

Statistique descriptive

Chapitre 6 : Les indicateurs de tendance centrale



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La question

Le mode

La médiane

La moyenne arithmétique

Les autres moyennes

Choisir

Ce qu'il faut retenir

La question

Ce qu'on cherche

Un **indicateur de tendance centrale** est une valeur unique qui résume « où se situe » l'ensemble des observations.

Il répond à : autour de quoi les données se rassemblent-elles ?

Trois réponses, trois définitions du mot central

- Le **mode** : la valeur la plus **fréquente**.
- La **médiane** : la valeur qui **partage** l'effectif en deux.
- La **moyenne** : la valeur qui **équilibre** la somme.

Ces trois réponses ne coïncident que si la distribution est symétrique. Dès qu'elle est asymétrique, elles divergent — et c'est précisément l'écart entre elles qui devient informatif.

Le mode

Mode

Le **mode** est la modalité de **plus grand effectif**.

Pour une variable continue, on parle de **classe modale** : la classe de plus grande **densité** — pas de plus grand effectif.

Le seul indicateur disponible pour une variable nominale

Quelle est la région « moyenne » ? La question n'a aucun sens. Quelle est la région la plus représentée ? Tanger-Tétouan, avec **36 %** des salariés.

Le mode est le seul résumé possible d'une variable nominale — et c'est pour cela qu'il figure en premier.

La classe modale des salaires

La densité est maximale dans $[6\,000 ; 8\,000[: d = 0,0830$.

C'est bien la classe modale, alors que la classe $[4\,000 ; 6\,000[$ a presque le même effectif – 157 contre 166 – avec la même amplitude ici.

Trois limites

1. Il peut ne pas être **unique** : une distribution bimodale a deux modes.
2. Il dépend entièrement du **découpage en classes** : changer les bornes change le mode.
3. Il **ignore tout le reste** de la distribution.

Mais une bimodalité est une information précieuse

Deux bosses sur un histogramme de salaires signifient presque toujours **deux populations mélangées** : cadres et employés, temps plein et temps partiel, deux établissements.

Le bon réflexe n'est alors pas de calculer un indicateur global, mais de **séparer les deux groupes** et de les décrire chacun.

La médiane

Médiane

La **médiane** Me est la valeur qui partage la population **en deux parties d'effectifs égaux** : la moitié des individus sont en dessous, la moitié au-dessus.

Le calcul sur données brutes

On ordonne les n valeurs.

- Si n est **impair** : Me est la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$.
- Si n est **pair** : Me est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$.

Sur nos 500 salariés

$n = 500$ est pair. On prend la moyenne des salaires de rangs 250 et 251 :

$$Me = 6\,770 \text{ dirhams}$$

L'interpolation linéaire

On repère la classe où F franchit 0,5, puis :

$$Me = e_{i-1} + a_i \times \frac{0,5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}$$

Le calcul détaillé

F passe de 0,376 à 0,708 dans la classe [6 000 ; 8 000[.

$$Me = 6\,000 + 2\,000 \times \frac{0,500 - 0,376}{0,708 - 0,376} = 6\,000 + 2\,000 \times 0,3735 = 6\,747$$

Contre 6 770 sur les données exactes : l'erreur d'équirépartition vaut 23 dirhams.

La médiane est robuste

La médiane ne dépend que du **rang** des observations, pas de leur valeur.

Remplacer le salaire le plus élevé, 19 050 dirhams, par 190 050 dirhams : la médiane ne bouge **pas d'un dirham**. La moyenne, elle, passe de 7 158 à 7 500.

Pourquoi les revenus se publient en médiane

Toutes les distributions de revenus, de patrimoines, de prix de l'immobilier sont fortement asymétriques : quelques valeurs très élevées tirent la moyenne.

Le **salaire médian** décrit une personne réelle : celle qui est au milieu. Le salaire moyen décrit un point d'équilibre que peu de gens occupent — ici, 56 % des salariés gagnent **moins** que la moyenne.

C'est pourquoi les institutions statistiques publient la médiane, et pourquoi les communiqués d'entreprise publient la moyenne.

