

Théorie des réseaux

Chapitre 12 : Les jeux en réseau



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le cadre

L'équilibre de Nash

Le joueur clé

Les substituts stratégiques

Ce qu'il faut retenir

Le cadre

Un choix, pas une contagion

Chaque nœud choisit un **effort** $x_i \geq 0$ – recherche et développement, prévention, éducation.

Son gain dépend de son effort **et** de celui de ses voisins.

Le gain quadratique de Ballester, Calvo-Armengol et Zenou, 2006

$$u_i(\mathbf{x}) = x_i - \frac{1}{2}x_i^2 + \phi \sum_j A_{ij} x_i x_j$$

ϕ mesure l'intensité de l'interaction locale.

Le signe de phi décide de tout

$\phi > 0$: **compléments stratégiques** — l'effort d'un voisin augmente le rendement du mien.

$\phi < 0$: **substituts stratégiques** — l'effort d'un voisin dispense du mien.

Deux exemples

Compléments : la recherche dans une filière, l'apprentissage d'une langue, l'équipement d'un réseau.

Substituts : la fourniture d'un bien public local, la collecte d'information coûteuse, la surveillance d'un quartier.

L'équilibre de Nash

La meilleure réponse

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 1 - x_i + \phi \sum_j A_{ij} x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 1 + \phi \sum_j A_{ij} x_j$$

Sous forme matricielle

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \phi \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}$$

Le résultat central

C'est exactement la centralité de Katz-Bonacich du chapitre 5, avec $\alpha = \phi$.

L'effort d'équilibre d'un joueur est sa centralité de Bonacich. Une notion descriptive devient la solution d'un jeu.

Le rôle du rayon spectral

L'équilibre existe et est **unique** si

$$|\phi| < \frac{1}{\lambda_1}$$

Sur notre réseau

$$\lambda_1 \approx 2,343 \quad \Rightarrow \quad |\phi| < 0,427$$

Ce que dit la borne

Au-delà, les efforts se renforcent sans limite : la série $\sum_r \phi^r \mathbf{A}^r$ diverge.

Le même nombre λ_1 borne le seuil épidémique et l'intensité d'interaction admissible. Deux problèmes sans rapport, une seule quantité.

Le joueur clé

La question de politique publique

Le key player

Si l'on ne peut retirer qu'un **seul** joueur — subventionner un chercheur, incarcérer un délinquant, sauver une banque —, lequel a le plus d'effet sur l'activité totale ?

La mauvaise réponse

Ce n'est **pas** celui dont l'effort est le plus élevé.

Retirer un joueur supprime son effort propre, mais aussi tout ce que sa présence induisait chez ses voisins, et chez les voisins de ses voisins.

L'intercentralité

$$c_i = \frac{x_i^2}{[(\mathbf{I} - \phi \mathbf{A})^{-1}]_{ii}}$$

C'est la perte totale d'activité si i disparaît.

Delinquance juvenile - Ballester et al.

Sur des réseaux d'amitié scolaires américains, le joueur clé n'est presque jamais le délinquant le plus actif.

C'est celui dont la position **amplifie le plus** l'effort des autres.

La conséquence

Une politique qui cible les individus les plus visibles se trompe de cible.

La bonne cible est structurelle, pas comportementale — et elle exige de connaître le réseau.

Les substituts stratégiques

Un tout autre régime

Quand ϕ est négatif

Chacun préfère laisser son voisin faire l'effort. Les équilibres deviennent des **ensembles indépendants maximaux** : ceux qui agissent ne sont voisins de personne qui agit.

Sur notre réseau

$\{1, 4, 6\}$ agit, le reste se repose : aucun des trois n'est voisin d'un autre, et tout nœud inactif a un voisin actif.

$\{2, 4, 7\}$ ou $\{3, 6\}$ conviennent aussi. **Il y a plusieurs équilibres.**

Ce que la multiplicité implique

L'équilibre n'est plus unique, et les équilibres ne se valent pas : $\{3, 6\}$ mobilise deux joueurs, $\{1, 4, 6\}$ en mobilise trois pour le même résultat.

La théorie ne dit plus lequel se réalisera. Il faut alors une histoire — une convention, un ordre d'arrivée, une institution.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Chaque joueur choisit un **effort**; le réseau détermine ses interactions.
2. **Compléments** ($\phi > 0$) ou **substituts** ($\phi < 0$) : deux régimes opposés.
3. Avec des compléments, $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \phi \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}$: c'est **Katz-Bonacich**.
4. L'unicité exige $|\phi| < 1/\lambda_1$, soit 0,427 ici.
5. Le **joueur clé** n'est pas le plus actif, mais celui qui amplifie le plus les autres.
6. Avec des substituts, les équilibres sont **multiples** : la théorie ne suffit plus à prédire.

La suite

Le chapitre 13 pose la question que ce chapitre a esquivée : comment **mesurer** un effet de pairs sur des données réelles, sans confondre influence, sélection et environnement commun ?