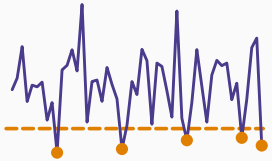
Mesure et gestion du risque de marché

Chapitre 7 : Les bases de la corrélation



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 30 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Aux origines de la corrélation

Le risque de corrélation

La corrélation, partout

La corrélation, un risque

Une question de terminologie

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Après avoir mesuré, testé et cartographié le risque, il reste à comprendre ce qui relie les positions entre elles. La corrélation est l'ingrédient le plus discret et le plus dangereux du risque de marché : elle façonne silencieusement la VaR, se rappelle brutalement au souvenir des gérants en période de crise, et a joué un rôle central dans la crise financière de 2007-2009. Ce chapitre pose les définitions et les intuitions ; les deux suivants en étudieront le comportement empirique et la modélisation.

Aux origines de la corrélation

Une paternité disputée

De Bravais à Pearson

Les fondations remontent à Bravais (1846), qui dérive sans le nommer ce qui deviendra la droite de régression. Galton (1886) construit la régression linéaire simple et découvre au passage la « régression vers la médiocrité » — ce que l'on appelle aujourd'hui le retour à la moyenne. Son élève Pearson formalise, à partir de 1900, le coefficient de corrélation comme moment produit, invente l'analyse en composantes principales, et fonde les tests d'hypothèse statistique.

Deux notions de corrélation

Statique et dynamique

Une corrélation **statique** mesure l'association entre deux ou plusieurs actifs financiers à un instant donné, ou sur une période fixée. Une corrélation **dynamique** mesure comment ces actifs évoluent ensemble **dans le temps** — un objet different, notamment mobilisé par les modèles de corrélation stochastique, puisque la corrélation elle-même se comporte de façon aléatoire et imprévisible.

Le risque de corrélation

Le risque de corrélation financier

Le risque de corrélation est le risque de perte financière résultant d'un mouvement défavorable de la corrélation entre deux ou plusieurs variables — financières ou non. La corrélation entre la dette souveraine grecque et les obligations mexicaines, entre le prix des matières premières et les taux d'intérêt, ou entre un émetteur obligataire et son assureur, en sont autant d'illustrations.

Le wrong-way risk d'un CDS

Un investisseur détient une obligation espagnole de 1 million de dollars et achète, pour s'en couvrir, un CDS auprès de BNP Paribas. Si la corrélation de défaut entre l'Espagne et BNP Paribas est **positive** — les deux entités étant européennes, il est plausible qu'elles se dégradent ensemble — l'investisseur porte un « wrong-way risk » : au moment même où le risque de défaut de l'Espagne augmente, la capacité de BNP Paribas à honorer le CDS diminue. À la limite d'une corrélation parfaite de 1, le CDS ne vaut plus rien : si l'Espagne fait défaut, l'assureur fait défaut aussi.

Définition (suite)

Une relation non monotone

La sensibilité du spread de CDS à la corrélation n'est pas linéaire : le spread décroît fortement lorsque la corrélation passe de valeurs négatives à positives, mais décroît aussi, plus légèrement, aux corrélations très négatives — un exemple de relation non monotone, où la variable dépendante ne suit pas simplement le signe de la variation de corrélation.

La corrélation, partout

Cinq terrains d'application

Investissement, trading, gestion du risque, crise, réglementation

La corrélation structure la diversification des portefeuilles, alimente des stratégies de trading dédiées, entre directement dans le calcul de la VaR, a amplifié la crise de 2007-2009, et constitue un intrant explicite des accords de Bâle. Ces cinq terrains ne sont pas indépendants : la corrélation qui protège un portefeuille en temps normal est précisément celle qui s'effondre — ou explose — en période de stress.

La variance d'un portefeuille à deux actifs

Pour un portefeuille de deux actifs X et Y de poids w_X et w_Y, l'écart-type du portefeuille est

$$\sigma_P = \sqrt{w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \operatorname{Cov}_{XY}},$$

où $\operatorname{Cov}_{XY} = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$. Plus la corrélation ρ_{XY} est faible — et surtout négative —, plus la diversification réduit le risque du portefeuille par rapport à la somme pondérée des risques individuels.

L'impact sur le ratio rendement/risque

Pour un même couple d'actifs, une corrélation très négative peut porter le ratio rendement/risque du portefeuille à environ 250 %, contre environ 50 % pour une corrélation très positive. La diversification n'est pas un simple confort théorique : elle multiplie par cinq, dans cet exemple, la performance ajustée du risque.

