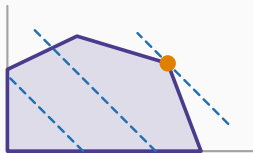


Recherche opérationnelle

Chapitre 12 : Le plus court chemin



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le principe d'optimalité

L'algorithme de Dijkstra

Les autres algorithmes

Les usages

Ce qu'il faut retenir

Le principe d'optimalité

L'énoncé

Tout sous-chemin d'un plus court chemin est lui-même un plus court chemin.

Si le trajet optimal de A à F passe par E , alors sa portion de A à E est le trajet optimal de A à E .

La démonstration tient en une phrase

S'il existait un meilleur chemin de A à E , on l'utiliserait pour raccourcir le trajet complet — qui ne serait donc pas optimal.

C'est ce principe qui permet de construire la solution de proche en proche, au lieu d'énumérer tous les chemins.

L'algorithme de Dijkstra

Les trois règles

1. Attribuer une **marque provisoire** $+\infty$ à tous les sommets, 0 à l'origine.
2. **Définiter** la plus petite marque provisoire.
3. Depuis ce sommet, **mettre à jour** les marques de ses successeurs, et recommencer.

La mise à jour

$$d(j) \leftarrow \min (d(j), d(i) + \ell(i, j))$$

On conserve aussi le **prédécesseur** retenu, pour pouvoir remonter le chemin à la fin.

Une condition à ne pas oublier

Dijkstra exige des longueurs **positives ou nulles**.

Avec une valeur négative — une subvention, un gain sur un trajet —, définir la plus petite marque n'est plus sûr : un détour pourrait faire mieux.

Étape par étape depuis A

Étape	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
Départ	0	∞	∞	∞	∞	∞
Depuis <i>A</i>	—	4	2	∞	∞	∞
Depuis <i>C</i>	—	4	—	∞	5	∞
Depuis <i>B</i>	—	—	—	14	5	∞
Depuis <i>E</i>	—	—	—	9	—	14
Depuis <i>D</i>	—	—	—	—	—	14

Le chemin optimal

$$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \quad 2 + 3 + 9 = \mathbf{14} \text{ km}$$

Les deux mises à jour instructives

Depuis B , D reçoit $4 + 10 = 14$. Depuis E , il reçoit $5 + 4 = 9$: **la marque s'améliore**, et le prédécesseur de D devient E .

Depuis D , F recevrait $9 + 11 = 20$, plus que les 14 déjà acquis : **la marque ne bouge pas**.

Ce que l'algorithme a évité

Il a définitivement six sommets en six étapes. L'énumération aurait exploré tous les chemins possibles.

Le gain est de l'ordre exponentiel contre quadratique : $O(n^2)$ pour Dijkstra, contre un nombre de chemins qui explose avec la taille.

Les autres algorithmes

Quand les longueurs peuvent être négatives

On relâche **tous les arcs**, $n - 1$ fois de suite, sans se soucier de l'ordre.

Complexité $O(n \times m)$: plus lent que Dijkstra, mais il accepte les valeurs négatives.

Un bonus

Si une n -ième passe améliore encore une marque, c'est qu'il existe un **circuit de longueur négative**.

Le problème n'a alors pas de solution : on peut tourner indéfiniment en gagnant. **L'algorithme détecte l'absurdité au lieu de boucler.**

Un changement de signe

Remplacer **min** par **max** dans la mise à jour.

Cela n'a de sens que sur un graphe **sans circuit** — sinon le plus long chemin est infini.

Pourquoi cela nous intéressera

La durée d'un projet est la **longueur du plus long chemin** dans le graphe des tâches : il faut attendre la plus lente des séquences.

C'est exactement le chemin critique du chapitre 14.

Les usages

Ce que la valuation d'un arc peut représenter

Valuation	Le plus court chemin donne
Kilomètres	l'itinéraire le plus court
Minutes	l'itinéraire le plus rapide
Dirhams	le trajet le moins cher
$-\log(\text{fiabilite})$	le trajet le plus sûr

La dernière ligne mérite un mot

Le chemin le plus fiable maximise un **produit** de probabilités. Or maximiser un produit revient à minimiser la somme des $-\log$.

Un problème multiplicatif devient additif par changement d'échelle : c'est la même astuce que le passage aux rendements logarithmiques en finance.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Principe d'optimalité** : tout sous-chemin d'un chemin optimal est optimal.
2. **Dijkstra** définitive la plus petite marque, puis met à jour les successeurs.
3. Il exige des longueurs **positives ou nulles**.
4. Sur notre réseau : $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F$, soit 14 km.
5. **Bellman-Ford** accepte les valeurs négatives et détecte les circuits absorbants.
6. Le **plus long chemin** sur un graphe sans circuit donnera la durée d'un projet.

La suite

Le chapitre 13 change de question. On ne cherche plus le meilleur trajet d'une unité, mais **combien d'unités le réseau peut absorber à la fois**.