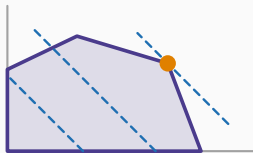


Recherche opérationnelle

Chapitre 15 : La programmation en nombres entiers



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Pourquoi arrondir ne suffit pas

Séparation et évaluation

Les variables binaires

Les coupes

Ce qu'il faut retenir

Pourquoi arrondir ne suffit pas

Le programme en nombres entiers

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad \text{sous} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$$

Un exemple à deux variables

$$\max Z = 5x + 4y \quad \begin{cases} 6x + 4y \leq 24 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

La relaxation linéaire

Les deux contraintes se croisent en $x = 3, y = 1,5$, pour

$$Z = 15 + 6 = 21$$

Trois raisons de ne pas arrondir

Arrondir **vers le bas** donne $(3, 1)$, admissible, $Z = 19$ – mais l'optimum entier vaut 20.

Arrondir **vers le haut** donne $(3, 2)$, qui viole $x + 2y \leq 6$.

À plus de deux variables, le point arrondi peut être **très loin** de l'optimum entier, voire hors du domaine.

Ce que la relaxation apporte tout de même

Une borne, et elle est précieuse

Le domaine entier est **inclus** dans le domaine continu. Donc

$$Z_{\text{entier}}^* \leq Z_{\text{continu}}^* = 21$$

C'est tout l'algorithme en germe

Si l'on trouve une solution entière valant **20** et qu'une branche de l'exploration a une borne de **18**, **on peut abandonner cette branche sans l'explorer.**

C'est la séparation et l'évaluation.

Séparation et évaluation

Branch and bound

Séparer — choisir une variable fractionnaire $x_j = v$ et créer deux sous-problèmes : $x_j \leq \lfloor v \rfloor$ et $x_j \geq \lceil v \rceil$.

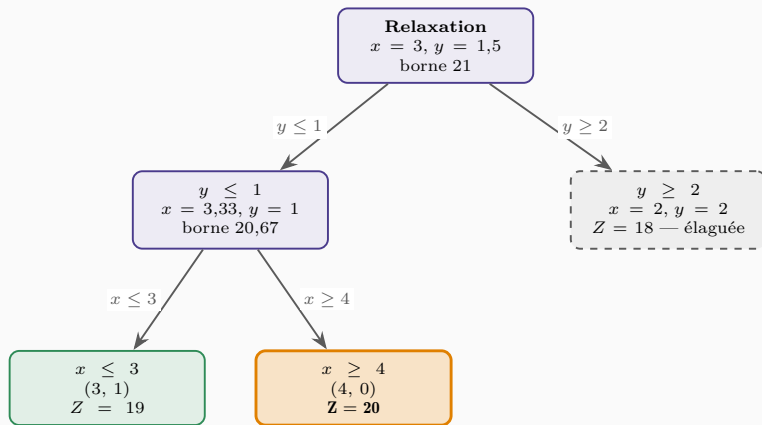
Évaluer — résoudre la relaxation de chaque sous-problème pour obtenir sa borne.

Élaguer — abandonner une branche dont la borne ne dépasse pas la meilleure solution entière connue.

Ce que la séparation ne perd pas

Aucune solution entière n'est éliminée : entre $\lfloor v \rfloor$ et $\lceil v \rceil$, il n'y a pas d'entier.

On coupe le domaine continu sans toucher aux points entiers.



L'optimum entier est (4, 0) pour $Z = 20$ — et non l'arrondi (3, 1), qui vaut 19.

Nœud racine, puis séparation sur y

Racine : $x = 3, y = 1,5$, borne 21. On sépare sur y .

Branche $y \leq 1$: $x = 3,33, y = 1$, borne 20,67.

Branche $y \geq 2$: $x = 2, y = 2, Z = 18$. Solution **entière**, mais faible.

On sépare la première branche sur x

$y \leq 1$ et $x \leq 3$: $x = 3, y = 1, Z = 19$. Entière.

$y \leq 1$ et $x \geq 4$: $x = 4, y = 0, Z = \mathbf{20}$. Entière, et meilleure.

L'optimum entier

$$x = 4, \quad y = 0, \quad Z = 20$$

Ce que l'élagage a économisé

La branche $y \geq 2$ avait une borne de 18, inférieure à la meilleure solution entière trouvée : **on ne l'a pas explorée plus avant.**

Sur un problème à cent variables binaires, l'énumération complète exigerait 2^{100} essais. L'élagage ramène cela à quelques milliers.

Les variables binaires

Ce qu'elles permettent de modéliser

Trois usages

Le choix – $x = 1$ si l'on ouvre l'usine, 0 sinon.

Le coût fixe – $x \leq M\delta$: produire oblige à payer le coût fixe attaché à δ .

L'exclusion – $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$: au plus un des deux projets.

Le coût fixe, en détail

$$\max 30x - 5\,000\delta \quad \text{sous} \quad x \leq 10\,000\delta, \quad \delta \in \{0, 1\}$$

Si $x > 0$ alors $\delta = 1$, donc le coût fixe est payé. Si $x = 0$, on peut prendre $\delta = 0$.

Le rôle de la grande constante

M doit être **assez grand** pour ne jamais borner x à tort, et **assez petit** pour que la relaxation reste informative.

Un M démesuré donne une borne si lâche que l'élagage ne coupe plus rien : le calcul explose.

Les coupes

Gomory, 1958

Au lieu de séparer, on **ajoute une contrainte** qui élimine la solution fractionnaire courante sans éliminer aucun point entier.

On résout à nouveau, et l'on recommence jusqu'à tomber sur une solution entière.

Ce que font les solveurs actuels

Ils combinent les deux : *branch and cut*. Des coupes resserrent la relaxation à chaque nœud, ce qui améliore les bornes, ce qui élague davantage.

Un problème à dix mille variables binaires se résout aujourd'hui en quelques minutes — c'était impensable il y a trente ans.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Arrondir la solution continue ne donne pas l'optimum entier**, et peut sortir du domaine.
2. La relaxation fournit néanmoins une **borne supérieure** : 21 ici.
3. **Séparer** sur une variable fractionnaire ne perd aucun point entier.
4. **Élaguer** abandonne toute branche dont la borne n'atteint pas la meilleure solution connue.
5. Sur l'exemple : optimum entier $x = 4, y = 0, Z = 20$ – et non $(3, 1)$ à 19.
6. Les **variables binaires** modélisent choix, coûts fixes et exclusions.

La suite

Le chapitre 16 clôt le cours sur deux problèmes où le temps entre en jeu : combien commander à la fois, et combien de guichets ouvrir.