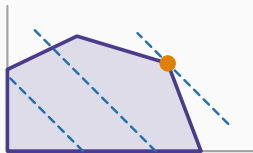


Recherche opérationnelle

Chapitre 10 : Le problème d'affectation



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Un transport dégénéré

L'algorithme hongrois

L'exemple

Les variantes

Ce qu'il faut retenir

Un transport dégénéré

Le problème

n agents, n tâches, un coût c_{ij} si l'agent i exécute la tâche j .

Affecter **un agent à une tâche et une seule**, de façon à minimiser le coût total.

C'est un problème de transport

Chaque agent a une « offre » de 1, chaque tâche une « demande » de 1.

On pourrait donc le résoudre par MODI — mais la dégénérescence y est **massive** : une base compte $2n - 1$ cases pour seulement n affectations non nulles.

Pourquoi l'énumération ne marche pas

Le nombre d'affectations possibles

n	$n!$
4	24
8	40 320
12	479 001 600
20	$2,4 \times 10^{18}$

L'ordre de grandeur

À un million d'essais par seconde, $n = 20$ demanderait **soixante-dix mille ans**.

L'algorithme hongrois résout le même problème en quelques millisecondes. **C'est ce que la recherche opérationnelle apporte : passer de l'impossible au trivial.**

L'algorithme hongrois

L'idée fondatrice

Retrancher une constante à toute une ligne — ou à toute une colonne — **ne change pas la solution optimale**, seulement la valeur totale.

Car toute affectation prend exactement un élément par ligne et un par colonne.

Ce qu'on cherche à obtenir

Faire apparaître assez de **zéros** pour qu'on puisse en choisir n , un par ligne et un par colonne.

Une telle sélection a un coût nul dans la matrice réduite : elle est donc optimale dans l'originale.

La marche à suivre

1. Retrancher à chaque **ligne** son minimum.
2. Retrancher à chaque **colonne** son minimum.
3. Couvrir tous les zéros avec le **minimum de traits** horizontaux et verticaux.
4. Si le nombre de traits vaut n , c'est fini. Sinon, ajuster et retourner en 3.

L'ajustement de l'étape 4

Soit δ le plus petit élément **non couvert**.

Le retrancher à toutes les cases non couvertes, l'ajouter aux cases **doublement couvertes**, laisser les autres.

L'exemple

Quatre techniciens, quatre machines - en heures

	M_1	M_2	M_3	M_4
T_1	13	4	7	6
T_2	1	11	5	4
T_3	6	7	2	8
T_4	1	3	5	9

Après retrait des minima de ligne - 4, 1, 2, 1

	M_1	M_2	M_3	M_4
T_1	9	0	3	2
T_2	0	10	4	3
T_3	4	5	0	6
T_4	0	2	4	8

Puis les colonnes

Seule la colonne M_4 n'a pas de zéro : son minimum vaut 2. On le retranche.

La colonne M_4 devient 0, 1, 4, 6.

Les zéros, et les traits

Zéros en $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$.

Ils se couvrent avec **trois traits** : la ligne T_1 , la ligne T_3 , la colonne M_1 .

Trois traits, pas quatre

$3 < 4$: il n'existe pas encore d'affectation complète sur les zéros. **Il faut ajuster.**

Le plus petit non couvert vaut 1

Cases non couvertes : lignes T_2 et T_4 , colonnes M_2 , M_3 , M_4 – soit 10, 4, 1 et 2, 4, 6.

On retranche 1 à ces six cases, et on ajoute 1 aux cases doublement couvertes : $(1, 1)$ et $(3, 1)$.

La matrice obtenue

	M_1	M_2	M_3	M_4
T_1	10	0	3	0
T_2	0	9	3	0
T_3	5	5	0	4
T_4	0	1	3	5

Quatre zéros indépendants

T_3 n'a qu'un zéro, en M_3 . T_4 n'en a qu'un, en M_1 . Restent T_1 et T_2 pour M_2 et M_4 : $T_1 \rightarrow M_2$, $T_2 \rightarrow M_4$.

Le coût, dans la matrice d'origine

$$T_1 \rightarrow M_2 : 4 \quad T_2 \rightarrow M_4 : 4 \quad T_3 \rightarrow M_3 : 2 \quad T_4 \rightarrow M_1 : 1$$

$$\text{Total} = 4 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{11} \text{ heures}$$

Ce que l'affectation naïve aurait donné

Confier à chaque technicien la machine où il est le plus rapide donnerait T_2 et T_4 sur M_1 : impossible.

L'optimum global n'est pas la somme des optima individuels — c'est toute la leçon du chapitre.

Les variantes

La transformation

Remplacer chaque c_{ij} par $\max(c) - c_{ij}$, puis minimiser.

Le problème devient une affectation classique, et la solution est la même.

Deux ajustements

Plus de tâches que d'agents : ajouter des agents **fictifs** à coût nul. Les tâches qu'ils reçoivent ne seront pas exécutées.

Affectation interdite : mettre un coût très grand — M — dans la case, qui ne sera jamais choisie.

Un conseil de prudence

Choisir M assez grand pour dominer, mais pas au point de perturber les soustractions.

Une valeur dix fois le coût maximal suffit toujours.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. L'affectation est un transport où toutes les offres et demandes valent 1.
2. L'énumération est impossible : $20! \approx 2,4 \times 10^{18}$.
3. Retrancher une constante à une ligne ou une colonne **ne change pas l'optimum**.
4. L'algorithme réduit, couvre les zéros, ajuste tant que les traits sont moins de n .
5. Sur l'exemple : $T_1 \rightarrow M_2, T_2 \rightarrow M_4, T_3 \rightarrow M_3, T_4 \rightarrow M_1$, pour 11 heures.
6. **L'optimum global n'est pas la somme des optima individuels.**

La suite

Les chapitres 9 et 10 ont manipulé des réseaux sans jamais les nommer. Le chapitre 11 leur donne un vocabulaire — celui de la théorie des graphes — dont les quatre chapitres suivants vivront.