

Théorie des réseaux

Chapitre 7 : Composantes, distances et petit monde



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Les composantes

Le calcul des distances

Le petit monde

Pourquoi le monde est petit

Ce qu'il faut retenir

Les composantes

La composante géante

Presque tous les grands réseaux réels ont **une composante qui contient la majorité des nœuds**, et une poussière de petites composantes autour.

Trois exemples

Réseau	Part dans la géante
Web (Broder et al., 2000)	$\approx 90 \%$
Coauteurs en physique	$\approx 85 \%$
Interbancaire européen	$> 95 \%$

Intuition

Le chapitre 8 démontrera qu'au-delà d'un seuil de densité **très bas**, une composante géante apparaît presque sûrement.

Il faut très peu de liens pour qu'un réseau devienne connexe : c'est le premier résultat contre-intuitif du domaine.

Le calcul des distances

BFS

On explore par couches : les voisins du départ sont à distance 1, leurs voisins non encore vus à distance 2, et ainsi de suite.

Coût : $O(n + m)$ pour un sommet, donc $O(n(n + m))$ pour toutes les paires.

Depuis le nœud 1

Couche	Nœuds	Distance
0	1	0
1	2, 3	1
2	4	2
3	5	3
4	6, 7	4

Trois quantités

L'excentricité de i : $e(i) = \max_j d(i, j)$.

Le **diamètre** : $\max_i e(i)$. Le **rayon** : $\min_i e(i)$.

Les nœuds d'excentricité minimale forment le **centre** du graphe.

Sur notre réseau

Nœud	1	2	3	4	5	6	7
$e(i)$	4	4	3	2	3	4	4

Diamètre 4, rayon 2, **centre** = {4}.

Intuition

Cinquième mesure, cinquième fois qu'il ressort — et toujours pour la même raison géométrique.

Le centre d'un graphe minimise le pire cas, ce qui en fait le bon emplacement pour un entrepôt, un serveur ou une caserne.

Le petit monde

L'expérience de Milgram

1967

Des habitants du Nebraska devaient faire parvenir une lettre à un agent de change de Boston, en la remettant à une connaissance personnelle susceptible de le rapprocher.

Médiane des chaînes abouties : cinq intermédiaires — d'où l'expression *six degrés de séparation*.

Ce que l'expérience a de fragile

Sur 296 lettres envoyées, 64 seulement sont arrivées.

La médiane porte donc sur les chaînes **abouties** : les chaînes longues avaient plus d'occasions de s'interrompre. **Le chiffre est biaisé vers le bas**, et il faut le dire.

Une confirmation moderne

Sur Facebook en 2016, la distance moyenne mesurée sur 1,6 milliard de comptes vaut 3,57.

Ici, aucun biais d'attrition : le réseau entier est observé. **Le fait tient, même si l'expérience de 1967 le prouvait mal.**

Pourquoi le monde est petit

Le calcul de coin de table

Si chacun a $\bar{k}$ contacts sans recoupement, le nombre de personnes atteintes en ℓ pas vaut $\bar{k}^\ell$.

Atteindre n personnes demande donc

$$\ell \approx \frac{\ln n}{\ln \bar{k}}$$

Sur la population mondiale

Avec $n = 8 \times 10^9$ et $\bar{k} = 100$:

$$\ell \approx \frac{22,8}{4,6} \approx 5$$

Intuition

Multiplier la population par mille n'ajoute que **trois pas**.

C'est cela, le petit monde : pas que les distances soient courtes, mais qu'elles croissent extraordinairement lentement.

Le problème que cet argument ignore

Les contacts se recourent

Vos amis se connaissent entre eux : le clustering est élevé, donc $\bar{k}^\ell$ surestime largement l'atteinte.

Or **un réseau très clusterisé a des distances longues**, pas courtes. Un réseau régulier en anneau a un diamètre de l'ordre de n .

Le paradoxe qui reste à résoudre

Les réseaux réels ont **à la fois** un clustering élevé — comme un anneau — et des distances courtes — comme un graphe aléatoire.

Aucun des deux modèles ne produit les deux à la fois. C'est l'énigme que le chapitre 9 résoudra en une ligne.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Les grands réseaux ont une **composante géante** qui contient l'essentiel des nœuds.
2. Le **BFS** calcule les distances en $O(n + m)$ par sommet.
3. Sur notre réseau : diamètre 4, rayon 2, **centre** = $\{4\}$.
4. **Milgram (1967)** : cinq intermédiaires — mais sur 64 chaînes abouties sur 296.
5. Facebook (2016) confirme sans biais : distance moyenne 3,57.
6. La distance croît comme $\ln n / \ln \bar{k}$: **très lentement**.

La suite

Le chapitre 8 construit le premier modèle de formation : on relie chaque paire au hasard, et l'on regarde ce qui en sort. Ce sera à la fois très instructif et manifestement faux.