La moyenne arithmétique

Moyenne arithmétique

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{ou, sur données groupées,} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i c_i = \sum_{i=1}^k f_i c_i$$

Sur nos données

$$\bar{x} = \frac{3\,579\,130}{500} = 7\,158,26 \text{ dirhams}$$

Propriété 1 : la somme des écarts est nulle

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

La moyenne est le **point d'équilibre** de la distribution : les écarts positifs compensent exactement les écarts négatifs.

Propriété 2 : linéarité

$$\overline{ax + b} = a \bar{x} + b$$

Une augmentation générale de 500 dirhams augmente la moyenne de 500 dirhams. Une hausse de 10 % la multiplie par 1,1.

Ses trois propriétés (suite)

Propriété 3 : la moyenne des sous-groupes

Si la population est partagée en groupes d'effectifs n_j et de moyennes $\bar{x}_j$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_j n_j \bar{x}_j$$

C'est le **théorème de la moyenne totale**, et il faut retenir qu'il s'agit d'une moyenne **pondérée par les effectifs**.

Vérification sur le diplôme

$$\frac{219 \times 6\,059 + 174 \times 7\,081 + 107 \times 9\,534}{500} = 7\,158$$

On retrouve bien la moyenne générale.

Attention : la moyenne simple des trois valeurs, $(6\,059 + 7\,081 + 9\,534)/3 = 7\,558$, est **fausse**. C'est l'erreur la plus fréquente sur les moyennes.

La moyenne est sensible aux valeurs extrêmes

Elle utilise **toutes** les valeurs, ce qui est sa force pour le calcul et sa faiblesse pour l'interprétation.

Une seule valeur aberrante — une erreur de saisie, un dirigeant au salaire hors norme — la déplace sensiblement. La médiane, elle, ne bronche pas.

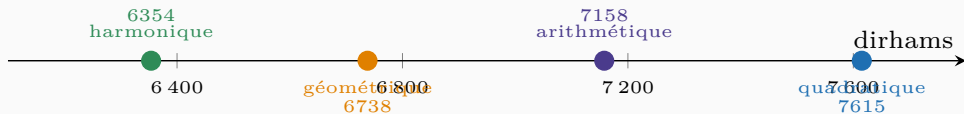
Les autres moyennes

Les définitions

Moyenne	Formule	Quand l'employer
Géométrique	$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$	des taux de croissance
Harmonique	$\bar{x}_H = \frac{1}{\sum 1/x_i}$	des rapports, des vitesses
Quadratique	$\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2}$	des écarts, des erreurs

Trois moyennes de plus (suite)

$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A \leq \bar{x}_Q$ — toujours, et dans cet ordre



Un ordre qui ne change jamais

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A \leq \bar{x}_Q$$

avec égalité si et seulement si toutes les valeurs sont identiques.

Sur nos salaires

$$6\,354 \leq 6\,738 \leq 7\,158 \leq 7\,615$$

Ce que l'écart mesure

Plus les quatre moyennes sont **écartées**, plus la distribution est dispersée. Si toutes les valeurs étaient égales, les quatre coïncideraient.

L'écart entre $\bar{x}_G$ et $\bar{x}_A$ est même une mesure classique d'inégalité — c'est le fondement de l'indice d'Atkinson, employé en économie du bien-être.

Quand chacune s'impose

La géométrie : les taux de croissance

Un chiffre d'affaires croît de $+20\%$ une année, puis de -20% l'année suivante. La croissance moyenne est-elle nulle ?

Non. $100 \rightarrow 120 \rightarrow 96$. La moyenne **arithmétique** des taux donne 0% , ce qui est faux.

Il faut la moyenne **géométrique** des coefficients multiplicateurs :

$$\sqrt{1,20 \times 0,80} = \sqrt{0,96} = 0,9798$$

soit un taux moyen de $-2,02\%$ par an. Ce qui est juste : $100 \times 0,9798^2 = 96$.

