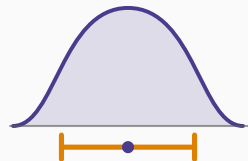


# Statistique inférentielle

## Chapitre 6 : Estimateur et biais



---

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Estimer

Le biais

Ce qu'il faut retenir

Estimer

---

### Estimateur et estimation

Un **estimateur** est une *recette* : une formule appliquée à un échantillon quelconque. C'est une variable aléatoire, notée  $\hat{\theta}$ .

Une **estimation** est le *nombre* obtenu sur l'échantillon dont on dispose.

### Sur nos données

L'estimateur :  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$ .

L'estimation :  $\bar{x} = 7\,005,80$  dirhams.

La recette est la même pour tout le monde ; le nombre change avec l'échantillon.

# Pourquoi la distinction compte

## On juge la recette, jamais le nombre

7 005,80 n'est ni bon ni mauvais : c'est un nombre. On ne peut pas dire s'il est proche de  $m$ , puisqu'on ignore  $m$ .

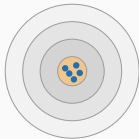
En revanche, on peut étudier la **méthode** : où se situe-t-elle en moyenne, de combien varie-t-elle ? Ce sont des questions sur la loi de  $\hat{\theta}$  — et le chapitre 3 nous a appris à y répondre.

## Les estimateurs usuels

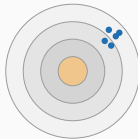
| Paramètre  | Estimateur | Sur nos données |
|------------|------------|-----------------|
| $m$        | $\bar{X}$  | 7 005,80        |
| $p$        | $F$        | 0,26            |
| $\sigma^2$ | $s^2$      | 5 066 894       |
| $\sigma$   | $s$        | 2 250,98        |

## Le biais

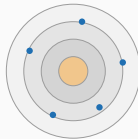
---



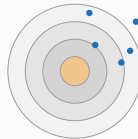
**sans biais, précis**  
l'estimateur idéal



**biaisé, précis**  
se trompe toujours  
de la même façon



**sans biais, imprécis**  
juste en moyenne,  
inutilisable une fois



**biaisé, imprécis**  
le pire des cas

Le centre de la cible est le paramètre  $m$  ; chaque impact est une estimation obtenue sur un échantillon différent.

Le **biais** est la distance entre le centre du nuage d'impacts et le centre de la cible :  $\text{biais}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ . La **variance** est l'étalement du nuage. Un estimateur n'est bon que si les deux sont petits — et l'on verra au chapitre 7 que l'on doit parfois *échanger* un peu de l'un contre l'autre.

Le deuxième cas est le plus traître : il est régulier, donc rassurant, et faux à chaque fois.

## Biais d'un estimateur

$$\text{biais}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

L'estimateur est dit **sans biais** lorsque ce nombre est nul : en moyenne sur tous les échantillons possibles, il vise juste.

## Sans biais ne veut pas dire exact

Un estimateur sans biais se trompe presque toujours — parfois beaucoup. Il ne se trompe pas *systématiquement dans le même sens*.

La troisième cible de la figure le montre : sans biais, mais si dispersée qu'un tirage unique n'apprend rien.

### Trois vérifications

$$E(\overline{X}) = m \quad E(F) = p \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Les deux premières viennent du chapitre 3, la troisième du chapitre 4 — c'est le rôle du  $n - 1$ .

### Un piège classique

$s^2$  est sans biais pour  $\sigma^2$ . Mais  $s$  n'est pas sans biais pour  $\sigma$ .

La racine carrée est une fonction concave : elle déforme l'espérance. En pratique le biais est faible et l'on s'en accommode — mais il faut savoir que « sans biais » ne traverse pas les transformations.

## Un estimateur biaisé, et pourquoi il l'est

La variance divisée par  $n$

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Sur nos simulations à  $n = 10$  : 6 107 414 au lieu de 6 750 122, soit exactement  $0,90 \sigma^2$ .

Le sens du biais compte autant que sa taille

Ce biais est **négatif** : la dispersion est sous-estimée.

En gestion des risques, un estimateur qui sous-estime la volatilité est bien plus dangereux qu'un estimateur imprécis. **Un biais rassurant est le pire de tous** — c'est celui qu'on ne cherche pas à corriger.

Ce qu'il faut retenir

---

## Cinq points

1. Un **estimateur** est une formule aléatoire; une **estimation** est le nombre obtenu.
2. On juge la méthode, jamais le nombre : c'est la loi de  $\hat{\theta}$  que l'on étudie.
3.  $\text{biais}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ ; il est nul pour  $\bar{X}$ ,  $F$  et  $s^2$ .
4. **Sans biais n'est pas exact** : l'estimateur se trompe, mais pas toujours dans le même sens.
5. Le biais de la variance non corrigée vaut  $-\sigma^2/n$  : il **sous-estime** le risque.

## La suite

L'absence de biais ne suffit pas : la troisième cible de la figure était sans biais et pourtant inutilisable.

Il faut aussi que l'estimateur soit **précis**, et qu'il s'améliore quand l'échantillon grandit. C'est l'objet du chapitre 7.