

Théorie des réseaux

Chapitre 2 : Le vocabulaire des graphes



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La définition

Le degré

Chemins et distances

Connexité

Ce qu'il faut retenir

La définition

L'objet

$$G = (V, E)$$

V l'ensemble des **sommets** – ou nœuds –, E celui des **arêtes** – ou liens.

$n = |V|$ est la taille, $m = |E|$ le nombre d'arêtes.

Notre réseau

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad n = 7$$

$$E = \{12, 13, 23, 34, 45, 56, 57, 67\}, \quad m = 8$$

Ce qui distingue les graphes

Orienté — l'arête a un sens : $i \rightarrow j$ diffère de $j \rightarrow i$.

Pondéré — l'arête porte une intensité : montant, fréquence, durée.

Signé — l'arête porte un signe : alliance ou hostilité.

Biparti — deux types de sommets, les arêtes ne relient que des types différents.

Le bon choix se lit dans la question

Prêts interbancaires : **orienté et pondéré** — qui prête combien à qui.

Coauteurs d'un article : **non orienté**. Administrateurs et conseils d'administration : **biparti**.

Se tromper de variante fausse toutes les mesures qui suivent.

Le degré

Nombre de voisins

$$k_i = | \{ j : ij \in E \} |$$

En orienté, on distingue le degré **entrant** k_i^{in} et le degré **sortant** k_i^{out} .

Sur notre réseau

Nœud	1	2	3	4	5	6	7
k_i	2	2	3	2	3	2	2

Le lemme des poignées de main

Le résultat

$$\sum_{i \in V} k_i = 2m$$

Chaque arête est comptée deux fois : une par extrémité.

Vérification

$$2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 = 16 = 2 \times 8$$

Le degré moyen vaut donc

$$\bar{k} = \frac{2m}{n} = \frac{16}{7} \approx 2,29$$

Intuition

La somme des degrés est toujours **paire**. Le nombre de sommets de degré impair l'est aussi.

C'est le premier théorème de la théorie des graphes, dû à Euler en 1736 — et il suffit à réfuter bien des réseaux mal saisis.

Chemins et distances

Trois mots

Un **chemin** est une suite de sommets consécutivement reliés, sans répétition.

Sa **longueur** est son nombre d'arêtes.

La **distance** $d(i, j)$ est la longueur du plus court chemin entre i et j ; elle vaut $+\infty$ s'il n'y en a aucun.

Sur notre réseau

$$d(1, 2) = 1 \quad d(1, 4) = 2 \quad d(1, 5) = 3 \quad d(1, 6) = 4$$

Le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ est le plus court possible entre 1 et 6.

Diamètre et distance moyenne

Deux résumés

$$\text{diametre} = \max_{i,j} d(i,j) \quad \bar{d} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} d(i,j)$$

Sur notre réseau

Le diamètre vaut 4 : c'est la distance entre $\{1, 2\}$ et $\{6, 7\}$.

La somme des 21 distances vaut 46, donc

$$\bar{d} = \frac{46}{21} \approx 2,190$$

Pourquoi les deux, et pas un seul

Le diamètre est le **pire cas** : il est sensible à un seul sommet excentré.

La distance moyenne décrit le **cas courant**. Un réseau de diamètre 12 et de distance moyenne 3 est un petit monde avec une queue — pas un réseau étiré.

Connexité

Composante connexe

Un ensemble maximal de sommets deux à deux joignables.

Un graphe est **connexe** s'il n'a qu'une composante.

En orienté, deux notions

Fortement connexe : tout sommet est joignable depuis tout autre en respectant le sens.

Faiblement connexe : c'est vrai si l'on oublie les sens.

Notre réseau est connexe

Une seule composante, de sept sommets. **Toutes les distances sont finies**, ce qui rend les mesures du chapitre 4 calculables sans précaution.

Deux fragilités

Un **pont** est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes.

Un **point d'articulation** est un sommet dont la suppression fait de même.

Sur notre réseau

Les arêtes 3-4 et 4-5 sont des **ponts**. Les sommets 3, 4 et 5 sont des **points d'articulation**.

Retirer le nœud 4 coupe le réseau en deux triangles isolés.

La lecture économique

Un pont est une **vulnérabilité** et une **rente** à la fois.

Vulnérabilité pour le système : sa disparition le fragmente. Rente pour celui qui l'occupe : rien ne passe sans lui. **Le chapitre 4 chiffre cette rente**, et le chapitre 14 en fait un critère de régulation.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Un graphe est $G = (V, E)$; il peut être **orienté, pondéré, signé, biparti**.
2. Le **degré** compte les voisins; $\sum_i k_i = 2m$, toujours pair.
3. Notre réseau : $n = 7$, $m = 8$, $\bar{k} \approx 2,29$.
4. La **distance** est la longueur du plus court chemin; diamètre 4, moyenne 2,190.
5. Diamètre et distance moyenne disent des choses **différentes** : pire cas et cas courant.
6. Les arêtes 3-4 et 4-5 sont des **ponts**; le nœud 4 est un point d'articulation.

La suite

Le chapitre 3 range tout cela dans une matrice — et découvre que les puissances de cette matrice comptent les chemins, ce qui donnera les centralités du chapitre 5.