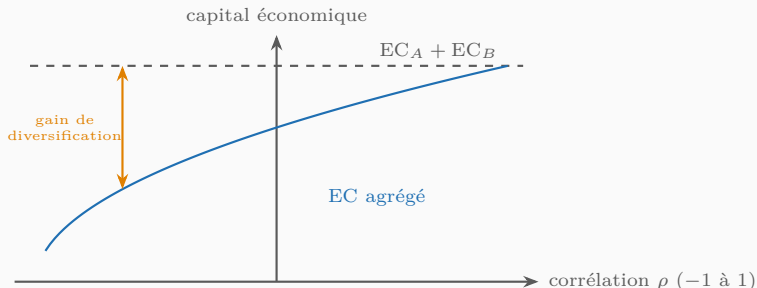
La diversification réduit le capital agrégé

Agrégation de l'EC entre deux activités

Pour deux activités de corrélation ρ , le capital économique agrégé n'est **pas** la somme des capitaux individuels, mais suit une règle de type portefeuille :

$$EC = \sqrt{EC_A^2 + EC_B^2 + 2\rho EC_A EC_B}.$$

Dès que $\rho < 1$, l'EC agrégé est strictement inférieur à $EC_A + EC_B$: c'est l'effet de diversification, au cœur de la gestion du capital d'un groupe multi-activités.



Mesures de performance ajustées au risque

Rentabilité ajustée du capital

Le **RORAC** (*return on risk-adjusted capital*) rapporte le profit net espéré d'une activité à son capital économique. Le **RAROC** (*risk-adjusted return on capital*), plus répandu, ajuste en plus le numérateur du coût du capital de risque lui-même :

$$\text{RAROC} = \frac{E(P\&L) - k \times \text{EC}}{\text{EC}},$$

où k est le coefficient de coût du capital, généralement calé sur le coût de financement réel de la firme.

Le RAROC ne doit pas être maximisé activité par activité

Il n'est pas optimal de favoriser systématiquement l'activité au RAROC le plus élevé : c'est la **contribution marginale** de chaque activité au capital économique **total** du groupe qui compte, exactement comme la VaR marginale du chapitre 1. Moduler le coefficient de coût du capital k par activité est un outil de gestion qui permet d'atteindre le RAROC global maximal sans exiger de chaque ligne d'activité qu'elle raisonne elle-même en termes de contribution marginale au risque du groupe.

Exemple : swaps vs obligations

Pour un desk de swaps de taux (encours notionnel énorme mais capital économique faible, car peu de capital réel immobilisé) et un desk d'obligations d'entreprise (encours plus modeste mais capital économique élevé, du fait du risque de défaut et de financement), le RAROC après impôt peut être très proche (13 % contre 15 % dans un exemple type) malgré des profils radicalement différents — illustrant que le RAROC permet de comparer des activités de nature très différente sur une base commune.

Maximiser le RAROC agrégé sous contrainte

L'allocation optimale de capital résout un problème d'optimisation : répartir le capital total entre activités de façon à maximiser le RAROC agrégé du groupe, éventuellement sous une contrainte que l'EC agrégé égale le capital réglementaire minimal. La solution recommande souvent une réallocation significative — réduire une activité gourmande en capital économique au profit d'une activité plus légère, même si celle-ci a un RAROC individuellement plus faible — car c'est la contribution **marginale** à la diversification du groupe qui prime.

Exemple : optimisation sous contrainte réglementaire

Pour les mêmes desks de swaps et d'obligations, si le capital économique agrégé doit être ramené à un niveau minimal imposé par le régulateur, l'optimisation recommande de réduire fortement la taille du desk obligataire (dont le capital économique isolé dépasse largement le minimum requis pour l'ensemble) tout en augmentant le notionnel du desk de swaps — le RAROC global du groupe s'en trouve significativement amélioré, tout en respectant exactement la contrainte de capital réglementaire.

Une réalité plus complexe en pratique

Modifier radicalement le mix d'activités d'une banque ne se fait pas du jour au lendemain — la couverture (*hedging*) sert souvent d'étape intermédiaire. De plus, on ne connaît généralement que l'effet **marginal** d'un changement modeste de taille sur la rentabilité et les corrélations, pas l'effet d'un changement d'échelle massif. L'allocation optimale de capital est donc, en pratique, un processus **itératif**, indiquant à chaque étape une direction d'amélioration plutôt qu'un optimum atteint en une fois.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 8

- Le capital **réglementaire** (minimum légal, encadré par Bâle) et le capital **économique** (estimation interne libre) répondent à des logiques différentes mais convergentes.
- La charge de capital de marché se décompose en charge générale (GRC, risque systématique) et charge spécifique ou incrémentale (SRC/IRC, risque idiosyncratique et de défaut).
- Le capital économique se définit comme une VaR appliquée au bilan entier de la firme : l'écart entre la valeur actuelle attendue des actifs et le quantile extrême de leur valeur future.
- L'agrégation du capital économique entre activités dépend fortement de leur **corrélation** — source majeure et souvent sous-estimée de risque de modèle (le **risque d'agrégation**).
- Le RAROC (et le RORAC) permettent de comparer la performance ajustée du risque d'activités hétérogènes, mais l'optimisation doit porter sur la contribution **marginale** au risque du groupe, non sur le ratio individuel de chaque activité.

Ce que la suite du cours abordera

Le chapitre 2 (VaR linéaire paramétrique) complètera le panorama des méthodes de calcul de la VaR dès qu'il sera disponible, refermant la boucle entre les fondements théoriques du chapitre 1 et les applications de risque de modèle, de scénarios et de capital couvertes dans ces trois derniers chapitres.