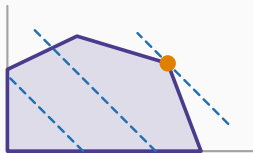


Recherche opérationnelle

Chapitre 11 : Les graphes, vocabulaire et représentation



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le vocabulaire

Le réseau de livraison du cours

Représenter un graphe

Ce qu'il faut retenir

Le vocabulaire

Un graphe

$$G = (X, U)$$

X est l'ensemble des **sommets**, U celui des **arcs** — des couples de sommets.

Orienté ou non

Si les couples sont **ordonnés**, le graphe est **orienté** : on parle d'arcs, et (i, j) diffère de (j, i) .

Sinon il est **non orienté** : on parle d'arêtes.

Le choix n'est pas décoratif

Une route à sens unique, une relation hiérarchique, un ordre de fabrication : **orienté**.

Une ligne de chemin de fer, une frontière commune : **non orienté**.

Cinq mots

Le **degré** d'un sommet est son nombre d'arcs. En orienté, on distingue **demi-degré entrant** et **sortant**.

Un **chemin** est une suite d'arcs consécutifs; un **circuit** est un chemin qui revient à son origine.

Un graphe est **connexe** si tout sommet est joignable depuis tout autre.

Ce que ces mots servent à dire

Un sommet de demi-degré entrant nul est une **source** — une usine, une tâche initiale.

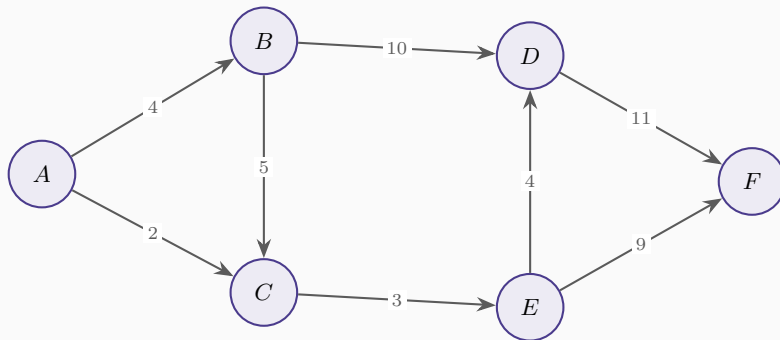
Un sommet de demi-degré sortant nul est un **puits** — un client, la fin du projet.

Le réseau de livraison du cours

L'exemple

Six dépôts, huit liaisons

Un transporteur relie six dépôts A à F . Chaque arc porte une **distance en kilomètres**.



Six dépôts, huit liaisons orientées, valuées en kilomètres.

Les huit arcs

Arc	km	Arc	km
$A \rightarrow B$	4	$C \rightarrow E$	3
$A \rightarrow C$	2	$E \rightarrow D$	4
$B \rightarrow C$	5	$E \rightarrow F$	9
$B \rightarrow D$	10	$D \rightarrow F$	11

La question qui suit

Quel est le trajet le plus court de A à F ?

À l'œil, on voit trois chemins possibles. Sur un réseau de deux mille sommets, l'œil ne voit plus rien : c'est là que l'algorithme devient nécessaire.

Représenter un graphe

La matrice d'adjacence

La définition

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un arc de } i \text{ vers } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un graphe non orienté, la matrice est **symétrique**.

Sur notre réseau

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	0	1	1	0	0	0
<i>B</i>	0	0	1	1	0	0
<i>C</i>	0	0	0	0	1	0
<i>D</i>	0	0	0	0	0	1
<i>E</i>	0	0	0	1	0	1
<i>F</i>	0	0	0	0	0	0

Ce que ses puissances révèlent

Le résultat

Le terme (i, j) de $\mathbf{A}^k$ donne le nombre de chemins de longueur exactement k allant de i à j .

Pourquoi

$$(\mathbf{A}^2)_{ij} = \sum_h a_{ih} a_{hj}$$

Chaque terme vaut 1 si et seulement s'il existe un arc de i vers h et un arc de h vers j . La somme compte les intermédiaires possibles.

Une conséquence utile

Si $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{n-1}$ n'a aucun zéro hors diagonale, le graphe est fortement connexe.

Tout se ramène ainsi à un produit de matrices — donc à quelque chose qu'un ordinateur fait très vite.

Quand les arcs sont pondérés

On remplace le 1 par la valeur de l'arc — distance, coût, durée, capacité —, et l'absence d'arc par $+\infty$.

L'infini plutôt que zéro

Mettre 0 ferait croire qu'aller de A à D est gratuit et instantané.

$+\infty$ dit la vérité : ce trajet n'existe pas, et tout algorithme de minimisation l'écartera automatiquement.

L'autre représentation

Pour chaque sommet, la liste de ses successeurs :

$$A : (B, 4), (C, 2) \quad B : (C, 5), (D, 10) \quad C : (E, 3) \quad \dots$$

Laquelle choisir

La matrice occupe n^2 cases, quel que soit le nombre d'arcs. Sur 10 000 sommets, c'est cent millions de cases, presque toutes nulles.

La liste n'occupe que la place des arcs existants : c'est elle qu'utilisent tous les logiciels sur les grands réseaux.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Un graphe est un couple (X, U) : sommets et arcs, **orienté** ou non.
2. Source et puits se lisent sur les **demi-degrés**.
3. La **matrice d'adjacence** code le graphe; elle est symétrique si le graphe ne l'est pas orienté.
4. $(\mathbf{A}^k)_{ij}$ compte les **chemins de longueur k** de i à j .
5. Pour un graphe pondéré, l'absence d'arc se note $+\infty$, jamais 0.
6. La **liste d'adjacence** est préférable dès que le graphe est grand et peu dense.

La suite

Le chapitre 12 répond à la question laissée en suspens : trouver le plus court chemin de A à F , et le prouver, sans énumérer tous les trajets.