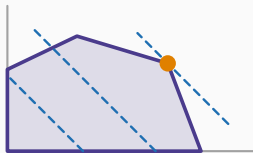


Recherche opérationnelle

Chapitre 16 : Gestion des stocks et files d'attente



Le dilemme du stock

Les files d'attente

Ce qu'il faut retenir

Le dilemme du stock

Le compromis

Commander souvent : peu de stock à porter, mais des frais de lancement répétés.

Commander rarement : peu de commandes, mais un stock moyen élevé à financer et à entreposer.

Les notations

D la demande annuelle, C_ℓ le coût d'une commande, C_p le coût de possession d'une unité pendant un an, Q la quantité commandée à chaque fois.

Le coût total annuel

$$C(Q) = \underbrace{\frac{D}{Q} C_\ell}_{\text{lancement}} + \underbrace{\frac{Q}{2} C_p}_{\text{possession}}$$

Lire les deux termes

D/Q est le **nombre de commandes** dans l'année : il décroît quand Q croît.

$Q/2$ est le **stock moyen** : le stock passe linéairement de Q à 0, sa moyenne vaut la moitié.

Le minimum

$$\frac{dC}{dQ} = -\frac{DC_\ell}{Q^2} + \frac{C_p}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^* = \sqrt{\frac{2DC_\ell}{C_p}}$$

Sans dérivée

Le coût total est minimal quand **les deux termes sont égaux** :

$$\frac{D}{Q}C_\ell = \frac{Q}{2}C_p \quad \Rightarrow \quad Q^2 = \frac{2DC_\ell}{C_p}$$

C'est la même équation, obtenue sans calcul différentiel.

Un distributeur

$D = 10\,000$ unités par an, $C_\ell = 200$ DH, $C_p = 4$ DH par unité et par an.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 10\,000 \times 200}{4}} = \sqrt{1\,000\,000} = \mathbf{1\,000} \text{ unites}$$

Vérification de l'égalité des deux coûts

Lancement : $\frac{10\,000}{1\,000} \times 200 = 2\,000$ DH.

Possession : $\frac{1\,000}{2} \times 4 = 2\,000$ DH.

Coût total : 4 000 DH par an, pour dix commandes.

Ce que coûte une erreur de quantité

Q	Lancement	Possession	Total
700	2 857	1 400	4 257
1 000	2 000	2 000	4 000
1 400	1 429	2 800	4 229

Une propriété remarquable

Se tromper de 40 % sur la quantité coûte moins de 7 % sur le total.

La formule de Wilson est très plate autour de son minimum : il n'est pas grave de commander par palettes rondes plutôt qu'à l'unité près.

Les files d'attente

La notation de Kendall

$$A/B/c$$

A la loi des arrivées, B celle des services, c le nombre de serveurs. M désigne la loi exponentielle — sans mémoire.

Les deux taux

λ le nombre moyen d'arrivées par unité de temps, μ le nombre moyen de clients qu'un serveur traite.

Le **taux d'occupation** vaut $\rho = \lambda/\mu$, et il faut $\rho < 1$ pour que la file ne diverge pas.

Les quatre grandeurs

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

L dans le système, L_q dans la file; W et W_q sont les temps correspondants.

La loi de Little

$$L = \lambda W$$

Le nombre moyen de clients présents est le produit du débit par le temps passé. **Elle vaut pour toute file stable, quelles que soient les lois** — c'est un résultat d'une généralité rare.

Une agence

$\lambda = 8$ clients par heure, $\mu = 10$. Donc $\rho = 0,8$.

$$L = \frac{0,8}{0,2} = 4 \text{ clients} \quad W = \frac{1}{10 - 8} = 0,5 \text{ h} = 30 \text{ min}$$

Si l'on accélère le service

Avec $\mu = 12$: $\rho = 0,667$, $L = 2$ clients, $W = 15$ minutes.

Vingt pour cent de service en plus divisent l'attente par deux.

L'attente selon le taux d'occupation

ρ	L	W (si $\mu = 10$)
0,50	1,0	12 min
0,80	4,0	30 min
0,90	9,0	60 min
0,95	19,0	120 min

La leçon de gestion, contre-intuitive

Un guichet occupé à 95 % paraît bien géré : il ne chôme presque jamais.

Mais l'attente y est dix fois plus longue qu'à 50 %. Viser le plein emploi d'un serveur, c'est condamner les clients à attendre — et c'est pourquoi les hôpitaux et les aéroports dimensionnent volontairement en surcapacité.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Le coût de stock oppose **lancement** et **possession**.
2. L'optimum de Wilson égalise les deux : $Q^* = \sqrt{2DC_\ell/C_p}$.
3. Sur l'exemple : $Q^* = 1\,000$, dix commandes, 4 000 DH par an.
4. La courbe est **très plate** : 40 % d'erreur coûte moins de 7 %.
5. **Loi de Little** : $L = \lambda W$, vraie pour toute file stable.
6. L'attente **explose** quand ρ approche 1 : la surcapacité est un choix rationnel.

Pour finir

Seize chapitres, une seule démarche : formuler, résoudre, interpréter, tester la robustesse.

Le modèle ne décide jamais. Il chiffre ce que coûte chaque décision — et c'est déjà beaucoup.