

Théorie des réseaux

Chapitre 5 : Les centralités spectrales



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

L'idée réursive

La centralité de vecteur propre

Katz et Bonacich

PageRank

Choisir sa centralité

Ce qu'il faut retenir

L'idée réursive

Une définition circulaire, et pourtant bien posée

Est important celui dont les voisins sont importants.

$$x_i \propto \sum_j A_{ij} x_j$$

Pourquoi cela n'est pas un cercle vicieux

En posant $\lambda x_i = \sum_j A_{ij} x_j$, on reconnaît

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

La définition circulaire est une équation aux valeurs propres — et elle a une solution.

La centralité de vecteur propre

Perron-Frobenius

Si le graphe est connexe, la plus grande valeur propre λ_1 de $\mathbf{A}$ est **simple**, et son vecteur propre peut être choisi **strictement positif**.

La définition

$$C_E(i) = \frac{x_i}{\max_j x_j}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} > 0$$

Ce que garantit le théorème

Sans lui, rien ne dit que le vecteur propre serait positif — une centralité négative n'aurait aucun sens.

La connexité est donc une condition de possibilité, pas un confort.

La symétrie fait le travail

Le réseau est symétrique par $1 \leftrightarrow 7, 2 \leftrightarrow 6, 3 \leftrightarrow 5, 4 \leftrightarrow 4$.

Donc $x_1 = x_2 = x_6 = x_7 = a, x_3 = x_5 = b, x_4 = c$.

Trois équations

$$\lambda a = a + b \quad \lambda b = 2a + c \quad \lambda c = 2b$$

En éliminant a et c :

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 \approx 2,343$$

Les centralités

$$a = \frac{b}{\lambda_1 - 1} = 0,745 b \quad c = \frac{2b}{\lambda_1} = 0,854 b$$

Nœud	1, 2, 6, 7	3, 5	4
C_E	0,745	1,000	0,854

Un quatrième classement, encore différent

Le nœud 4 n'est **plus premier** : il est deuxième, derrière 3 et 5.

Il n'a que deux voisins; ce sont les meilleurs du réseau, ce qui le hisse au-dessus des périphériques — mais pas au-dessus des hubs eux-mêmes.

Katz et Bonacich

Le problème du vecteur propre

Deux défauts

Sur un graphe **orienté**, un nœud sans lien entrant reçoit 0, et propage 0 à tous ses successeurs.

Sur un graphe **fragmenté**, toute la centralité se concentre dans une seule composante.

La centralité de Katz, 1953

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{x} + \beta \mathbf{1} \quad \implies \quad \mathbf{x} = \beta (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}$$

Chacun reçoit une dotation β **indépendamment du réseau**, puis la propage avec un facteur d'atténuation α .

La condition sur alpha

Il faut $\alpha < 1/\lambda_1$, sans quoi la série $\sum_r \alpha^r \mathbf{A}^r$ diverge.

Sur notre réseau : $\alpha < 1/2,343 = 0,427$. Le rayon spectral fixe la limite de propagation.

Le développement en série

$$(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{A} + \alpha^2 \mathbf{A}^2 + \dots$$

La lecture

$C_K(i)$ compte **tous les parcours** aboutissant à i , pondérés par α^{longueur} .

Un voisin direct compte α , un voisin de voisin α^2 , et ainsi de suite. **L'influence décroît avec la distance, à un rythme qu'on choisit.**

Bonacich, 1987

Bonacich autorise $\alpha < 0$: l'influence des voisins devient **négative**.

C'est le bon modèle quand la relation est **concurrentielle** : avoir des voisins puissants affaiblit. Le chapitre 12 en fera l'équilibre d'un jeu.

PageRank

Brin et Page, 1998

$$x_i = \frac{1-d}{n} + d \sum_{j \rightarrow i} \frac{x_j}{k_j^{\text{out}}}$$

avec $d \approx 0,85$, le facteur d'amortissement.

Deux différences avec Katz

La division par k_j^{out} : un nœud qui pointe vers mille autres transmet mille fois moins à chacun. Le vote est **divisé**, non dupliqué.

Le terme $(1-d)/n$: à chaque pas, le marcheur saute au hasard n'importe où, ce qui évite les puits absorbants.

Une loi stationnaire

x_i est la fraction du temps qu'un marcheur aléatoire passe en i , s'il suit les liens avec probabilité d et saute au hasard avec probabilité $1 - d$.

Ses usages hors du web

Classement des revues scientifiques par citations, mesure d'importance systémique d'une banque, hiérarchie de secteurs dans un tableau entrées-sorties.

Partout où l'importance se transmet en se divisant, PageRank est la mesure adaptée.

Choisir sa centralité

Quelle mesure pour quelle question

Question	Mesure
Combien de partenaires directs ?	Degré
Qui apprend le plus vite ?	Proximité
Qui contrôle le passage ?	Intermédierité
Qui est bien entouré ?	Vecteur propre
Qui reçoit un vote divisé ?	PageRank

La règle générale

On choisit la centralité d'après le mécanisme économique, jamais d'après la commodité du calcul.

Un rapport qui donne cinq centralités sans dire laquelle répond à la question n'a rien mesuré.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. « Important si les voisins le sont » s'écrit $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$.
2. **Perron-Frobenius** garantit un vecteur propre positif si le graphe est connexe.
3. Sur notre réseau : $\lambda_1 \approx 2,343$, et $C_E(4) = 0,854$ contre 1,000 pour 3 et 5.
4. **Katz** ajoute une dotation propre et exige $\alpha < 1/\lambda_1$.
5. **Bonacich** autorise $\alpha < 0$: le cas concurrentiel.
6. **PageRank** divise le vote par le degré sortant : c'est une loi stationnaire de marche aléatoire.

La suite

Le chapitre 6 quitte les nœuds pour le réseau entier : sa densité, sa tendance à fermer les triangles, et sa manière d'apparier les degrés.