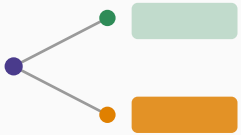
Mesure et gestion du risque de crédit

Chapitre 11 : Le risque de crédit d'un portefeuille



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 30 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

La corrélation de défaut

Granularité et VaR de crédit

Le modèle à un facteur

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Après avoir présenté les grands modèles de VaR de crédit, ce chapitre approfondit le concept qui en constitue le cœur : la corrélation de défaut. Il formalise sa définition, montre à quel point son ordre de grandeur, même faible en apparence, peut avoir un impact considérable sur la probabilité de défauts conjoints, puis introduit le modèle à un facteur — l'outil de référence pour mesurer le risque de portefeuille en tenant compte de cette corrélation. Le chapitre se termine sur l'effet de la granularité, c'est-à-dire du nombre et de la taille relative des positions, sur la VaR de crédit d'un portefeuille.

La corrélation de défaut

La probabilité de défaut conjoint

Pour une paire d'emprunteurs de probabilités de défaut individuelles π_1 et π_2 sur un horizon τ, la **probabilité de défaut conjoint** π_{12} est la probabilité que les deux fassent simultanément défaut. Sous l'hypothèse d'indépendance, $\pi_{12} = \pi_1\pi_2$; la **corrélation de défaut** se définit alors comme $\rho_{12} = \dfrac{\pi_{12} - \pi_1\pi_2}{\sqrt{\pi_1(1-\pi_1)\pi_2(1-\pi_2)}}$. Plus l'écart entre π_{12} et le produit $\pi_1\pi_2$ (valeur sous indépendance) est important, plus la corrélation est élevée. La plupart des modèles de portefeuille, y compris celui présenté dans ce chapitre, spécifient une corrélation de défaut plutôt qu'une probabilité de défaut conjoint directement.

Un ordre de grandeur trompeur

Un ordre de grandeur trompeur

Le défaut demeurant, pour la grande majorité des émetteurs, un événement relativement rare, les corrélations de défaut estimées empiriquement sont généralement faibles — de l'ordre de 5 % sur un an selon la plupart des études, bien que ces estimations varient fortement selon les périodes, secteurs et zones géographiques, et soient parfois négatives. Une corrélation « optiquement » faible peut néanmoins avoir un impact considérable sur la probabilité de défaut conjoint : pour une paire de crédits notés BBB+ et BBB- (probabilités de défaut individuelles de 0,25 % et 1,25 %), une corrélation nulle donne une probabilité de défaut conjoint de 0,0031 %, tandis qu'une corrélation de seulement 5 % la porte à 0,0309 % — près de dix fois plus élevée, et non négligeable en termes de points de base.

Définition et ordre de grandeur (suite)

La difficulté de la mise à l'échelle

Spécifier intégralement la distribution des défauts d'un portefeuille de n crédits exigerait, en toute généralité, 2^n probabilités distinctes ; en pratique, on se limite aux probabilités de défaut individuelles et aux corrélations par paire — ce qui suppose déjà n probabilités et $n(n-1)/2$ corrélations pour un portefeuille de taille modeste. La plupart des modèles retiennent une hypothèse simplificatrice, en fixant l'ensemble des corrélations par paire à un unique paramètre commun — sous la contrainte que ce paramètre reste non négatif, afin d'éviter des matrices de corrélation non définies positives (il est en effet impossible que tous les défauts soient simultanément corrélés négativement entre eux).

Granularité et VaR de crédit

Deux cas extrêmes de corrélation

Diversification parfaite et absence de diversification

Considérons un portefeuille de n crédits de valeur totale fixe, chacun de probabilité de défaut π et de taux de recouvrement nul. Si la **corrélation de défaut vaut 1**, le portefeuille se comporte comme un unique crédit géant : soit la totalité du portefeuille fait défaut (avec probabilité π), soit rien ne fait défaut — aucune diversification n'est obtenue, quel que soit n. Si la **corrélation de défaut vaut 0**, le nombre de défauts suit une loi binomiale de paramètres n et π ; à mesure que n augmente et que chaque position devient une fraction de plus en plus petite du portefeuille, la loi des grands nombres s'applique et la perte converge en probabilité vers la perte attendue $n\pi$ — la volatilité de la perte de crédit tend vers zéro, et la VaR de crédit (définie comme un quantile de perte moins la perte attendue) tend elle aussi vers zéro.

