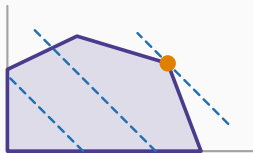


Recherche opérationnelle

Chapitre 13 : Le flot maximal



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le problème

Ford et Fulkerson

Le théorème du flot maximal

Les variantes

Ce qu'il faut retenir

Le problème

Un réseau de transport

Un graphe orienté, une **source** s , un **puits** t , et sur chaque arc une **capacité** $c(i, j) \geq 0$.

Un flot

Une fonction $f(i, j)$ vérifiant deux conditions :

Capacité : $0 \leq f(i, j) \leq c(i, j)$ sur chaque arc.

Conservation : en tout sommet autre que s et t , ce qui entre est égal à ce qui sort.

La valeur du flot

C'est ce qui sort de s — ou, ce qui revient au même, ce qui entre en t .

Le problème : la rendre maximale.

Le même réseau, valué en capacités

Arc	capacité	Arc	capacité
$A \rightarrow B$	10	$C \rightarrow E$	10
$A \rightarrow C$	8	$E \rightarrow D$	6
$B \rightarrow C$	2	$E \rightarrow F$	4
$B \rightarrow D$	5	$D \rightarrow F$	7

Ford et Fulkerson

Les chaînes améliorantes

Tant qu'il existe un chemin de s à t dont tous les arcs ont de la capacité résiduelle, y pousser le maximum possible.

Le maximum est le **minimum des capacités résiduelles** le long du chemin.

Le graphe résiduel

Pousser φ unités sur l'arc (i, j) crée un arc **retour** (j, i) de capacité φ .

Cet arc retour permet d'annuler plus tard une décision qui s'avérerait mauvaise.

Pourquoi l'arc retour est indispensable

Sans lui, l'algorithme dépendrait de l'ordre dans lequel on choisit les chemins, et pourrait s'arrêter avant l'optimum.

L'arc retour rend l'algorithme correct quel que soit l'ordre.

Trois chaînes

Chaîne	Goulot	Flot poussé
$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$	$B \rightarrow D$	5
$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F$	$E \rightarrow F$	4
$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F$	$D \rightarrow F$	2
		11

Pourquoi on s'arrête là

Le puits F n'est atteignable que par $D \rightarrow F$ et $E \rightarrow F$.

$D \rightarrow F$ transporte $5 + 2 = 7$, sa capacité entière. $E \rightarrow F$ transporte 4, sa capacité entière. **Plus rien ne peut entrer en F .**

Le théorème du flot maximal

Une coupe

Une partition des sommets en deux ensembles $S \ni s$ et $T \ni t$. Sa **capacité** est la somme des capacités des arcs allant de S vers T .

Ford-Fulkerson, 1956

$$\max_{\text{flots}} |f| = \min_{\text{coupes}} c(S, T)$$

La valeur du flot maximal est égale à la capacité de la coupe minimale.

Vérification

Prenons $S = \{A, B, C, D, E\}$ et $T = \{F\}$. Les arcs qui traversent sont $D \rightarrow F$ et $E \rightarrow F$:

$$c(S, T) = 7 + 4 = 11 = |f|$$

Un certificat d'optimalité

Exhiber une coupe de capacité **11** **prouve** qu'aucun flot ne peut dépasser **11** — sans avoir à examiner les autres flots.

C'est la dualité du chapitre 7 sous une autre forme : le flot est le primal, la coupe est le dual, et leurs valeurs coïncident.

La lecture de gestion

La coupe minimale désigne les goulots d'étranglement. Ici, les deux liaisons qui aboutissent à F .

Investir ailleurs ne servirait à rien. **Élargir un arc qui n'est pas dans la coupe minimale n'augmente pas d'une unité la capacité du réseau.**

Deux investissements comparés

Élargir $A \rightarrow B$ de 10 à 20 : le flot reste 11. **Zéro gain.**

Élargir $D \rightarrow F$ de 7 à 9 : la coupe passe à 13, mais d'autres arcs deviennent limitants – $B \rightarrow D$ à 5 et $E \rightarrow D$ à 6 bornent l'entrée de D .

La leçon

Lever un goulot en révèle un autre. **La capacité d'un réseau ne s'améliore que par une suite d'investissements ciblés**, chacun recalculé après le précédent.

Les variantes

Trois extensions

Plusieurs sources ou puits : on ajoute une super-source reliée à toutes les sources par des arcs de capacité infinie.

Capacité sur un sommet : on le dédouble en deux sommets reliés par un arc de cette capacité.

Flot minimal imposé : borne inférieure sur un arc, traitée par un problème auxiliaire.

Trois domaines d'application

Réseaux électriques et hydrauliques, trafic routier, capacité d'un système d'information.

Et, plus inattendu : le **couplage maximal** dans un graphe biparti — donc le problème d'affectation du chapitre 10, qui se résout aussi comme un flot.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Un **flot** respecte les capacités et conserve la matière en chaque sommet interne.
2. **Ford-Fulkerson** pousse des unités le long de chaînes améliorantes.
3. Les **arcs retour** rendent l'algorithme correct quel que soit l'ordre des chemins.
4. Sur l'exemple : trois chaînes, flot maximal de **11**.
5. **Flot maximal = coupe minimale** : la coupe est un certificat d'optimalité.
6. La coupe minimale désigne les **goulots** : investir ailleurs ne rapporte rien.

La suite

Le chapitre 14 applique le plus long chemin à un graphe de tâches, et en tire l'outil de gestion de projet le plus répandu au monde.