Options multi-actifs et corrélation

Le prix de la plupart des options « arc-en-ciel » — option sur le meilleur ou le pire de deux actifs, option d'échange, option panier — est très sensible à la corrélation entre les sous-jacents. Pour la plupart de ces produits, plus la corrélation est faible, plus le prix de l'option est élevé : une faible corrélation augmente la probabilité qu'au moins un des deux actifs affiche une forte performance.

Les options quanto

Une option quanto protège un investisseur contre le risque de change tout en lui laissant l'exposition au sous-jacent étranger — un call quanto sur le Nikkei, par exemple, reconverti en dollars à un taux fixé d'avance. Son prix dépend fortement de la corrélation entre le sous-jacent et le taux de change : une corrélation positive abaisse le prix de l'option quanto, une corrélation négative le renchérit.

Le swap de corrélation

Un swap de corrélation échange une corrélation fixe contre la corrélation réalisée sur un panier d'actifs. Le payoff pour le payeur du taux fixe est $N(\rho_{\text{réalisé}} - \rho_{\text{fixe}})$.

Un swap à trois actifs

Avec un taux fixe de 10 %, un notionnel de 1 000 000 USD, et des corrélations réalisées deux à deux de

Gestion du risque : l'impact de la corrélation sur la VaR

La VaR d'un portefeuille corrélé

Pour un portefeuille à plusieurs actifs, $\mathrm{VaR}_P = \alpha\sigma_P\sqrt{t}$, où $\sigma_P = \sqrt{B_h C B_h^\top}$, B_h étant le vecteur des montants investis et C la matrice de covariance des rendements — la corrélation entre : actifs entre donc directement dans le calcul de la VaR par l'intermédiaire de cette matrice.

Un portefeuille à deux actifs

Deux actifs, corrélation 0,7, écarts-types journaliers de 2 % et 1 %, positions de 10 et 5 millions de dollars. La volatilité du portefeuille est $\sigma_P = \sqrt{B_h C B_h^\top} = 23{,}77\,\%$. Au niveau de confiance de 99 % ($z = 2{,}3264$) et sur un horizon de 10 jours, $\mathrm{VaR} = 0{,}2377 \times 2{,}3264 \times \sqrt{10} = 1{,}7487$ million de dollars.

Le sens de la variation

Plus la corrélation entre les deux actifs est faible, plus la VaR du portefeuille est faible : à corrélation parfaite négative de –1, la VaR de cet exemple tombe à environ 1,1 million ; à corrélation parfaite positive, elle grimpe à près de 1,9 million. La diversification protège la VaR exactement comme elle protège la variance d'un portefeuille ordinaire.

Un prélude en 2005

La dégradation de General Motors et Ford en catégorie spéculative en mai 2005 a fait chuter la corrélation de défaut entre obligations de qualités différentes — les obligations mal notées et bien notées se comportant désormais différemment. Plusieurs fonds spéculatifs, longs sur la tranche equity des CDO et courts sur la tranche mezzanine, croyaient s'être couverts ; en réalité, la baisse de corrélation a fait perdre de la valeur aux deux jambes de la position simultanément, provoquant plusieurs faillites.

Le retournement de 2007-2009

Durant la crise elle-même, l'effet s'est inversé : les corrélations de défaut ont fortement **augmenté**. Ce mouvement a d'abord profité aux détenteurs de la tranche equity, dont le spread avait initialement grimpé pour d'autres raisons, mais la hausse conjointe de la corrélation et des probabilités de défaut a fini par produire des pertes massives sur l'ensemble des tranches — les tranches super-senior, jugées les plus sûres, perdant jusqu'à 20 % de leur valeur alors qu'elles étaient jusque-là protégées par les tranches inférieures.

Bâle et la corrélation

Les accords de Bâle intègrent la corrélation comme intrant réglementaire central, en particulier via la copule gaussienne pour les défauts corrélés dans un portefeuille multi-actifs, l'ajustement de valeur de crédit (CVA) pour les transactions dérivées, et une prise en compte explicite du wrong-way risk.

La corrélation, un risque

Un intrant implicite de la VaR

Puisque la VaR repose sur une matrice de covariance, elle incorpore **implicitement** le risque de corrélation : le risque que les corrélations de cette matrice changent. L'expected shortfall, qui mesure le risque de marché sur les scénarios les plus extrêmes, dépend de la même façon des corrélations entre rendements.

Migration et défaut

Le risque de crédit comprend le risque de **migration** — la dégradation de la qualité de crédit d'un débiteur — et le risque de **défaut**. La structure par terme des probabilités de défaut croît généralement dans le temps pour les émetteurs de bonne qualité, mais elle est typiquement **inversée** pour les émetteurs en difficulté : s'ils survivent aux premières années critiques, leur probabilité de défaut décroît ensuite.

