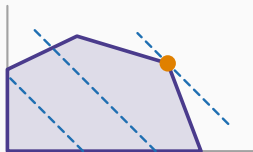


Recherche opérationnelle

Chapitre 6 : Le simplexe, les cas particuliers



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Quatre situations à reconnaître

L'optimum multiple

La dégénérescence

La solution non bornée

Le domaine vide

Ce qu'il faut retenir

Quatre situations à reconnaître

Les quatre cas

1. **Optimum multiple** — plusieurs solutions donnent la même valeur.
2. **Dégénérescence** — une variable de base vaut zéro.
3. **Solution non bornée** — l'objectif croît sans limite.
4. **Domaine vide** — aucune solution ne respecte toutes les contraintes.

Pourquoi il faut les connaître

Chacun se **lit dans le tableau**, à un endroit précis. Un praticien qui ne les reconnaît pas prend un message d'erreur pour une panne du logiciel.

Les cas 3 et 4 signalent presque toujours une erreur de modélisation, pas un problème sans solution.

L'optimum multiple

Le signe dans le tableau

À l'optimum, une variable **hors base** a un coût réduit **nul**.

On peut la faire entrer sans rien changer à Z : il existe un autre sommet optimal.

Sur l'atelier, si la marge de A valait 50

$\max Z = 50x + 25y$: la pente de l'objectif devient -2 , **exactement celle de la contrainte de découpe**.

Alors $(50, 0)$ et $(20, 60)$ donnent tous deux $Z = 2\,500$ – et tout le segment entre les deux aussi.

Une bonne nouvelle, pas un ennui

Plusieurs plans de production donnent la même marge. On peut donc choisir sur un **second critère** que le modèle ignorait : la charge de travail, la trésorerie, le risque commercial.

L'optimum multiple offre une liberté — encore faut-il savoir qu'elle existe.

La forme de l'ensemble des optima

C'est toujours une **face** du polyèdre : un segment en dimension deux, une arête ou une facette au-delà.

Toute combinaison convexe de deux sommets optimaux est optimale.

La dégénérescence

Une variable de base nulle

Une solution de base est **dégénérée** si l'une de ses variables de base vaut zéro.

Géométriquement : **plus de contraintes se coupent au sommet qu'il n'en faut** pour le définir.

Comment cela arrive

Une **égalité dans les rapports** au moment de choisir la variable sortante : deux lignes bloquent en même temps.

L'une sort, l'autre reste dans la base à la valeur zéro.

Le pivotage sur place

L'itération suivante peut changer la base **sans changer la solution** : on reste au même sommet, et Z n'augmente pas.

Si cela se répète en boucle, l'algorithme **cycle** et ne s'arrête jamais.

Le remède

La **règle de Bland** — à égalité, choisir la variable de plus petit indice — garantit la terminaison.

En pratique le cyclage est rarissime, et les solveurs perturbent légèrement les seconds membres pour l'éviter. La **dégénérescence, elle, est très fréquente** : ce n'est pas une pathologie.

La solution non bornée

Une colonne sans rapport positif

Une variable a un coût réduit **positif**, mais **tous les coefficients de sa colonne sont ≤ 0** .

Aucune ligne ne la bloque : elle peut croître indéfiniment, et Z avec elle.

Un exemple

$$\max Z = x + y \quad \text{sous} \quad x - y \leq 2, \quad x, y \geq 0$$

Prendre $x = y = t$ vérifie la contrainte pour tout t , et $Z = 2t \rightarrow +\infty$.

Un profit infini n'existe pas

Aucune entreprise ne peut gagner sans limite. **Un problème non borné est un problème mal posé.**

Presque toujours : une contrainte de capacité a été oubliée — la matière première, la demande, la trésorerie.

Le réflexe

Ne pas chercher à réparer l'algorithme. **Relire l'énoncé et chercher la ressource qu'on n'a pas écrite.**

Le domaine vide

Une variable artificielle survivante

Pour démarrer avec des contraintes $\geq$ ou $=$, on ajoute des variables **artificielles**, pénalisées dans l'objectif.

Si l'une reste **positive** à l'optimum, c'est qu'aucune solution réalisable n'existe.

Des contraintes incompatibles

$$x + y \leq 10 \quad \text{et} \quad x + y \geq 20$$

Le domaine est vide : il n'y a rien à optimiser.

Le message est une information

Un domaine vide dit que **les exigences dépassent les capacités** : le contrat promet plus que l'atelier ne peut produire.

C'est la réponse la plus utile que le modèle puisse donner — à condition de la lire comme telle et non comme un échec.

Le diagnostic pratique

Relâcher les contraintes une à une pour trouver **laquelle** rend le problème impossible.

La contrainte coupable est celle qu'il faudra renégocier.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Optimum multiple** : coût réduit nul hors base — une liberté de choix, pas un problème.
2. **Dégénérescence** : variable de base nulle, causée par une égalité des rapports.
3. Elle peut faire **cycler** l'algorithme; la règle de Bland l'en empêche.
4. **Non borné** : coût réduit positif et colonne entièrement négative.
5. Un problème non borné signale une **contrainte oubliée**.
6. **Domaine vide** : variable artificielle survivante — les exigences dépassent les capacités.

La suite

Le chapitre 7 découvre que tout programme linéaire en cache un second, qui pose la question inverse — et dont la solution était déjà dans la dernière ligne de notre tableau.