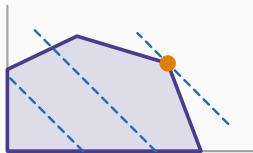


Recherche opérationnelle

Chapitre 8 : L'analyse de sensibilité



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Pourquoi la solution ne suffit pas

Faire varier un second membre

Faire varier un coefficient de l'objectif

Ajouter une variable ou une contrainte

Ce qu'il faut retenir

Pourquoi la solution ne suffit pas

Ce qu'on a supposé

Le modèle traite 30, 25, 100 et 80 comme des nombres **exacts**.

Ils sont estimés : la marge dépend du prix du cuir, les heures dépendent de l'absentéisme.

La bonne question

Non pas « quelle est la solution ? » mais « **de combien les données peuvent-elles changer avant que la solution ne change ?** »

Un optimum valable sur un large intervalle est utilisable; un optimum valable à 1 % près ne l'est pas.

Faire varier un second membre

Ce qui doit rester vrai

Quand b_i change, la **base** reste optimale tant que toutes les variables de base restent **positives**.

Au-delà, un sommet différent devient optimal, et le prix dual change.

Les heures de découpe

Si la découpe passe de 100 à $100 + \Delta$, le tableau final donne

$$x = 20 + \Delta, \quad y = 60 - \Delta$$

Positivité : $\Delta \geq -20$ et $\Delta \leq 60$, soit $b_1 \in [80; 160]$.

Aux deux extrémités

b_1	x	y	Z
80	0	80	2 000
100	20	60	2 100
160	80	0	2 400

$2\,400 - 2\,100 = 300 = 5 \times 60$: le prix dual de 5 DH tient sur tout l'intervalle.

La décision qui en découle

On peut acheter jusqu'à **soixante heures** de découpe supplémentaires à moins de 5 DH l'heure, et y gagner.

La soixante et unième ne rapporte plus rien : au-delà de 160 heures, c'est la couture qui bloque seule.

Le même calcul

Si la couture passe à $80 + \Delta$: $x = 20 - \Delta$ et $y = 60 + 2\Delta$.

Positivité : $\Delta \leq 20$ et $\Delta \geq -30$, soit $b_2 \in [50 ; 100]$.

La comparaison des deux ressources

La couture vaut 20 DH l'heure, mais seulement jusqu'à 100 heures — **vingt heures de marge**.

La découpe ne vaut que 5 DH, mais sur **soixante heures**. Le gain total possible est de 400 DH d'un côté, 300 de l'autre.

Faire varier un coefficient de
l'objectif

Ce qui doit rester vrai

Quand c_j change, la **solution** reste optimale tant que tous les coûts réduits restent **négatifs ou nuls**.

Géométriquement : tant que la pente de l'objectif reste entre celles des deux contraintes actives.

La marge du sac A

Elle vaut 30. En la faisant varier de δ , les coûts réduits deviennent

$$-5 - \delta \leq 0 \quad \text{et} \quad -20 + \delta \leq 0 \quad \implies \quad -5 \leq \delta \leq 20$$

Soit $c_1 \in [25; 50]$.

Les deux bornes, sur le dessin

À $c_1 = 50$, la pente de l'objectif vaut $-50/25 = -2$: celle de la **découpe**. Le segment $(20, 60)-(50, 0)$ devient tout entier optimal.

À $c_1 = 25$, la pente vaut -1 : celle de la **couture**. C'est le segment $(20, 60)-(0, 80)$.

Le lien avec le chapitre 6

Les bornes de l'intervalle de sensibilité sont exactement les valeurs qui produisent un optimum multiple.

Ce n'est pas une coïncidence : c'est le moment où un sommet voisin rattrape le sommet courant.

Le même calcul

$$-5 + \delta \leq 0 \quad \text{et} \quad -20 - 2\delta \leq 0 \quad \implies \quad -10 \leq \delta \leq 5$$

Soit $c_2 \in [15; 30]$.

La lecture de gestion

La marge du sac A peut chuter de 30 à 25 DH — une baisse de 17 % — sans qu'il faille changer le plan de production.

Le plan est robuste. C'est cette phrase, et non le nombre 2 100, que le directeur attend.

Ajouter une variable ou une
contrainte

Faut-il le lancer ?

Un sac C demanderait 3 h de découpe, 2 h de couture, pour une marge de 40 DH.

Son **coût d'opportunité** aux prix duaux vaut

$$3(5) + 2(20) = 55 > 40$$

La réponse, sans recalculer

Le sac C consomme pour 55 DH de ressources et n'en rapporte que 40 : **il n'est pas rentable.**

Les prix duaux permettent de trancher sur un produit nouveau **sans relancer le simplexe**. C'est leur usage le plus courant en entreprise.

La règle

Si la solution actuelle la **vérifie**, elle reste optimale : rien à faire.

Sinon, elle coupe le domaine et il faut reprendre le calcul.

Deux cas

« Au plus 70 sacs B » : on en produit 60, la contrainte est vérifiée. **La solution ne bouge pas.**

« Au plus 40 sacs B » : elle est violée. Il faut résoudre à nouveau — le nouvel optimum sera moins bon.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. La vraie question est la **robustesse**, pas la solution.
2. Un prix dual n'est valable que sur un **intervalle** de second membre.
3. Découpe : $b_1 \in [80 ; 160]$ au prix de 5 DH. Couture : $b_2 \in [50 ; 100]$ à 20 DH.
4. Un coefficient d'objectif a lui aussi son intervalle : $c_1 \in [25 ; 50]$, $c_2 \in [15 ; 30]$.
5. Les **bornes de ces intervalles** sont les valeurs qui produisent un optimum multiple.
6. Les prix duaux évaluent un **produit nouveau** sans relancer le calcul.

La suite

Le chapitre 9 aborde une famille de programmes linéaires si particulière qu'elle a sa propre méthode : les problèmes de transport, dont la solution est toujours entière.