L'harmonique : les rapports

Un commercial parcourt 100 km à 80 km/h à l'aller, 100 km à 120 km/h au retour. Vitesse moyenne ?

Ce n'est pas 100 km/h. Le trajet dure $1,25 + 0,833 = 2,083$ heures pour 200 km, soit 96 km/h.

$$\bar{x}_H = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = 96$$

La quadratique : les écarts

Elle sert à moyenner des grandeurs dont le signe ne doit pas compenser : des écarts à une cible, des erreurs de prévision, des rentabilités autour de leur moyenne.

Vous la connaissez déjà sous un autre nom : appliquée aux écarts $x_i - \bar{x}$, elle **est** l'écart-type. C'est l'objet du chapitre 8.

Choisir

Lequel employer

Situation	Indicateur
Variable nominale	mode, et lui seul
Variable ordinale	mode, médiane
Distribution symétrique	moyenne
Distribution asymétrique	médiane
Valeurs aberrantes possibles	médiane
Il faut pouvoir recomposer un total	moyenne
Taux de croissance	moyenne géométrique
Rapports, vitesses	moyenne harmonique

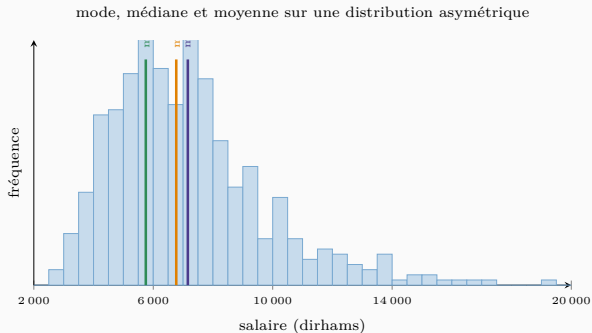
Le seul argument décisif en faveur de la moyenne

Elle est la seule qui permette de **remonter au total** : $\bar{x} \times n$ redonne la masse salariale.

C'est indispensable en comptabilité, en budget, en agrégation. La médiane, elle, ne s'additionne pas : la médiane de deux populations réunies n'est pas la moyenne des deux médianes.

Moyenne pour agréger, médiane pour décrire.

Le diagnostic par comparaison



distribution étalée **à droite** :

mode < médiane < moyenne

Les hauts salaires, peu nombreux,
tirent la moyenne vers le haut ;
la médiane, elle, ne bouge pas.

D'où la règle : pour un revenu,
publier la médiane. La moyenne
décrit une personne qui n'existe pas.

Le sens de l'écart

Configuration	Forme de la distribution
mode = médiane = moyenne	symétrique
mode < médiane < moyenne	étalée à droite
mode > médiane > moyenne	étalée à gauche

Sur nos salaires

$$5\,750 < 6\,770 < 7\,158$$

Mode, médiane, moyenne dans cet ordre : distribution **étalée à droite**. Ce que l'histogramme montrait déjà, et que le chapitre 9 chiffrera avec le coefficient d'asymétrie.

Une conséquence à retenir

Dans une distribution étalée à droite, la **majorité** des individus gagne moins que la moyenne. Ici 56 %.

« Le salaire moyen est de 7 158 dirhams » est donc une phrase exacte et trompeuse. C'est le genre de nuance qu'un économiste doit savoir signaler.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Mode** : le plus fréquent. Seul indicateur possible pour une variable nominale.
2. **Médiane** : partage l'effectif en deux. **Robuste** aux valeurs extrêmes.
3. **Moyenne** : point d'équilibre. Somme des écarts nulle, linéaire, et se recompose par groupes — **pondérée par les effectifs**.
4. Géométrique pour les **taux**, harmonique pour les **rapports**, quadratique pour les **écarts**.
5. $\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A \leq \bar{x}_Q$, toujours.
6. La position relative des trois premiers indicateurs révèle le **sens de l'asymétrie**.

La suite

La médiane coupe la distribution en deux. Rien n'empêche de la couper en quatre, en dix, en cent — et l'on obtient une description bien plus fine de la répartition.

C'est le chapitre 7 : les quantiles.