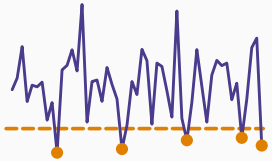
Mesure et gestion du risque de marché

Chapitre 3 : Les approches paramétriques (II) — la théorie des valeurs extrêmes



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 30 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Pourquoi une théorie à part

Les valeurs extrêmes

Les dépassements de seuil

Les raffinements

Les limites de l'EVT

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Les événements extrêmes — un krach, la faillite d'un établissement majeur — sont rares mais coûteux, et c'est précisément leur rareté qui pose problème : on dispose de très peu d'observations pour les estimer. La **théorie des valeurs extrêmes** (EVT) répond à ce défi non pas en ajustant une distribution ordinaire à l'ensemble des données, mais en exploitant des théorèmes spécifiquement conçus pour le comportement des queues.

Pourquoi une théorie à part

Le théorème central limite ne s'applique pas

Deux théories, deux objets

Les statistiques usuelles — moyenne, écart-type — sont gouvernées par le théorème central limite, qui décrit la **tendance centrale**. Les extrêmes obéissent à une famille distincte de théorèmes, les théorèmes de valeurs extrêmes, qui décrivent le comportement du **maximum** d'un échantillon, pas sa moyenne.

Le piège de l'approche naïve

Ajuster arbitrairement une distribution à l'ensemble des données privilégie mécaniquement le centre, là où les observations abondent, au détriment des extrêmes, toujours rares. Une distribution bien choisie pour le centre peut donc être franchement inadaptée pour la queue.

Les valeurs extrêmes

La distribution GEV

Le théorème de Fisher-Tippett

Soit M_n le maximum d'un échantillon de taille n tiré d'une distribution inconnue $F(x)$. Pour n grand, la distribution de M_n, convenablement normalisée, converge vers la distribution **généralisée des valeurs extrêmes** (GEV), à trois paramètres : la position μ, l'échelle σ, et l'indice de queue ξ, qui gouverne l'épaisseur de la queue.

Trois cas particuliers

Si $\xi > 0$, la GEV est une loi de **Fréchet** — queue épaisse, cas typique des rendements financiers, pour lesquels ξ est généralement positif mais inférieur à 0,35. Si $\xi = 0$, c'est la loi de **Gumbel** — queue exponentielle, celle des lois normale et lognormale. Si $\xi < 0$, c'est la loi de **Weibull**, à queue plus légère que la normale — rarement pertinente en finance.

Un paramètre décisif

Les quantiles de Fréchet sont très sensibles à la valeur de ξ et croissent avec lui, tandis que ceux de Gumbel n'en dépendent pas. Utiliser Gumbel revient à affirmer, implicitement, que ξ n'est pas significativement différent de zéro — une hypothèse qu'il faut vérifier, pas supposer.

Choisir entre Fréchet et Gumbel

Trois critères de choix

On peut choisir la distribution dans le **domaine d'attraction** de la loi parente si celle-ci est identifiable — une loi de Student attire vers Fréchet, une loi normale vers Gumbel. On peut tester la significativité de l'indice de queue. Ou, plus prudemment encore, choisir systématiquement **Fréchet** par défaut : sous-estimer le risque extrême coûte plus cher que le surestimer.

Estimer les paramètres

Trois familles de méthodes

Le **maximum de vraisemblance** est statistiquement bien fondé mais exige une optimisation numérique. La **régression** de Gumbel, plus simple, ordonne les maxima observés et régresse leurs quantiles théoriques contre leurs rangs. Les méthodes **semi-paramétriques**, dont l'estimateur de **Hill**, se concentrent sur les k observations les plus extrêmes.

Le piège du choix de k

L'estimateur de Hill dépend d'un seuil k — le nombre d'observations extrêmes retenues — dont le choix reste largement arbitraire. Un « graphique de Hill » stable pour de petites valeurs de k peut se révéler totalement instable à des valeurs plus élevées : c'est le redoutable **graphique d'horreur de Hill**, qui ne fournit alors aucune indication fiable sur la vraie valeur de l'indice de queue.

Les dépassements de seuil

La distribution de Pareto généralisée

Le principe

Plutôt que le maximum d'un bloc, l'approche des **dépassements de seuil** (POT) modélise directement la distribution des excès au-delà d'un seuil élevé u. Le théorème de Gnedenko–Pickands–Balkema–de Haan garantit que, pour u suffisamment élevé, cette distribution d'excès converge vers une **loi de Pareto généralisée** (GPD), à deux paramètres seulement : une échelle β et le même indice de queue ξ.

