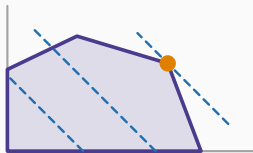


Recherche opérationnelle

Chapitre 5 : Le simplexe, la méthode



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

L'idée avant l'algorithme

Le tableau initial

La première itération

La seconde itération

Ce qu'il faut retenir

L'idée avant l'algorithme

En une phrase

Partir d'un sommet du polyèdre, **passer à un sommet voisin qui améliore l'objectif**, recommencer, s'arrêter quand aucun voisin n'améliore.

Pourquoi cela suffit

Le polyèdre est **convexe** : un sommet dont aucun voisin n'est meilleur est le meilleur de tous.

Il y a un nombre **fini** de sommets, et l'objectif augmente strictement à chaque étape : l'algorithme s'arrête.

Trois notions

Les variables **de base** sont celles qu'on calcule; les **hors base** sont mises à zéro.

Le **coût réduit** $c_j - z_j$ d'une variable hors base est ce que l'objectif gagnerait si on l'augmentait d'une unité.

Un coût réduit **positif** signale un voisin meilleur.

Le tableau initial

L'atelier, forme standard

$$\max Z = 30x + 25y \quad \begin{cases} 2x + y + e_1 = 100 \\ x + y + e_2 = 80 \end{cases}$$

Base de départ : e_1 et e_2 , donc $x = y = 0$. C'est le sommet $(0, 0)$ – on ne produit rien.

Le tableau

Base	x	y	e_1	e_2	b
e_1	2	1	1	0	100
e_2	1	1	0	1	80
$c_j - z_j$	30	25	0	0	$Z = 0$

Les deux règles de pivotage

Qui entre

La variable de **coût réduit le plus grand** — ici x , avec 30.

C'est celle qui rapporte le plus par unité.

Qui sort

Le **plus petit rapport positif** b_i/a_{ik} sur la colonne entrante :

$$\frac{100}{2} = 50 \quad \frac{80}{1} = 80 \quad \Rightarrow \quad e_1 \text{ sort}$$

Pourquoi le plus petit rapport

x ne peut croître que jusqu'à ce qu'une ressource s'épuise. La découpe s'épuise à 50 sacs, la couture à 80.

C'est la **première qui bloque**. Aller au-delà rendrait e_1 négative — donc sortirait du domaine.

La première itération

Deux opérations

1. Diviser la ligne du pivot par le pivot — ici 2.
2. Retrancher aux autres lignes le multiple qui annule leur coefficient dans la colonne entrante.

Le tableau après la première itération

Base	x	y	e_1	e_2	b
x	1	0,5	0,5	0	50
e_2	0	0,5	-0,5	1	30
$c_j - z_j$	0	10	-15	0	$Z = 1\ 500$

On est au sommet $(50, 0)$

$x = 50, y = 0, e_1 = 0$ — toute la découpe est consommée — et $e_2 = 30$: il reste trente heures de couture.

La marge est passée de 0 à 1 500 DH.

Le coût réduit de y vaut encore 10

Produire un sac B rapporte 25 DH, mais oblige à renoncer à une demi-unité de A , soit 15 DH.

$$25 - 15 = 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{on n'a pas fini}$$

La seconde itération

Qui entre, qui sort

y entre : c'est le seul coût réduit positif.

Rapports : $50/0,5 = 100$ et $30/0,5 = 60$. Le plus petit est 60 : e_2 sort.

Le tableau final

Base	x	y	e_1	e_2	b
x	1	0	1	-1	20
y	0	1	-1	2	60
$c_j - z_j$	0	0	-5	-20	$Z = 2\ 100$

Quand s'arrêter

Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls : aucun voisin n'améliore. La solution courante est optimale.

Le résultat, identique au chapitre 4

$$x = 20, \quad y = 60, \quad Z = 2\,100 \text{ DH}$$

Deux itérations, deux sommets parcourus : $(0, 0) \rightarrow (50, 0) \rightarrow (20, 60)$. C'est exactement le trajet que l'œil suivait sur le dessin.

Les coûts réduits des variables d'écart

e_1 vaut -5 et e_2 vaut -20 .

Au signe près, ce sont les **prix des ressources** : une heure de découpe supplémentaire rapporterait 5 DH, une heure de couture 20 DH.

Une information que le dessin ne donnait pas

Le graphique donnait la solution ; le tableau donne **la solution et sa valeur marginale**.

C'est cette information que les chapitres 7 et 8 exploitent — et c'est ce qui, en pratique, intéresse le gestionnaire.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Le simplexe **parcourt les sommets** en améliorant l'objectif à chaque pas.
2. La variable entrante est celle de **plus grand coût réduit**.
3. La variable sortante est donnée par le **plus petit rapport positif**.
4. On s'arrête quand **tous les coûts réduits sont ≤ 0** .
5. Sur l'atelier : deux itérations, $x = 20$, $y = 60$, $Z = 2\,100$ DH.
6. La dernière ligne livre en prime les **prix des ressources** : 5 et 20 DH.

La suite

Le chapitre 6 examine les quatre situations où l'algorithme ne se déroule pas comme ici : optimum multiple, dégénérescence, solution non bornée, domaine vide.