

Théorie des réseaux

Chapitre 9 : Petit monde et attachement préférentiel



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Watts et Strogatz

Barabasi et Albert

Les limites

Ce qu'il faut retenir

Watts et Strogatz

1998

Partir d'un **anneau régulier** où chaque nœud est relié à ses k plus proches voisins.

Puis **recâbler chaque arête avec probabilité p** vers une destination tirée au hasard.

Les deux extrêmes

$p = 0$: l'anneau. Clustering très élevé — les voisins se chevauchent —, mais distances longues, en $O(n/k)$.

$p = 1$: un graphe aléatoire. Distances courtes, clustering nul.

Le résultat central

Ce que Watts et Strogatz observent

Quand p croît de 0 à 1, la distance moyenne s'effondre bien avant que le clustering ne baisse.

Sur un anneau de mille nœuds

p	Distance moyenne	Clustering
0	≈ 50	0,75
0,001	≈ 25	0,75
0,01	≈ 10	0,73
1	$\approx 3,5$	$\approx 0,01$

La zone du petit monde

Entre $p = 0,001$ et $p = 0,01$, on obtient **les deux à la fois** : distances courtes et clustering élevé.

Quelques raccourcis suffisent. Sur mille arêtes, en recâbler cinq divise la distance moyenne par cinq sans toucher au clustering.

Pourquoi l'asymétrie

Un raccourci relie deux régions éloignées et **court-circuite un long détour pour un grand nombre de paires** : son effet sur les distances est global.

Il ne détruit qu'**un seul triangle** : son effet sur le clustering est local.

Ce que cela explique

Une poignée d'expatriés, de voyageurs ou de banques internationales suffit à rendre le monde petit, tout en laissant chaque communauté aussi dense qu'avant.

Le petit monde ne demande pas la mondialisation de tout le monde — seulement de quelques-uns.

Barabasi et Albert

Les lois de puissance

$$\mathbb{P}(k) \propto k^{-\gamma}, \quad \gamma \in [2, 3] \text{ le plus souvent}$$

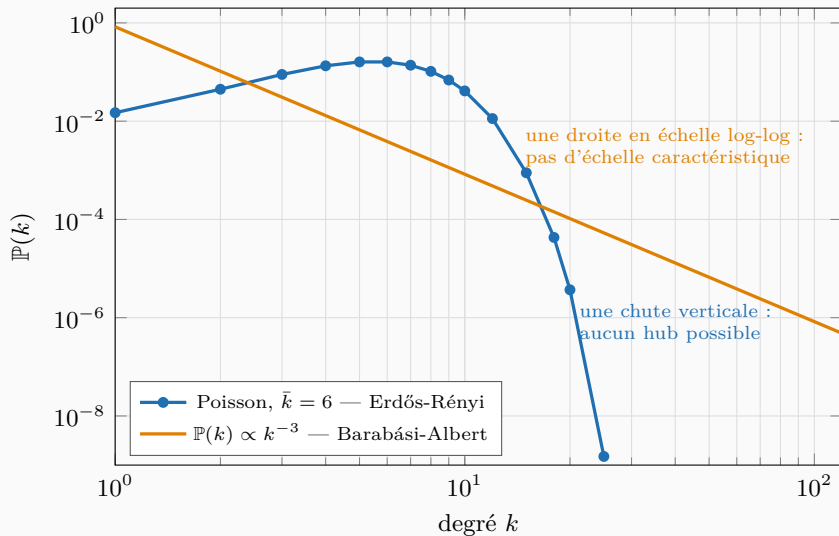
En échelle logarithmique, c'est une **droite** — au lieu de la cloche de Poisson.

Ce que cette forme autorise

Elle n'a pas d'échelle caractéristique : un nœud mille fois plus connecté que la moyenne reste **possible**.

Pour $\gamma < 3$, la **variance est infinie** : la moyenne des degrés ne résume rien.

La distribution des degrés, en image



1999 - deux ingrédients

Croissance — le réseau grandit : un nœud arrive à chaque période avec m liens.

Attachement préférentiel — il se lie au nœud i avec probabilité

$$\Pi(i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

Le résultat

La distribution des degrés converge vers une loi de puissance d'exposant

$$\gamma = 3$$

Les riches deviennent plus riches

Un nœud arrivé tôt a plus de temps pour accumuler des liens, ce qui le rend plus attractif, ce qui lui en apporte davantage.

$$k_i(t) \propto \sqrt{t/t_i}$$

L'avantage du **premier arrivé** ne s'efface jamais.

La lecture économique

C'est le mécanisme des **rendements croissants d'adoption** : plus une plateforme a d'utilisateurs, plus elle en attire.

Le vainqueur n'est pas nécessairement le meilleur : il est celui qui est arrivé le premier. C'est l'argument central de l'économie des plateformes.

Les deux ingrédients sont nécessaires

Ce qui se passe si l'on en retire un

Croissance sans attachement préférentiel : distribution exponentielle, pas de hubs.

Attachement préférentiel sans croissance : un seul nœud finit par tout capter.

Ce que la vérification apporte

Un modèle dont on n'a pas testé la nécessité de chaque hypothèse n'a rien démontré.

Ici, les deux ingrédients sont indispensables et suffisants — c'est ce qui donne au résultat sa force.

Les limites

Trois critiques

Le **clustering** qu'il produit tend vers zéro quand n croît : il n'explique pas le petit monde.

L'**exposant** est figé à 3, alors qu'on observe 2 à 3.

La **qualité** est ignorée : rien ne permet à un nouvel entrant supérieur de dépasser un incumbent.

Le modèle de l'aptitude

Bianconi et Barabási (2001) ajoutent une aptitude $\eta_i : \Pi(i) \propto \eta_i k_i$.

Un nouveau nœud très apte peut alors **rattraper et dépasser** — ce que le modèle nu interdisait, et que l'histoire des plateformes montre pourtant.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Watts-Strogatz** : recâbler quelques arêtes d'un anneau donne distances courtes **et** clustering élevé.
2. L'asymétrie vient de ce qu'un raccourci a un effet **global** sur les distances, **local** sur les triangles.
3. Les réseaux réels ont des degrés en **loi de puissance**, $\mathbb{P}(k) \propto k^{-\gamma}$.
4. **Barabási-Albert** : croissance + attachement préférentiel $\Rightarrow \gamma = 3$.
5. Les **deux** ingrédients sont nécessaires : ni l'un ni l'autre ne suffit seul.
6. Le modèle ignore le clustering et la **qualité**; l'aptitude de Bianconi corrige le second point.

La suite

Le chapitre 10 change d'échelle : au lieu de décrire les nœuds ou le réseau entier, il cherche les **groupes** — ces zones plus denses que le reste, qu'on appelle des communautés.