La VaR sous POT

En combinant la GPD avec la proportion d'observations sous le seuil, on obtient

$$\mathrm{VaR}_\alpha = u + \frac{\beta}{\xi}\left[\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\xi} - 1\right],$$

où N_u est le nombre d'observations dépassant le seuil u sur les n observations totales.

Un calcul numérique

Avec $\beta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}15$, $u = 2\,\%$ et $N_u/n = 4\,\%$, la VaR à 99,5 % vaut 3,95 % et l'ES correspondante 5,24 %. À 99,9 %, elles montent respectivement à 5,94 % et 7,58 % — l'écart entre les deux niveaux illustre à quel point la queue s'épaissit rapidement au-delà du seuil bâlois usuel.

Choisir le seuil

Le même arbitrage que pour k

Le choix du seuil u répond à un arbitrage identique à celui du paramètre k de Hill : trop bas, le théorème GPBdH s'applique mal ; trop haut, trop peu d'observations subsistent pour une estimation fiable. C'est le point faible reconnu de l'approche POT, structurellement subjectif.

GEV ou POT ?

Deux manifestations d'une même théorie

Les deux approches partagent le même fondement théorique et donnent généralement des résultats proches. La GEV comporte un paramètre de plus et, dans sa version usuelle par maxima de blocs, gaspille de l'information — un bloc peut contenir plusieurs extrêmes dont un seul est retenu. Le POT, en contrepartie, exige de choisir un seuil, problème qui ne se pose pas pour la GEV.

Les raffinements

Les données dépendantes

Le problème du regroupement

Les rendements financiers ne sont pas indépendants : la volatilité se regroupe, violant l'hypothèse iid sur laquelle repose l'EVT de base. Deux réponses : appliquer la GEV à des **maxima de blocs** suffisamment longs pour effacer la dépendance — au prix d'une perte d'information — ou estimer d'abord un modèle GARCH et appliquer l'EVT à ses **résidus**, supposés indépendants.

Au-delà d'un seul facteur

La théorie multivariée des valeurs extrêmes (MEVT) modélise la dépendance entre événements extrêmes simultanés sur plusieurs marchés — un krach en entraînant souvent un autre. Les corrélations linéaires, adaptées à la tendance centrale, ne suffisent plus : il faut des **copules** de valeurs extrêmes.

La malédiction de la dimension

Avec deux variables indépendantes dont chacune est extrême une fois sur cent, un événement extrême **simultané** ne survient qu'une fois sur dix mille ; avec trois variables, une fois sur un million. Chaque dimension supplémentaire coûte cher en données disponibles et en paramètres à estimer — la MEVT reste donc praticable pour un nombre restreint de dimensions seulement.

Les limites de l’EVT

Ce qu'elle apporte, ce qu'elle ne peut pas apporter

Une théorie sur mesure, mais fondée sur peu de données

L'EVT offre l'approche la plus rigoureusement adaptée à l'estimation des risques extrêmes — mais elle porte, par définition, sur des observations rares. Ses intervalles de confiance restent donc **larges**, non par défaut de la théorie, mais par pénurie inévitable de données.

Un risque de modèle considérable

L'application de l'EVT exige des choix — seuil, méthode d'estimation, traitement de la dépendance — largement subjectifs et dont la validité est difficile à vérifier. Les résultats restent sensibles aux petits échantillons, aux biais et aux non-linéarités. L'EVT guide, mais ne dispense jamais du jugement.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

Les extrêmes obéissent à leurs propres théorèmes, distincts du théorème central limite. La distribution **GEV**, à trois cas — **Fréchet** (queue épaisse, le cas financier typique), Gumbel, Weibull —, décrit le maximum d'un échantillon ; l'approche des **dépassements de seuil** (POT), via la loi de **Pareto généralisée**, en est l'équivalent pour les excès au-delà d'un seuil. Les deux exigent un choix arbitraire — le nombre d'observations extrêmes k pour Hill, le seuil u pour POT — dont dépend fortement le résultat. Les raffinements traitent la dépendance temporelle (blocs, résidus GARCH) et la dimension multivariée (copules), au prix d'une complexité croissante. Dans tous les cas, la rareté des extrêmes impose des intervalles de confiance larges : l'EVT est un guide rigoureux, non une martingale.