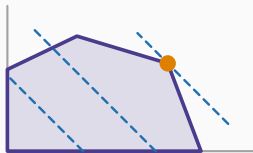


Recherche opérationnelle

Chapitre 3 : Le programme linéaire et ses formes



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La forme générale

La forme canonique et la forme standard

L'atelier sous forme standard

Le polyèdre des solutions

Ce qu'il faut retenir

La forme générale

Un programme linéaire

$$\max Z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{sous } \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

La même chose, en trois lettres

$$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad \text{sous} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{A}$ est $m \times n$: m contraintes, n variables.

Pourquoi on préfère cette écriture

Elle ne dépend plus de la taille du problème. Ce qu'on démontre pour $\mathbf{A}$ vaut pour deux variables comme pour deux mille.

C'est la même raison qui fait préférer $\mathbf{X}$ à un tableau de données en statistique.

La forme canonique et la forme standard

Forme canonique

Un **maximum**, des contraintes $\leq$, des variables ≥ 0 .

C'est la forme dans laquelle on écrit un problème de production.

Forme standard

Un **maximum**, des contraintes en **égalités**, des variables ≥ 0 .

C'est la forme dont le simplexe a besoin, parce qu'il résout des systèmes linéaires.

Les variables d'écart

On ajoute à chaque contrainte $\leq$ une variable positive qui absorbe la différence :

$$2x + y \leq 100 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + y + e_1 = 100, \quad e_1 \geq 0$$

Ce que la variable d'écart signifie

e_1 est le nombre d'**heures de découpe non utilisées**.

Ce n'est pas un artifice de calcul : c'est une grandeur de gestion, et sa valeur à l'optimum se lit directement dans le tableau final.

Tout problème se ramène à la forme standard

Si l'on a	On écrit
$\min Z$	$\max(-Z)$
$\sum a_j x_j \leq b$	$\sum a_j x_j + e = b, e \geq 0$
$\sum a_j x_j \geq b$	$\sum a_j x_j - e = b, e \geq 0$
x de signe quelconque	$x = x^+ - x^-, \text{ avec } x^+, x^- \geq 0$

La conséquence

Un seul algorithme suffit pour tous les programmes linéaires du monde.

C'est ce qui fait la puissance du simplexe : la variété des énoncés se réduit à une forme unique avant tout calcul.

L'atelier sous forme standard

Avant

$$\max Z = 30x + 25y \quad \begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Après

$$\max Z = 30x + 25y + 0e_1 + 0e_2$$

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 & = 100 \\ x + y & + e_2 = 80 \\ x, y, e_1, e_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Ce que le passage a changé

Deux inéquations, quatre variables

On avait 2 variables et 2 inéquations. On a maintenant 4 variables et 2 équations.

Un système de 2 équations à 4 inconnues a une **infinité** de solutions : il reste $4 - 2 = 2$ degrés de liberté.

Solution de base

On fixe $n - m$ variables à zéro — les variables **hors base** — et l'on résout pour les m autres, les variables **de base**.

Ici : $4 - 2 = 2$ variables à zéro, 2 à calculer.

Le polyèdre des solutions

Trois mots

Le **domaine réalisable** est l'ensemble des $\mathbf{x} \geq 0$ vérifiant $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.

C'est un **polyèdre convexe** : l'intersection d'un nombre fini de demi-plans.

Ses **sommets** sont les points où n contraintes se coupent.

Convexe : ce que cela veut dire ici

Si deux points sont réalisables, tout le segment qui les joint l'est aussi.

Conséquence décisive : il n'y a pas d'optimum local qui ne soit global. Une fois qu'on ne peut plus améliorer, on a terminé.

Le résultat qui rend le simplexe possible

Si un programme linéaire admet un optimum fini, alors **au moins un sommet du polyèdre est optimal.**

Ce qu'il fait gagner

Le domaine contient une infinité de points. Les sommets sont en nombre **fini** — au plus $\binom{n}{m}$.

Chercher parmi les sommets au lieu de chercher partout : le problème passe de l'infini au fini. **Tout l'algorithme du chapitre 5 consiste à parcourir ces sommets intelligemment.**

La correspondance

Toute **solution de base réalisable** — de base, et à composantes positives — correspond à un **sommet** du polyèdre, et réciproquement.

Sur l'atelier

4 variables, 2 équations : $\binom{4}{2} = 6$ choix de base possibles.

Quatre d'entre eux donnent des solutions positives — les quatre sommets $(0, 0)$, $(50, 0)$, $(20, 60)$, $(0, 80)$. Les deux autres donnent des valeurs négatives : ils sont hors du domaine.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Un programme linéaire s'écrit $\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$ sous $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
2. Quatre conversions ramènent **tout** problème à la forme standard.
3. Les **variables d'écart** sont les ressources inutilisées : elles ont un sens de gestion.
4. Le domaine réalisable est un **polyèdre convexe** : pas d'optimum local piège.
5. Si l'optimum est fini, il est atteint en **au moins un sommet**.
6. Sommets et **solutions de base réalisables** sont la même chose : le fini remplace l'infini.

La suite

Le chapitre 4 dessine ce polyèdre. À deux variables on peut tout voir — et voir une fois vaut mieux que calculer dix fois.