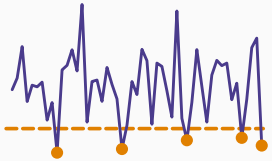
Mesure et gestion du risque de marché

Chapitre 12 : Anticipations, prime de risque, convexité et forme de la courbe



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 30 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Les anticipations

La volatilité et la convexité

La prime de risque

Combiner les trois effets

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Le chapitre précédent a montré **comment** évaluer un dérivé de taux une fois l'arbre binomial construit. Ce chapitre s'attaque à une question antérieure : **pourquoi** la courbe des taux prend-elle la forme qu'on lui observe — plate, croissante, décroissante ? Trois forces distinctes en sont responsables : les anticipations sur les taux futurs, la convexité née de la volatilité, et la prime de risque exigée par des investisseurs averses au risque. Ce chapitre les isole une à une.

Les anticipations

Le principe

Si les investisseurs anticipent avec certitude la trajectoire future du taux court, la courbe des taux se déduit immédiatement en enchaînant les taux forward anticipés : $(1 + r(N))^N = \prod_{k=0}^{N-1} (1 + r_k^{\text{anticipé}})$.

Anticipations plates : une courbe plate

Le taux à un an vaut 10 % aujourd'hui, et tous les investisseurs anticipent qu'il vaudra encore 10 % l'an prochain et dans deux ans. Les prix des zéros-coupons à un, deux et trois ans s'obtiennent alors en actualisant systématiquement à 10 % : $P_1 = 1/1{,}10$, $P_2 = 1/1{,}10^2$, $P_3 = 1/1{,}10^3$. La structure par terme des taux zéro est donc **plate à 10 %** : aucun investisseur n'accepterait de bloquer son argent à 10 % sur trois ans s'il anticipait pouvoir réinvestir plus tard à un taux différent.

Anticipations croissantes : une courbe croissante

Le taux à un an vaut toujours 10 %, mais les investisseurs anticipent désormais 12 % l'an prochain et 14 % dans deux ans. Le taux zéro à deux ans $r(2)$ vérifie $(1+r(2))^2 = 1{,}10 \times 1{,}12$, soit $r(2) = 10{,}995\,\%$; le taux zéro à trois ans vérifie $(1+r(3))^3 = 1{,}10 \times 1{,}12 \times 1{,}14$, soit $r(3) = 11{,}988\,\%$. La trajectoire anticipée 10 %-12 %-14 % engendre donc une courbe **croissante** : 10 %, 10,995 %, 11,988 %.

Anticipations décroissantes : une courbe décroissante

Symétriquement, si les investisseurs anticipent une baisse du taux court à 8 % puis 6 %, la même mécanique donne $r(2) = 8{,}995\,\%$ et $r(3) = 7{,}988\,\%$: une courbe **décroissante**.

Une limite du raisonnement par anticipations

Sur un horizon court, les acteurs de marché peuvent avoir des vues précises sur la trajectoire des taux. Mais il serait difficile de défendre l'idée que l'anticipation du taux à un an dans 29 ans diffère sensiblement de celle dans 30 ans : à très long terme, les anticipations n'ont plus grand-chose de granulaire, et se résument souvent à un niveau de long terme (par exemple 5 %, décomposé en 3 % de taux réel et 2 % d'inflation anticipée). Les anticipations seules ne peuvent donc pas tout expliquer — d'où la nécessité des deux sections suivantes.

La volatilité et la convexité

Une courbe qui se déforme même sans anticipation de mouvement

Le cadre

Cette section isole l'effet de la **volatilité** en supposant que les investisseurs sont neutres au risque — ils évaluent les titres par simple espérance actualisée — mais que le taux court, plutôt que suivre une trajectoire certaine, évolue de façon aléatoire autour de cette même trajectoire anticipée.

Un arbre à 200 points de base de volatilité

Le taux court vaut 10 % aujourd'hui. Dans un an, il vaut 12 % ou 8 % avec une probabilité de 50 % chacun — un écart-type de 200 points de base. Le prix du zéro-coupon à deux ans, sous neutralité au risque, est $P_2 = [0{,}5/1{,}12 + 0{,}5/1{,}08]/1{,}10 = 0{,}826720$, ce qui implique un taux zéro à deux ans $r(2) = 9{,}982\,\%$.

Une courbe qui se déforme même sans anticipation de mouvement (suite)

L'inégalité de Jensen à l'œuvre

Le taux court vaut 10 % aujourd'hui, et son espérance dans un an est aussi exactement 10 % $(0{,}5 \times 12\,\% + 0{,}5 \times 8\,\%)$. On pourrait donc s'attendre à un taux zéro à deux ans de 10 %. Il n'en est rien : 9,982 % est **inférieur** de 1,8 point de base à 10 %. La fonction de prix $1/(1+r)$ étant convexe, l'espérance de $1/(1+r_1)$ est strictement supérieure à $1/(1+\mathbb{E}[r_1])$ — c'est l'inégalité de Jensen. Un prix plus élevé signifie un rendement, donc un taux, plus faible : c'est **l'effet de convexité**, et il n'existe que parce qu'il y a de la volatilité.

La convexité augmente avec l'échéance

Le même arbre à 200 points de base, prolongé sur trois ans par un arbre récombinant (taux de deuxième année à 14 %, 10 % ou 6 %, avec probabilités 25 %, 50 %, 25 %), donne un prix du zéro à trois ans de 0,752310 et un taux zéro $r(3) = 9{,}952\,\%$. L'effet de convexité y atteint 4,8 points de base — plus du double de celui observé à deux ans (1,8 point de base), pour la **même** volatilité de 200 points de base. La convexité croît avec la maturité, et — on peut le montrer séparément — elle croît aussi avec le niveau de la volatilité elle-même : plus l'incertitude est grande, plus l'espérance actualisée s'écarte de la valeur sans incertitude.