Une corrélation de défaut plus forte à l'intérieur des secteurs

La corrélation de défaut entre entreprises d'un même secteur est plus élevée qu'entre secteurs différents — signe que des facteurs systématiques (récession, faiblesse structurelle d'un secteur) pèsent davantage que des facteurs idiosyncratiques. Un prêteur a donc intérêt à diversifier son portefeuille de crédit entre secteurs, pas seulement entre emprunteurs.

Les corrélations grimpent en temps de crise

Un effondrement systémique implique la quasi-totalité du marché actions : les corrélations entre titres augmentent alors fortement. Entre 2004 et 2006, la corrélation moyenne entre les titres du Dow Jones oscillait autour de 27 % ; au plus fort de la crise, en 2009, elle a dépassé 96 % — un régime de corrélation quasi unitaire où la diversification cesse pratiquement de protéger.

Le ratio de concentration

Le ratio de concentration mesure la part du portefeuille exposée à une seule contrepartie ou à un seul groupe de contreparties : un prêteur avec dix prêts égaux affiche un ratio de 0,1 ; avec un seul prêt, un ratio de 1. Plus ce ratio est bas, plus le risque de défaut est diversifié — à condition que la corrélation de défaut entre contreparties reste inférieure à 1.

Concentration et corrélation, un même levier

Pour deux emprunteurs de probabilité de défaut 10 % chacun, la probabilité de défaut conjoint est $P(X \cap Y) = \rho_{XY}\sqrt{P_X(1-P_X)}\sqrt{P_Y(1-P_Y)} + P_X P_Y$. Avec un écart-type binomial de 30 % pour chaque emprunteur, une corrélation de 0,5 donne une probabilité de défaut conjoint de 5,5 % ; une corrélation nulle, 1 % ; une corrélation légèrement négative de −0,1 donne encore 0,1 % — jamais nulle, malgré la corrélation négative, tant que les probabilités de défaut individuelles restent positives.

Concentration et corrélation se renforcent

Réduire le ratio de concentration **et** réduire la corrélation de défaut vont dans le même sens : diminuer le pire scénario pour le prêteur. Mais l'un ne remplace pas l'autre — avec une corrélation parfaite de 1, aucune diversification, aussi fine soit-elle, ne réduit la perte attendue dans le pire des cas.

Une question de terminologie

Un mot, deux usages

Large en pratique, étroit en théorie

Dans la pratique du trading, « corrélation » désigne largement tout co-mouvement d'actifs dans le temps. En théorie financière, le terme est souvent réservé au coefficient de corrélation linéaire de Pearson ; les autres formes de dépendance sont alors qualifiées de « mesures de dépendance » ou « mesures d'association ».

Annexe : dépendance et corrélation, deux notions distinctes

L'indépendance formelle

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ce qui équivaut à $P(A) = P(A \mid B)$: la connaissance de B ne modifie pas la probabilité de A.

Covariance nulle n'implique pas indépendance

Si deux variables sont indépendantes, leur covariance est nécessairement nulle. La réciproque est fausse : pour la parabole $Y = X^2$, Y dépend clairement de X, mais leur covariance — et donc leur corrélation de Pearson — est nulle. Le coefficient de Pearson ne capture que la dépendance **linéaire** ; il est aveugle aux relations non linéaires, pourtant fréquentes en finance.

Pourquoi les rendements logarithmiques

Les rendements en pourcentage ne s'additionnent pas correctement dans le temps : un gain de 100 % suivi d'une perte de 50 % ramène le prix à son niveau initial, mais 100 % − 50 % = 50 % suggérerait à tort un gain net. Les rendements logarithmiques, eux, s'additionnent exactement : $\ln(200/100) + \ln(100/200) = 0$ — la raison pour laquelle la finance quantitative leur donne la préférence dès que l'horizon s'allonge.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

La corrélation se décline en une version **statique**, associée à un instant donné, et une version **dynamique**, qui suit son évolution dans le temps. Le risque de corrélation traverse cinq terrains — investissement, trading, gestion du risque, crises financières, réglementation — et s'articule étroitement aux risques de **marché** (intrant implicite de la VaR), de **crédit** (défauts corrélés, wrong-way risk), **systémique** (corrélations qui grimpent en temps de crise) et de **concentration** (le même levier que la diversification). La crise de 2007-2009 illustre à la fois les dangers d'une **baisse** de corrélation mal anticipée (2005) et d'une **hausse** de corrélation généralisée (2007-2009). Enfin, la corrélation de Pearson, omniprésente dans la pratique, ne mesure que la dépendance **linéaire** — un rappel utile avant d'explorer, au chapitre suivant, son comportement empirique.