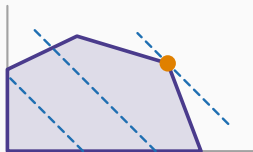


Recherche opérationnelle

Chapitre 9 : Le problème de transport



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Un programme linéaire d'un genre particulier

Trouver une première solution

Vérifier l'optimalité

La dégénérescence

Ce qu'il faut retenir

Un programme linéaire d'un genre particulier

Le problème

m **origines** de capacités a_i , n **destinations** de besoins b_j , un coût unitaire c_{ij} par liaison.

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad \text{sous} \quad \sum_j x_{ij} = a_i, \quad \sum_i x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0$$

Ce qui le rend spécial

Tous les coefficients de la matrice valent 0 ou 1, et chaque variable apparaît dans exactement **deux** contraintes.

Cette structure a une conséquence remarquable : **si les a_i et les b_j sont entiers, la solution optimale l'est aussi**, sans qu'on ait rien imposé.

Trois usines, trois dépôts

	D_1	D_2	D_3	Offre
U_1	8	6	10	30
U_2	9	7	4	45
U_3	3	4	9	25
Demande	20	50	30	100

Le problème est équilibré

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 100$$

S'il ne l'était pas, on ajouterait une origine ou une destination **fictive**, à coût nul, pour absorber la différence.

Trouver une première solution

La méthode la plus simple

Partir de la case en haut à gauche, y mettre le maximum possible, rayer la ligne ou la colonne saturée, recommencer.

Le résultat

$$x_{11} = 20, x_{12} = 10, x_{22} = 40, x_{23} = 5, x_{33} = 25.$$

$$C = 20(8) + 10(6) + 40(7) + 5(4) + 25(9) = 745$$

Son défaut, évident

Elle ne regarde jamais les coûts. Elle est rapide, elle donne une solution réalisable — et elle est mauvaise.

On s'en sert quand on a l'intention d'améliorer ensuite.

La méthode raisonnable

Remplir d'abord la case **la moins chère**, au maximum possible, rayer, recommencer.

Le déroulement

$c_{31} = 3 : x_{31} = 20$. Puis $c_{23} = 4 : x_{23} = 30$. Puis $c_{32} = 4 : x_{32} = 5$.

Reste D_2 à 45 : $x_{12} = 30$ et $x_{22} = 15$.

$$C = 20(3) + 30(4) + 5(4) + 30(6) + 15(7) = \mathbf{485}$$

L'écart

745 contre **485** : **35 % d'économie**, pour une méthode à peine plus longue.

Le choix de la solution initiale n'est pas un détail : il décide du nombre d'itérations qui suivront.

Vérifier l'optimalité

MODI

On cherche des nombres u_i et v_j tels que, **pour toute case occupée**,

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

On pose $u_1 = 0$ pour lever l'indétermination, et l'on propage.

Sur notre solution

Cases occupées : $(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$.

$$u_1 = 0, v_2 = 6, u_2 = 1, v_3 = 3, u_3 = -2, v_1 = 5$$

Le coût marginal

Pour chaque case **vide** :

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

Si tous les $\Delta_{ij} \geq 0$, la solution est **optimale**.

Les quatre cases vides

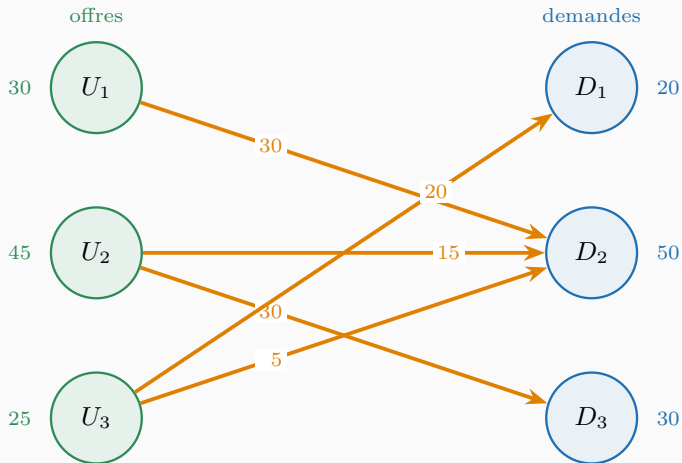
Case	c_{ij}	$u_i + v_j$	Δ_{ij}
(1, 1)	8	5	+3
(1, 3)	10	3	+7
(2, 1)	9	6	+3
(3, 3)	9	1	+8

Intuition

Tous positifs : **la solution du moindre coût était déjà optimale**, et son coût de 485 est le minimum.

Utiliser une case vide coûterait au mieux 3 de plus par unité transportée.

Le plan optimal



*Cinq liaisons utilisées sur neuf possibles, pour un coût de 485.
Une base compte toujours $m + n - 1 = 5$ cases.*

Le cycle d'amélioration

On entre dans la case de Δ le plus négatif, et l'on construit le **cycle** unique qui la relie aux cases occupées, en alternant $+$ et $-$.

On transfère la plus petite quantité marquée $-$, ce qui vide une case et en remplit une autre.

Pourquoi un cycle, et un seul

Chaque ligne et chaque colonne doivent conserver leur total : on ne peut ajouter quelque part sans retrancher ailleurs sur la même ligne, puis compenser sur la colonne.

Le cycle est la plus petite correction qui préserve les marges.

La dégénérescence

Le nombre de cases occupées

Une solution de base d'un problème de transport en compte exactement

$$m + n - 1 \quad \text{ici} \quad 3 + 3 - 1 = 5$$

S'il y en a moins

Une ligne et une colonne se sont saturées en même temps. On place alors un **zéro fictif** dans une case vide bien choisie, pour rétablir le compte.

Sans ce zéro, la propagation des potentiels s'arrête en chemin.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Le problème de transport est un programme linéaire de structure **entière** : la solution l'est aussi.
2. Un problème déséquilibré s'équilibre par une origine ou destination **fictive**.
3. **Coin nord-ouest** : rapide et mauvais – 745 ici.
4. **Moindre coût** : à peine plus long, 485 – soit 35 % de moins.
5. **MODI** teste l'optimalité par $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$.
6. Une base compte $m + n - 1$ cases : en dessous, il faut un **zéro fictif**.

La suite

Le chapitre 10 traite le cas extrême du transport : toutes les offres et toutes les demandes valent un. C'est le problème d'affectation, et il a une méthode à lui.