

Théorie des réseaux

Chapitre 8 : Le graphe aléatoire d'Erdos et Renyi



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le modèle

La distribution des degrés

La transition de phase

Ce que le modèle ne reproduit pas

Ce qu'il faut retenir

Le modèle

$G(n, p)$

n sommets. Chaque paire est reliée **indépendamment** avec probabilité p .

Il n'y a rien d'autre : aucune préférence, aucune histoire, aucune géographie.

Les premiers moments

$$\mathbb{E}[m] = p \binom{n}{2} \quad \bar{k} = p(n-1) \quad k_i \sim \mathcal{B}(n-1, p)$$

Pourquoi étudier un modèle qu'on sait faux

Aucun réseau réel ne se forme au hasard. **Mais il faut un point de comparaison.**

Dire qu'un réseau est « très clusterisé » n'a de sens que par rapport à ce qu'un hasard pur produirait à densité égale.

La distribution des degrés

La limite

Quand $n \rightarrow \infty$ à $\bar{k}$ fixé, $p = \bar{k}/(n-1) \rightarrow 0$ et

$$\mathbb{P}(k_i = k) \longrightarrow e^{-\bar{k}} \frac{\bar{k}^k}{k!}$$

Ce que la loi de Poisson implique

Elle est **concentrée** autour de sa moyenne : son écart-type vaut $\sqrt{\bar{k}}$.

Avec $\bar{k} = 6$, l'écart-type vaut 2,45. Un nœud de degré 100 a une probabilité de l'ordre de 10^{-70} .

La réfutation empirique

Les réseaux réels contiennent des nœuds de degré cent ou mille fois la moyenne : un aéroport, une banque centrale, une page très citée.

Erdős-Rényi les déclare impossibles. C'est son échec principal, et le chapitre 9 y répondra.

La transition de phase

1960

Le comportement de $G(n, p)$ dépend de $\bar{k}$:

$\bar{k} < 1$: composantes de taille $O(\ln n)$

$\bar{k} = 1$: composante de taille $O(n^{2/3})$

$\bar{k} > 1$: composante geante, de taille $O(n)$

Le mécanisme

Chaque nœud atteint en moyenne $\bar{k}$ nouveaux nœuds à chaque pas.

Si $\bar{k} < 1$, l'exploration s'éteint comme un processus de branchement sous-critique. Si $\bar{k} > 1$, elle **explose**. Le seuil est exactement 1.

Le calcul de la taille géante

L'équation de point fixe

Soit S la fraction des nœuds dans la composante géante. Elle vérifie

$$S = 1 - e^{-\bar{k}S}$$

Quelques valeurs

$\bar{k}$	S
0,9	0,00
1,5	0,58
2	0,80
3	0,94
5	0,99

Application en gestion

Deux liens par nœud suffisent à connecter 80 % du réseau. Cinq en connectent 99 %.

C'est ce qui explique la composante géante universelle du chapitre 7 : elle ne demande presque rien.

Ce que le modèle ne reproduit
pas

La valeur attendue

Deux voisins de i sont reliés avec probabilité p , indépendamment de tout. Donc

$$\mathbb{E}[C] = p = \frac{\bar{k}}{n-1}$$

La comparaison, sur des données réelles

Réseau	C observé	C attendu
Coauteurs (physique)	0,45	0,00018
Internet	0,39	0,00060
Acteurs de cinéma	0,79	0,00027

Intuition

Ce n'est pas une imprécision : c'est un **échec qualitatif**.

Le hasard pur ne ferme pas les triangles, parce qu'il ignore que les amis de vos amis ont une raison particulière de se rencontrer.

Deux succès, deux échecs

Réussi : distances courtes, en $\ln n / \ln \bar{k}$; composante géante au-delà de $\bar{k} = 1$.

Manqué : le clustering, trop faible de trois ordres de grandeur; la distribution des degrés, qui interdit les hubs.

Ce que cet échec vaut

Le modèle a identifié **exactement ce qu'il faut expliquer**.

Un modèle faux qui isole deux anomalies précises est plus utile qu'un modèle vague qui n'en isole aucune. **Les chapitres 9 et 10 répondent aux deux, l'un après l'autre.**

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. $G(n, p)$ relie chaque paire **indépendamment** avec probabilité p .
2. Les degrés suivent une loi de **Poisson** : concentrée, sans hubs possibles.
3. **Transition de phase** en $\bar{k} = 1$: au-delà, une composante géante apparaît.
4. $S = 1 - e^{-\bar{k}S}$: deux liens par nœud connectent 80 % du réseau.
5. Le clustering prédit vaut p : **mille fois trop faible**.
6. Le modèle réussit les distances, échoue sur le clustering et les hubs.

La suite

Le chapitre 9 corrige les deux défauts par deux idées distinctes : quelques raccourcis pour le clustering, et une règle d'attachement pour les hubs.