

Théorie des réseaux

Chapitre 11 : La diffusion sur un réseau



Deux familles de modèles

Le modèle SIS

La vaccination

La contagion complexe

Ce qu'il faut retenir

Deux familles de modèles

Contagion simple

Un **seul contact infecté suffit**, avec une certaine probabilité. C'est le modèle d'une maladie, d'une information, d'un virus informatique.

Contagion complexe

Il **faut plusieurs contacts** pour être convaincu. C'est le modèle d'une norme sociale, d'une technologie coûteuse, d'un comportement risqué.

La conséquence est radicale

Un **raccourci** propage très bien une contagion simple : un seul lien suffit à traverser.

Il ne propage **pas** une contagion complexe : le nœud atteint n'a qu'un voisin infecté, donc reste sous son seuil. **Le petit monde n'aide pas à diffuser une norme.**

Le modèle SIS

Susceptible - Infecté - Susceptible

Un nœud infecté transmet à chaque voisin sain au taux β , et guérit au taux μ – sans immunité.

On pose $\tau = \beta/\mu$, le **taux effectif de transmission**.

En champ moyen, sans réseau

$$\frac{di}{dt} = \beta \bar{k} i (1 - i) - \mu i$$

L'épidémie persiste si $\tau > 1/\bar{k}$.

Le résultat spectral

Sur un réseau donné, l'épidémie persiste si

$$\tau > \tau_c = \frac{1}{\lambda_1}$$

où λ_1 est la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}$.

Sur notre réseau

$$\lambda_1 \approx 2,343 \quad \implies \quad \tau_c \approx 0,427$$

Contre $1/\bar{k} = 1/2,29 \approx 0,437$ en champ moyen : à peine plus bas.

Intuition

$\lambda_1 \geq \bar{k}$ toujours. Le réseau est donc toujours plus facile à contaminer que sa moyenne ne le suggère.

L'écart est faible ici parce que les degrés sont presque tous égaux. Il devient énorme dès qu'il y a des hubs.

Pastor-Satorras et Vespignani, 2001

Pour une loi de puissance d'exposant $\gamma \leq 3$, la variance des degrés diverge, donc

$$\lambda_1 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \tau_c \rightarrow 0$$

Le résultat, très inquiétant

Il n'y a plus de seuil épidémique. Une maladie de transmissibilité arbitrairement faible se maintient indéfiniment.

Les hubs sont infectés presque immédiatement et réinfectent tout le reste. C'est ce qui explique la persistance de virus informatiques peu contagieux pendant des années.

La vaccination

Feld, 1991

Vos amis ont en moyenne plus d'amis que vous.

Un nœud de degré k est atteint par k arêtes : plus il est connecté, plus il a de chances d'être le voisin de quelqu'un.

La distribution du degré d'un voisin

$$q_k = \frac{k p_k}{\bar{k}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[k_{\text{voisin}}] = \frac{\mathbb{E}[k^2]}{\bar{k}} \geq \bar{k}$$

La stratégie qui en découle

Vacciner un ami au hasard

On tire un individu au hasard, et l'on vaccine **un de ses contacts** tiré au hasard.

Aucune connaissance du réseau n'est requise.

Le gain

La vaccination aléatoire d'un réseau sans échelle exige de couvrir presque toute la population.

La vaccination par les amis atteint le même effet avec une fraction bien moindre, parce qu'elle touche les hubs sans les avoir identifiés.

Pourquoi c'est remarquable

Cibler les hubs suppose de connaître le réseau — donnée rarement disponible en santé publique.

Cette stratégie exploite la structure sans l'observer. C'est un résultat d'ingénierie sociale, pas seulement de théorie.

La contagion complexe

Le modèle de seuil

Granovetter, 1978 - Morris, 2000

Un nœud adopte si la **fraction** de ses voisins déjà adoptants dépasse un seuil θ :

$$\frac{\text{voisins adoptants}}{k_i} \geq \theta$$

Sur notre réseau, avec $\theta = 1/2$

Si 1 et 2 adoptent : 3 a deux voisins sur trois adoptants, donc $2/3 \geq 1/2$: **il adopte**.

Puis 4 a un voisin sur deux, soit $1/2 \geq 1/2$: **il adopte**. Puis 5 a un sur trois : $1/3 < 1/2$, **il n'adopte pas**.

La diffusion s'arrête au pont

Le nœud 4 adopte mais ne transmet pas : il ne suffit pas, à lui seul, à convaincre 5.

Un pont laisse passer un virus et bloque une norme. Les deux triangles restent des mondes séparés pour tout ce qui demande d'être convaincu deux fois.

Les liens forts contre les liens faibles

Granovetter montrait que les **liens faibles** apportent l'information.

Centola et Macy (2007) montrent que les **liens forts et redondants** portent l'adoption. Les deux résultats sont vrais parce qu'ils portent sur deux objets différents.

La conséquence pour une campagne

Diffuser une **information** : viser les ponts et les hubs.

Faire adopter un **comportement** : viser un groupe dense et le saturer, puis laisser le voisinage basculer.

Les deux stratégies sont opposées.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Contagion simple** : un contact suffit. **Complexe** : il en faut plusieurs.
2. Le **seuil épidémique** vaut $\tau_c = 1/\lambda_1$, non $1/\bar{k}$.
3. Sur un réseau sans échelle à $\gamma \leq 3$, **le seuil disparaît**.
4. **Paradoxe de l'ami** : $\mathbb{E}[k_{\text{voisin}}] = \mathbb{E}[k^2]/\bar{k} \geq \bar{k}$.
5. Vacciner l'ami d'un individu tiré au hasard atteint les hubs **sans connaître le réseau**.
6. Un **pont** transmet un virus mais bloque une norme : les deux stratégies de campagne sont opposées.

La suite

Le chapitre 12 remplace la contagion mécanique par un **choix** : chacun décide de son effort en fonction de celui de ses voisins.