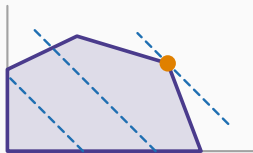


Recherche opérationnelle

Chapitre 7 : La dualité



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Deux questions, un seul nombre

Le dual de l'atelier

Les théorèmes de la dualité

Le prix dual

Ce qu'il faut retenir

Deux questions, un seul nombre

Le problème primal

Combien produire? Maximiser la marge sous contrainte de ressources.

Le problème dual

Combien valent les ressources? Un investisseur veut racheter l'atelier heure par heure.

Quel prix minimal doit-il proposer pour que l'atelier accepte de tout lui céder plutôt que de produire?

La règle de transposition

Primal

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

m contraintes

n variables

Dual

$$\min \mathbf{b}'\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{u} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

m variables

n contraintes

Ce que la transposition signifie

Une contrainte du primal devient une **variable** du dual, et réciproquement.

A se lit en lignes dans un cas, en colonnes dans l'autre : c'est la **même matrice**, lue dans l'autre sens.

Le dual de l'atelier

Les deux problèmes côte à côte

$$\underbrace{\max 30x + 25y}_{\text{primal}}$$

$$\underbrace{\min 100u + 80v}_{\text{dual}}$$

$$\begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + y \leq 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u + v \geq 30 \\ u + v \geq 25 \end{cases}$$

Lire la première contrainte du dual

u est le prix d'une heure de découpe, v celui d'une heure de couture.

$2u + v \geq 30$: ce que rapporte un sac A vendu en pièces détachées d'heures doit valoir au moins la marge qu'il rapporterait produit. Sinon l'atelier refuse de céder.

Résolution

Les deux contraintes sont saturées à l'optimum :

$$\begin{cases} 2u + v = 30 \\ u + v = 25 \end{cases} \implies u = 5, \quad v = 20$$

$$W = 100(5) + 80(20) = 500 + 1\,600 = 2\,100$$

Le même nombre que le primal

$$Z^* = W^* = 2\,100 \text{ DH}$$

Produire pour 2 100 ou vendre les heures pour 2 100 : l'atelier est exactement indifférent.

Les théorèmes de la dualité

L'énoncé

Pour toute solution réalisable $\mathbf{x}$ du primal et toute solution réalisable $\mathbf{u}$ du dual :

$$\mathbf{c}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\mathbf{u}$$

Ce qu'elle offre gratuitement

Toute solution du dual est une **borne supérieure** sur ce que le primal peut atteindre.

Sans résoudre le primal, on sait déjà qu'on ne dépassera pas. C'est ce qui rendra le *branch and bound* possible au chapitre 15.

L'énoncé

Si l'un des deux problèmes a un optimum fini, l'autre aussi, et **les deux valeurs sont égales**.

Une conséquence pratique

Résoudre le dual peut être bien plus rapide : m contraintes deviennent m variables.

Un problème à 500 contraintes et 3 variables se résout en trois itérations par son dual, contre plusieurs centaines par le primal.

Le troisième théorème

À l'optimum, pour chaque paire :

$$u_i \times (\text{ecart de la contrainte } i) = 0 \quad \text{et} \quad x_j \times (\text{ecart de la contrainte duale } j) = 0$$

Ce que cela veut dire en français

Une ressource non saturée a un prix nul. S'il reste des heures inutilisées, une heure de plus ne vaut rien.

Une ressource saturée a un prix positif. C'est elle qui bloque, donc elle qui vaut.

Le prix dual

Prix fictif, prix marginal, shadow price

u_i est l'accroissement de Z si la ressource i augmente d'une unité, toutes choses égales par ailleurs.

Vérification sur l'atelier

Avec 101 heures de découpe : $2x + y = 101$, $x + y = 80$ donnent $x = 21$, $y = 59$.

$$Z = 30(21) + 25(59) = 630 + 1\,475 = 2\,105 = 2\,100 + 5$$

La décision qui en découle

Une heure supplémentaire de découpe rapporte 5 DH, une heure de couture 20 DH.

Si l'heure supplémentaire coûte 12 DH, on embauche en couture et pas en découpe. C'est la question que le gestionnaire pose vraiment.

La dernière ligne du tableau du chapitre 5

$$c_j - z_j \text{ pour } e_1 = -5, \quad c_j - z_j \text{ pour } e_2 = -20$$

Les prix duaux sont, au signe près, les coûts réduits des variables d'écart.

Résoudre le primal résout donc le dual du même coup : un seul calcul, deux réponses.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Le dual demande **combien valent les ressources**, quand le primal demande combien produire.
2. Contraintes et variables **s'échangent** : **A** se lit transposée.
3. **Dualité faible** : toute solution duale majore toute solution primale.
4. **Dualité forte** : $Z^* = W^* = 2\,100$ DH.
5. **Écarts complémentaires** : ressource non saturée $\Rightarrow$ prix nul.
6. Les prix duaux 5 et 20 étaient déjà dans la **dernière ligne du tableau du simplexe**.

La suite

Le chapitre 8 pousse la question plus loin : jusqu'où ces prix restent-ils valables, et de combien les données peuvent-elles changer sans que la solution change ?