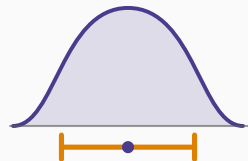


Statistique inférentielle

Chapitre 10 : L'intervalle pour une moyenne



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La construction

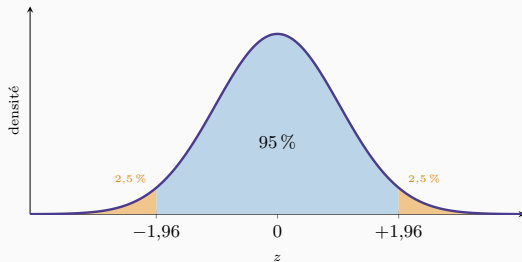
Le cas réel

Ce qu'il faut retenir

La construction

L'inégalité, et son retournement

la loi de la moyenne centrée réduite, et les deux quantiles qui découpent 95 %



La construction, en trois lignes

$$P\left(-1,96 \leq \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1,96\right) = 0,95$$

On isole m au centre, sans rien changer d'autre :

$$P\left(\bar{X} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$$

L'intervalle n'est pas une idée nouvelle : c'est la même inégalité, retournée.

Ce qui est aléatoire reste $\bar{X}$; m n'a jamais bougé.

La formule

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

avec $z_{0,025} = 1,96$ pour une confiance de 95 %.

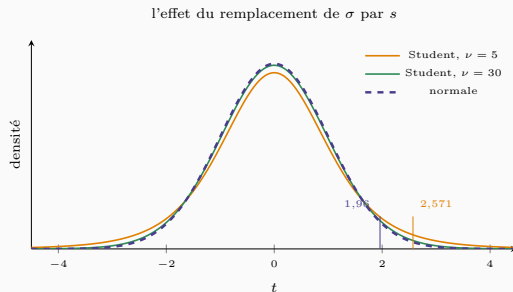
Un cas d'école, et il faut le dire

Connaître σ sans connaître m est une situation artificielle : les deux se calculent sur les mêmes données.

Cette formule sert de point de départ pédagogique, et s'emploie réellement dans un seul cas — un processus industriel dont la dispersion est stabilisée et documentée de longue date.

Le cas réel

Quand σ est inconnu



Pourquoi Student et non la normale

On ne connaît jamais σ : on le remplace par s , calculé sur le même échantillon.

Cette substitution ajoute de l'incertitude — et l'intervalle doit être **plus large** pour rester à 95 %.

Le prix de l'ignorance

$\nu = 5$: 2,571 au lieu de 1,96, soit 31 % de largeur en plus.

$\nu = 30$: 2,042, soit 4 %.

$\nu = 100$: 1,984, soit 1 %.

Au-delà de trente observations, la distinction cesse d'avoir un intérêt pratique.

L'intervalle de Student

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

où s est l'écart-type corrigé, calculé en divisant par $n - 1$.

Deux modifications, pas une

On remplace σ par s — c'est la première. Et l'on change de table, passant de la normale à Student — c'est la seconde.

Oublier la seconde donne un intervalle **trop étroit**, donc un niveau de confiance réel inférieur à celui annoncé. L'erreur est invisible et flatteuse : c'est ce qui la rend fréquente.

Nos cinquante salariés, pas à pas

$$\bar{x} = 7\,005,80 \quad s = 2\,250,98 \quad n = 50$$

1. L'erreur-type : $s/\sqrt{n} = 2\,250,98/7,071 = 318,34$.
2. Le quantile : $\nu = 49$ degrés de liberté, $t_{0,025;49} = 2,010$.
3. La demi-largeur : $2,010 \times 318,34 = 639,86$.

$$IC_{95\%} = [6\,365,94 ; 7\,645,66]$$

Nous connaissons la réponse

$m = 7\,158,26$, et l'intervalle est $[6\,365,94 ; 7\,645,66]$.

Le paramètre est bien dedans. La méthode a fonctionné — cette fois. La figure du chapitre 9 rappelle qu'elle échoue trois à cinq fois sur cent.

Ce que l'on peut en dire

La demi-largeur vaut 640 dirhams, soit 9 % de la moyenne. C'est large pour négocier une grille salariale au dirham près, et suffisant pour se comparer à un secteur.

La question « est-ce assez précis ? » n'a pas de réponse statistique : elle dépend de la décision à prendre.

Quand la formule est-elle légitime

Situation	Condition
Population normale	aucune, quel que soit n
Population quelconque	$n \geq 30$ (théorème central limite)
Petit échantillon non normal	aucune formule simple

Le troisième cas est le vrai problème

Sur quinze observations issues d'une distribution très dissymétrique, ni la normale ni Student ne s'appliquent.

Les solutions existent — méthodes non paramétriques, rééchantillonnage — mais elles dépassent ce cours. Le réflexe correct est alors de **le dire**, plutôt que d'appliquer une formule invalide.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. L'intervalle s'obtient en **retournant** l'inégalité sur $\bar{X}$; rien de nouveau n'est introduit.
2. σ connu : $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$ — un cas d'école.
3. σ inconnu : $\bar{x} \pm t_{\alpha/2; n-1} s / \sqrt{n}$ — le cas réel.
4. Deux modifications à la fois : s à la place de σ , **et** Student à la place de la normale.
5. Sur nos données : $[6\,365,94 ; 7\,645,66]$, qui contient bien $m = 7\,158,26$.
6. Validité : population normale, ou $n \geq 30$. En dessous et hors normalité, il n'y a pas de formule simple.

La suite

Un taux de rebut, une part de marché, une dispersion de qualité ne sont pas des moyennes.

Le chapitre 11 traite les deux autres paramètres du cours — la **proportion** et la **variance** — et l'un des deux réserve une surprise.