La prime de risque

Une compensation pour le risque de duration

Le principe

Un investisseur averse au risque n'accepte pas nécessairement un rendement espéré égal au taux sans risque sur un titre dont la valeur future est incertaine. La prime de risque se modélise en ajoutant, au taux qui sert à actualiser un flux futur incertain, un supplément proportionnel au nombre d'années de risque de duration restant à courir.

Sans prime : un rendement espéré égal au taux court

Reprenons un arbre à 400 points de base de volatilité : le taux court vaut 10 % aujourd'hui, 14 % ou 6 % dans un an (probabilité 50 % chacun). Évalué sous neutralité au risque, le zéro-coupon à deux ans vaut $P_2 = 0{,}5\,(1/1{,}14 + 1/1{,}06)/1{,}10 = 0{,}827541$. Si le taux monte à 14 %, ce titre vaudra $1/1{,}14 = 0{,}877193$ dans un an (rendement de 6 %) ; s'il descend à 6 %, il vaudra $1/1{,}06 = 0{,}943396$ (rendement de 14 %). Le rendement espéré est donc exactement $0{,}5 \times 6\,\% + 0{,}5 \times 14\,\% = 10\,\%$ — le taux court d'aujourd'hui, comme il se doit sous neutralité au risque.

Une compensation pour le risque de duration (suite)

Avec une prime de 20 points de base par an

Des investisseurs averses au risque exigeraient un rendement espéré supérieur à 10 % pour porter ce risque de taux pendant un an. On modélise cette exigence en ajoutant 20 points de base aux taux qui interviennent dans l'espérance : $P_2 = 0{,}5\,(1/1{,}142 + 1/1{,}062)/1{,}10 = 0{,}826035$. Le prix baisse légèrement — de 0,827541 à 0,826035 — ce qui revient à augmenter le rendement espéré **sous le processus réel** (14 %/6 %, sans prime) à $0{,}5\times[(0{,}877193-0{,}826035)/0{,}826035]+0{,}5\times[(0{,}943396-0{,}826035)/0{,}826035] = 10{,}20\,\%$: exactement 20 points de base de plus que le taux court.

Le zéro à trois ans : une prime qui s'accumule

Pour le zéro-coupon à trois ans, dont le risque de duration s'étend sur deux ans, on ajoute 20 points de base à la première année de risque et 40 à la seconde. Le prix obtenu est de 0,751184, contre un prix sans prime plus élevé. Le rendement espéré qui en résulte sur l'année à venir atteint 10,40 % — le double de la prime annuelle de 20 points de base, cohérent avec les deux années de risque de duration portées par ce titre.

Une compensation pour le risque de duration (suite 2)

Pourquoi la prime s'accumule avec la duration

Un zéro-coupon à deux ans porte, dans cet exemple stylisé où les taux ne bougent qu'une fois par an, une seule année de risque de taux : celle où sa valeur future dépendra d'un taux encore inconnu. Un zéro-coupon à trois ans en porte deux. La prime de risque exigée croît donc avec la duration — c'est précisément ce mécanisme qui, en fonction de son intensité, peut faire pencher la courbe des taux vers le haut.

Combiner les trois effets

Ce qui détermine la forme de la courbe

Anticipations, convexité, prime : qui domine ?

À très court terme, avec une prime de risque suffisamment forte, l'effet de prime domine l'effet de convexité et la courbe est légèrement croissante. À très long terme, c'est l'inverse : la convexité, qui croît avec la maturité, finit par l'emporter, et la pente s'aplatit ou s'inverse même en présence d'une prime constante par année de risque. Une prime de risque de 40 points de base par an, par exemple, suffit à rendre croissante une courbe qui, sans prime, serait décroissante sous l'effet de la seule convexité — mais la convexité reste visible dans la **concavité** de la courbe : elle croît plus vite entre un et deux ans qu'entre deux et trois ans.

Un débat empirique non tranché

Sur les 75 dernières années, la structure par terme des taux d'intérêt a, en moyenne, été croissante — ce qui a longtemps été interprété comme la preuve empirique d'une prime de risque positive. Mais Homer et Sylla montrent que sur des périodes plus anciennes, la courbe a souvent été plate. Rien ne permet de trancher si la prime de risque est un phénomène structurel et durable, ou si la pente moyenne observée reflète simplement une période historique particulière. La question reste ouverte.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

La forme de la courbe des taux résulte de trois forces distinctes. Les **anticipations** sur la trajectoire future du taux court déterminent directement, via l'enchaînement des taux forward, le niveau et la pente de la courbe en l'absence d'incertitude. La **volatilité** introduit un effet de **convexité** — conséquence directe de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction de prix, convexe en le taux — qui pousse systématiquement les taux zéro **en dessous** de leur valeur sans incertitude, d'autant plus fortement que la maturité et la volatilité sont élevées. Enfin, la **prime de risque**, exigée par des investisseurs averses au risque en compensation du risque de duration porté sur chaque année à venir, pousse les taux **au-dessus** de leur valeur actuarielle et s'accumule avec la maturité. La forme observée de la courbe — croissante, plate ou décroissante — dépend de l'équilibre entre ces trois forces, dont l'importance relative varie avec l'horizon considéré.