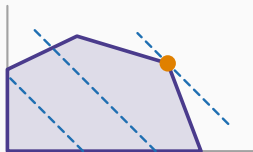


Recherche opérationnelle

Chapitre 14 : L'ordonnancement de projet



Le problème

Les dates au plus tôt

Les dates au plus tard

Accélérer le projet

La version probabiliste

Ce qu'il faut retenir

Le problème

Un projet

Un ensemble de **tâches**, chacune de durée connue, liées par des relations d'**antériorité** : certaines ne peuvent commencer avant que d'autres soient finies.

Trois questions

1. Quelle est la **durée minimale** du projet ?
2. Quelles tâches ne souffrent **aucun retard** ?
3. De combien les autres peuvent-elles glisser ?

L'origine des méthodes

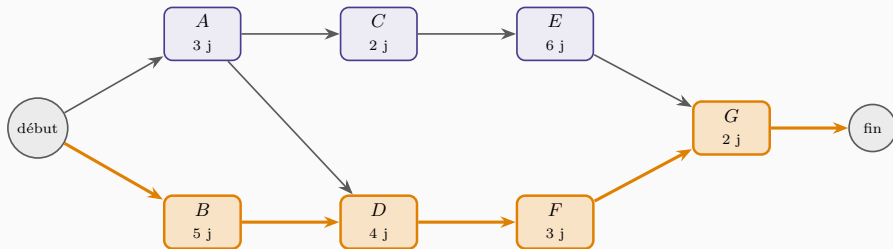
PERT naît en 1958 au Bureau des projets spéciaux de la marine américaine, pour le missile Polaris.

CPM naît la même année chez DuPont, pour l'arrêt et le redémarrage des usines chimiques. Deux équipes, deux besoins, presque le même algorithme.

Sept tâches

Tâche	Durée (jours)	Antériorités
<i>A</i>	3	—
<i>B</i>	5	—
<i>C</i>	2	<i>A</i>
<i>D</i>	4	<i>A, B</i>
<i>E</i>	6	<i>C</i>
<i>F</i>	3	<i>D</i>
<i>G</i>	2	<i>E, F</i>

Le graphe du projet



Chemin critique $B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$: $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ jours.

Les tâches A, C et E disposent chacune d'un jour de marge.

Les dates au plus tôt

La règle

$$t_{\text{tot}}(j) = \max_{i \rightarrow j} (t_{\text{tot}}(i) + d(i))$$

Une tâche commence quand **la dernière** de ses antériorités est terminée.

Le parcours

Tâche	Début au plus tôt	Fin au plus tôt
<i>A</i>	0	3
<i>B</i>	0	5
<i>C</i>	3	5
<i>D</i>	$\max(3, 5) = 5$	9
<i>E</i>	5	11
<i>F</i>	9	12
<i>G</i>	$\max(11, 12) = 12$	14

Les dates au plus tard

La règle

$$t_{\text{tard}}(i) = \min_{i \rightarrow j} (t_{\text{tard}}(j)) - d(i)$$

On part de la fin, fixée à 14, et l'on remonte.

Le parcours et les marges

Tâche	Début au plus tôt	Début au plus tard	Marge
<i>A</i>	0	1	1
<i>B</i>	0	0	0
<i>C</i>	3	4	1
<i>D</i>	5	5	0
<i>E</i>	5	6	1
<i>F</i>	9	9	0
<i>G</i>	12	12	0

La définition

Les tâches de **marge nulle** forment le **chemin critique** : tout retard sur l'une d'elles retarde le projet d'autant.

Sur notre projet

$$B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G \quad 5 + 4 + 3 + 2 = \mathbf{14} \text{ jours}$$

Ce que le gestionnaire en fait

Il concentre sa surveillance sur quatre tâches au lieu de sept.

Accélérer A , C ou E ne servirait à rien : leur marge d'un jour serait simplement absorbée. Pour raccourcir le projet, il faut agir sur le chemin critique.

Deux marges à distinguer

Marge totale et marge libre

La **marge totale** est le retard admissible sans retarder le projet.

La **marge libre** est le retard admissible sans retarder la **tâche suivante**.

Pourquoi la distinction compte

Consommer la marge totale d'une tâche peut mettre à zéro la marge de celles qui la suivent : **le chemin critique se déplace**.

La marge libre est la seule qu'on puisse utiliser sans rien changer au reste du plan.

Accélérer le projet

Le crashing

Chaque tâche peut être raccourcie moyennant un surcoût. On raccourcit d'abord celle du chemin critique dont **le coût par jour gagné est le plus faible**.

Sur notre projet

Raccourcir B de 5 à 3 jours ferait passer le projet à 12 jours ?

Non. Le chemin $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G$ dure $3 + 2 + 6 + 2 = 13$ jours. Il devient critique dès que le premier descend en dessous.

La règle générale

On ne gagne jamais plus que l'écart avec le **deuxième plus long chemin**.

Au-delà, il faut raccourcir les deux à la fois. **C'est pourquoi le crashing se fait pas à pas, en recalculant à chaque étape.**

La version probabiliste

Quand la durée est incertaine

On estime trois valeurs : optimiste a , la plus probable m , pessimiste b .

$$\mathbb{E}(d) = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma(d) = \frac{b - a}{6}$$

Ce qu'on en tire

La durée du projet est la somme des durées critiques : sa variance est la **somme des variances** des tâches critiques.

Par le théorème central limite, on peut alors calculer la probabilité de tenir une échéance.

Application en gestion

La méthode ne considère que le chemin critique **espéré**. Or un chemin non critique très variable peut le devenir.

PERT sous-estime donc systématiquement la durée du projet.

Le remède

Une simulation de Monte-Carlo tire les durées, recalcule le chemin critique à chaque tirage, et donne la distribution empirique de la durée totale.

Le chemin critique n'y est plus un chemin, mais **une probabilité attachée à chaque chemin**.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. La durée d'un projet est le **plus long chemin**, non la somme des durées : 14 contre 25.
2. Le calcul **avant** donne les dates au plus tôt, le calcul **arrière** les dates au plus tard.
3. La **marge** est leur différence; les tâches de marge nulle sont **critiques**.
4. Sur l'exemple, le chemin critique est $B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$.
5. Le **crashing** ne gagne jamais plus que l'écart avec le deuxième plus long chemin.
6. **PERT probabiliste sous-estime la durée** : il ignore les chemins qui peuvent devenir critiques.

La suite

Le chapitre 15 revient à la programmation linéaire pour lever son hypothèse la plus gênante : on ne fabrique pas 20,5 sacs, et arrondir la solution ne donne pas l'optimum entier.