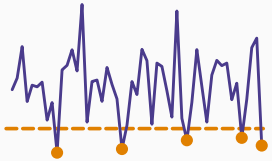
Mesure et gestion du risque de marché

Chapitre 9 : La modélisation ascendante des corrélations



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 30 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Les fonctions copules

La copule gaussienne

Simuler le défaut corrélé

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Comment corréler plusieurs actifs — potentiellement des centaines — sans devoir spécifier leur loi jointe complète ? La réponse tient en un mot : la **copule**. Popularisée en finance par David Li en 2000 pour corréler les défauts dans un CDO, saluée comme une solution élégante, puis accusée d'avoir aggravé la crise de 2007-2009, la copule gaussienne reste l'outil de référence de la modélisation ascendante de la corrélation.

Les fonctions copules

Joindre des lois marginales

Une fonction copule transforme une fonction à n dimensions sur $[0, 1]$ en une fonction à une dimension. Formellement, si $G_i(u_i)$ sont des lois marginales uniformes, il existe une copule C telle que $C[G_1(u_1), \dots, G_n(u_n)] = F_n[F_1^{-1}(G_1(u_1)), \dots, F_n^{-1}(G_n(u_n))]$, où F_n est la fonction de répartition jointe et ρ_F sa structure de corrélation. Autrement dit : étant données des lois marginales, la copule permet de les assembler en une loi jointe, sans devoir spécifier directement cette dernière.

Une popularité en dents de scie

Introduites en finance en 2000, les copules ont d'abord été saluées comme la solution élégante à un problème redoutable : corréler par une seule fonction, fût-elle multidimensionnelle, les 125 actifs typiques d'un CDO. Elles sont tombées en disgrâce dès 2007, largement blâmées — à tort ou à raison — pour leur rôle dans la crise.

Un ou deux paramètres

Les copules à un paramètre comprennent la copule **gaussienne** et la famille **archimédienne** (Gumbel, Clayton, Frank). Les copules à deux paramètres incluent la Student-t, la Fréchet, et la Marshall-Olkin. La copule gaussienne bivariée est strictement à un paramètre — le coefficient de corrélation — tandis que sa version multivariée peut incorporer une matrice de corrélation complète.

La copule gaussienne

Sa définition

La formule

La copule gaussienne s'écrit

$$C_{Ga}[G_1(u_1), \dots, G_n(u_n)] = M_n[N^{-1}(G_1(u_1)), \dots, N^{-1}(G_n(u_n)); \rho],$$

où M_n est la fonction de répartition normale multivariée conjointe, ρ sa matrice de corrélation, et N^{-1} l'inverse de la loi normale standard univariée. Si les $G_i(u_i)$ sont uniformes, les $N^{-1}(G_i(u_i))$ sont normales standard et M_n est normale multivariée standard.

L'application de David Li aux défauts corrélés

La copule de temps de défaut

David Li (2000) applique la copule gaussienne aux probabilités de défaut cumulées $Q_i(t)$ de chaque entité, utilisées comme lois marginales : $C_{Ga}[Q_1(t), \dots, Q_n(t)] = M_n[N^{-1}(Q_1(t)), \dots, N^{-1}(Q_n(t)); \rho]$. Chaque probabilité cumulée de défaut est convertie, percentile à percentile, en une valeur en abscisse de la loi normale standard ; ces valeurs sont ensuite jointes par la structure de corrélation de la loi normale multivariée. C'est pourquoi ce modèle est aussi appelé « copule de temps de défaut » : elle corrèle non pas les rendements, mais les instants de défaut τ_i de chaque actif.

Deux émetteurs en difficulté

Les entreprises B et Caa affichent toutes deux des probabilités de défaut cumulées croissantes mais à rythme décroissant — 6,51 % après un an pour B, 50,01 % après dix ans ; 23,83 % après un an pour Caa, 78,54 % après dix ans. Ce profil est typique d'émetteurs déjà en difficulté : si l'entreprise survit aux prochaines années, les plus critiques, sa probabilité de défaut décroît ensuite. La conversion percentile à percentile donne, par exemple pour l'année 1, $N^{-1}(6{,}51\,\%) = -1{,}5133$ pour B et $N^{-1}(23{,}83\,\%) = -0{,}7118$ pour Caa.

L'application de David Li aux défauts corrélés (suite)

La probabilité de défaut conjoint

Avec une corrélation de défaut gaussienne de 0,4, la probabilité que B **et** Caa fassent défaut dans l'année qui vient est $M_2(-1{,}5133,\ -0{,}7118;\ \rho = 0{,}4) = 3{,}44\,\%$. La probabilité que B fasse défaut avant l'année 3 **et** Caa avant l'année 5 est $M_2(-0{,}8054,\ 0{,}2557;\ \rho = 0{,}4) = 16{,}93\,\%$ – la loi normale bivariée jointe convertit directement les deux seuils marginaux en une probabilité conjointe cohérente avec la corrélation supposée.

Simuler le défaut corrélé

Au-delà de deux actifs

Le principe de la simulation

Pour un portefeuille de n actifs, on tire un échantillon $M_n(\cdot) \in (0, 1]$ de la copule gaussienne multivariée, via une **décomposition de Choleski** de la matrice de corrélation ρ — c'est cette décomposition qui injecte la structure de dépendance dans l'échantillon. Le tirage obtenu est ensuite équilibré avec la fonction de probabilité de défaut cumulée propre à l'actif i, $Q_i(\tau)$, pour en déduire le temps de défaut simulé τ_i.

Pas de solution fermée

Il n'existe pas de formule fermée pour résoudre $Q_i(\tau_i) = M_n(\cdot)$: il faut recourir à une procédure de recherche, comme l'algorithme de Newton-Raphson, ou à une simple interpolation. Répéter cette opération des dizaines ou centaines de milliers de fois, puis moyenner les τ_i obtenus, donne une estimation du temps de défaut attendu de l'actif i — un temps qui intègre pleinement sa corrélation avec les autres actifs du portefeuille, puisque la matrice de corrélation est un intrant direct de la loi normale multivariée M_n.

Lire un temps de défaut simulé

Si un tirage aléatoire de $M_n(\cdot)$ vaut 35 %, on égalise cette valeur à la fonction de marché $Q_i(\tau)$ et l'on trouve le temps de défaut correspondant, $\tau_i = 5{,}5$ ans. Répétée pour chaque tirage, cette lecture graphique — ou sa résolution numérique équivalente — est le cœur du moteur de simulation.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

Une copule joint des lois marginales univariées en une loi jointe multivariée, sans devoir la spécifier directement — un outil séduisant pour corréler un grand nombre d'actifs par une seule fonction, aussi multidimensionnelle soit-elle. La **copule gaussienne**, la plus utilisée en finance, convertit chaque probabilité cumulée de défaut en une valeur normale standard via N^{-1}, puis applique une structure de corrélation empruntée à la loi normale multivariée. Appliquée aux temps de défaut par David Li en 2000, elle permet de calculer des probabilités de défaut conjoint directes pour deux actifs, ou de **simuler** le temps de défaut d'un portefeuille entier par décomposition de Choleski, moyennant une procédure de recherche numérique en l'absence de solution fermée. Reste que cette élégance mathématique a un coût : réduire toute la dépendance entre défauts à un unique coefficient de corrélation gaussien s'est révélé, durant la crise de 2007-2009, une simplification dangereuse — question que les chapitres suivants, consacrés au comportement empirique et à la structure par terme, permettront d'approfondir.