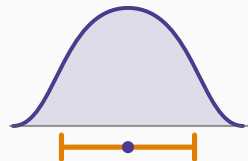


Statistique inférentielle

Chapitre 7 : Les qualités d'un estimateur



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Trois qualités

La convergence

L'efficacité

L'erreur quadratique moyenne

Ce qu'il faut retenir

Trois qualités

Ce que l'on demande à un estimateur

Les trois critères

Qualité	Ce qu'elle exige
Sans biais	il vise le bon point : $E(\hat{\theta}) = \theta$
Convergent	il s'améliore quand n grandit
Efficace	il est le moins dispersé de sa catégorie

Elles ne se déduisent pas les unes des autres

Un estimateur peut être sans biais et ne pas converger. Il peut converger et rester biaisé à distance finie.

Les trois se vérifient séparément — et, comme on le verra, elles peuvent entrer en conflit.

La convergence

Estimateur convergent

$\hat{\theta}$ est **convergent** si sa valeur se rapproche de θ quand n augmente indéfiniment.

Condition suffisante, et commode : le biais tend vers zéro **et** la variance tend vers zéro.

La moyenne d'échantillon

Biais nul quel que soit n , et

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0$$

C'est la loi des grands nombres, chapitre 20 des probabilités : $\bar{X}$ est convergent.

Une distinction opérationnelle

La convergence est une propriété **asymptotique** : elle décrit ce qui se passe à l'infini.

Un gestionnaire ne travaille jamais à l'infini. Il travaille sur cinquante observations, et ce qui l'intéresse est la précision à **cette taille-là**.

Un estimateur convergent peut être inutilisable

Sur nos salaires, $\sigma/\sqrt{n}$ vaut 821 dirhams à $n = 10$. L'estimateur est convergent, sans biais, irréprochable en théorie — et incapable de fonder la moindre décision salariale.

La convergence garantit qu'une méthode n'est pas absurde; elle ne garantit pas qu'elle soit utile.

L'efficacité

Estimateur efficace

Entre deux estimateurs sans biais, le plus **efficace** est celui de plus petite variance.

Moyenne contre médiane

Pour une population normale, tous deux estiment m sans biais. Mais

$$V(\text{médiane}) \approx \frac{\pi}{2} V(\bar{X}) \approx 1,57 V(\bar{X})$$

La médiane est 57 % plus dispersée : à précision égale, elle exige un échantillon **une fois et demie plus grand**.

Le compromis efficacité-robustesse

La supériorité de la moyenne suppose une population normale et **sans valeurs aberrantes**.

Une seule saisie erronée — un salaire tapé à **75 000** au lieu de **7 500** — déplace la moyenne de plusieurs dizaines de dirhams. La médiane, elle, ne bouge pas.

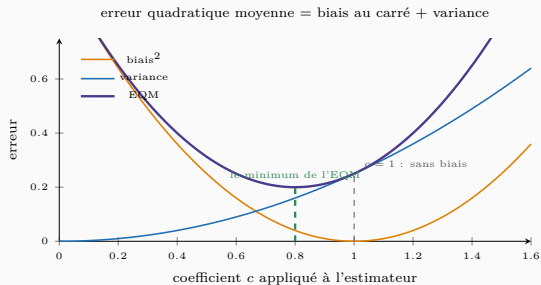
La règle de choix

Données propres et distribution régulière : **la moyenne**, plus efficace.

Données réelles, mal contrôlées, à queues épaisses : **la médiane**, moins efficace mais robuste. C'est exactement pourquoi les revenus se publient en médiane.

L'erreur quadratique moyenne

Un critère qui réunit les deux



Un résultat qui dérange

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = [\text{biais}(\hat{\theta})]^2 + V(\hat{\theta})$$

L'estimateur sans biais est en $c = 1$.
Mais le minimum de l'erreur totale est à sa gauche.

Accepter un peu de biais peut réduire l'erreur totale. On échange du biais contre de la variance.

C'est le principe des estimateurs *rétrécis*, et c'est aussi celui de la régression pénalisée que rencontreront ceux qui iront jusqu'à l'apprentissage statistique.

En licence, on s'en tient aux estimateurs sans biais — mais il faut savoir que ce n'est pas l'unique critère.

Erreur quadratique moyenne

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = [\text{biais}(\hat{\theta})]^2 + V(\hat{\theta})$$

Une seule mesure de l'erreur totale

Le biais dit où l'on vise; la variance dit comment on groupe. L'EQM les additionne dans la même unité.

C'est le critère qui permet de comparer un estimateur biaisé mais précis à un estimateur sans biais mais dispersé — ce qu'aucun des deux critères ne permettait séparément.

Le minimum n'est pas en zéro de biais

Sur la figure, le minimum de l'EQM se trouve à **gauche** de $c = 1$, c'est-à-dire du côté des estimateurs légèrement biaisés.

Accepter un peu de biais peut réduire l'erreur totale.

Où cela sert réellement

C'est le principe des estimateurs **rétrécis**, et celui de la régression pénalisée qu'emploient tous les modèles de prévision modernes.

En licence, on s'en tient aux estimateurs sans biais — c'est la convention. Mais il faut savoir que ce n'est pas un impératif mathématique : **c'est un choix, et il a un coût.**

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Trois qualités : **sans biais**, **convergent**, **efficace** — indépendantes les unes des autres.
2. Convergent signifie que biais et variance tendent vers zéro quand n grandit.
3. La convergence est asymptotique; elle ne dit rien de la précision à $n = 50$.
4. **Efficace** : de plus petite variance parmi les estimateurs sans biais.
5. La moyenne est plus efficace que la médiane, mais la médiane est **robuste** aux valeurs aberrantes.
6. $\text{EQM} = \text{biais}^2 + \text{variance}$: un peu de biais peut réduire l'erreur totale.

La suite

Nous savons juger un estimateur. Nous ne savons toujours pas d'où il sort : pourquoi $\bar{X}$ pour m , et que faire pour un paramètre moins évident ?

Le chapitre 8 donne les deux méthodes qui **construisent** un estimateur au lieu de le deviner.