L'effet de la granularité en pratique

Un exemple numérique illustre cet effet : pour un portefeuille de valeur future 1 milliard de dollars et une probabilité de défaut de 2 % par crédit, la VaR de crédit à 95 % passe de -20 millions de dollars pour $n = 1$ (un unique crédit géant) à 40 millions pour $n = 50$, puis diminue progressivement à mesure que n augmente et que chaque position devient plus petite — la perte attendue restant, elle, identique dans tous les cas puisqu'elle ne dépend que de π. Plus un portefeuille est **granulaire** (composé d'un grand nombre de petites positions indépendantes), plus sa VaR de crédit, pour un niveau de risque

Le modèle à un facteur

Corréler les défauts via un facteur de marché commun

La structure du modèle

Le **modèle à un facteur** modélise le rendement des actifs de chaque firme i comme $a_i = \beta_i m + \sqrt{1-\beta_i^2}\,\varepsilon_i$, où m est un facteur de marché commun, ε_i un choc idiosyncratique propre à la firme, tous deux des variables normales standard indépendantes entre elles. Le paramètre β_i mesure la sensibilité de la firme au facteur de marché — son degré de corrélation aux conditions économiques générales. La corrélation entre les rendements d'actifs de deux firmes i et j est alors simplement $\beta_i\beta_j$: une firme « cyclique » ($\beta_1 = 0{,}5$) et une firme « défensive » ($\beta_2 = 0{,}1$) présentent ainsi une corrélation d'actifs de $0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05$.

L'indépendance conditionnelle

La propriété clé du modèle à un facteur est l'**indépendance conditionnelle** : une fois la valeur du facteur de marché m fixée, les rendements d'actifs — et donc les risques de défaut — de toutes les firmes deviennent indépendants les uns des autres, puisque toute leur corrélation transite exclusivement par leur relation commune à ce facteur. La distribution de défaut conditionnelle à une réalisation m du facteur se déplace et se resserre : sa moyenne devient $-\beta_i m$ et son écart-type $\sqrt{1-\beta_i^2}$ — une entreprise cyclique verra sa probabilité de défaut fortement augmenter en cas de récession (m fortement négatif) et fortement diminuer en cas d'expansion, tandis qu'une entreprise défensive y sera peu sensible.

Le passage à la limite pour un portefeuille homogène

Pour un portefeuille granulaire et homogène (grand nombre de crédits, chacun de faible poids, mêmes paramètres π et β), la loi des grands nombres s'applique conditionnellement à chaque réalisation du facteur de marché : le taux de perte du portefeuille converge vers la probabilité de défaut conditionnelle $p(m)$. La fonction de répartition inconditionnelle des pertes s'obtient alors analytiquement : $P[X \leq x] = \Phi\left(\frac{k - \sqrt{1-\beta^2}\,\Phi^{-1}(x)}{\beta}\right)$ — une formule qui, combinée à un niveau de confiance donné, permet de calculer directement le quantile de perte recherché sans recourir à une simulation.

Le rôle de la corrélation dans la forme de la distribution

Dans les cas extrêmes, une corrélation au facteur de marché proche de 1 conduit à une distribution bimodale : soit la quasi-totalité du portefeuille fait défaut, soit presque rien ; une corrélation proche de 0 concentre au contraire la distribution des pertes autour de la probabilité de défaut moyenne π. Entre ces deux extrêmes, une corrélation plus élevée accroît la probabilité des scénarios extrêmes (très peu ou très nombreux défauts) au détriment des scénarios intermédiaires — un résultat central pour comprendre pourquoi la corrélation de défaut, même modeste en apparence, pèse si lourdement sur la queue de distribution des pertes et, par conséquent, sur la VaR de crédit d'un portefeuille.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

La corrélation de défaut, bien que souvent faible en valeur absolue, exerce un effet démultiplicateur sur la probabilité de défauts conjoints et façonne en profondeur la distribution des pertes d'un portefeuille de crédit. Le modèle à un facteur, en reliant chaque emprunteur à un facteur macroéconomique commun via un coefficient bêta, offre un cadre analytiquement tractable pour incorporer cette corrélation et calculer la VaR de crédit d'un portefeuille granulaire — révélant au passage l'importance cruciale de la granularité : plus un portefeuille est diversifié en un grand nombre de petites positions faiblement corrélées, plus sa VaR de crédit relative diminue. Le chapitre suivant élargit la focale au risque de crédit pris dans son ensemble, en resituant ces outils quantitatifs dans le cadre plus large de la gestion du risque de crédit.