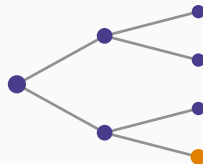


Probabilités

Chapitre 2 : Le vocabulaire du hasard



Décrire une expérience

Les événements

Les opérations

Ce qu'il faut retenir

Décrire une expérience

Un chapitre court, mais qui décide de tout

Les erreurs de probabilité sont rarement des erreurs de calcul. Ce sont presque toujours des erreurs de **description** : on a mal listé ce qui pouvait arriver.

Trois mots suffisent à éviter la plupart d'entre elles : *expérience*, *univers*, *événement*. Ce chapitre les pose, et rien de plus.

Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une opération dont on connaît à l'avance tous les résultats possibles, mais pas celui qui se produira.

Deux conditions donc : la liste est connue, le tirage ne l'est pas.

Univers

L'**univers**, noté Ω , est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. Chacun de ses éléments est une **éventualité**.

Quatre univers

Expérience	Univers Ω	Taille
Lancer un dé	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	6
Lancer deux dés	$\{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$	36
Un crédit	$\{\text{sain}, \text{défaut}\}$	2
Durée de vie d'une machine	$[0; +\infty[$	infini

Le choix de l'univers n'est pas neutre

Pour deux dés, on peut décrire le résultat par le **couple** $(3, 5)$ ou par la **somme** 8. Les deux descriptions sont légitimes, mais elles ne donnent pas les mêmes probabilités.

Avec les couples, les **36** issues sont équiprobables. Avec les sommes, elles ne le sont pas : **7** s'obtient de six façons, **12** d'une seule.

La règle de méthode à retenir

Choisissez toujours l'univers dans lequel les issues sont équiprobables, quitte à ce qu'il soit plus grand. C'est le seul où la règle de Laplace s'applique.

Le célèbre problème de d'Alembert — qui croyait $P(\text{au moins un pile en deux lancers}) = 2/3$ — vient exclusivement de cette erreur.

Les événements

Événement

Un **événement** est une **partie** de l'univers : un sous-ensemble d'éventualités.

On dit qu'un événement est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience lui appartient.

Sur le dé

Énoncé	Événement	Cardinal
« obtenir un 6 »	$\{6\}$	1
« obtenir un nombre pair »	$\{2, 4, 6\}$	3
« obtenir au moins 5 »	$\{5, 6\}$	2
« obtenir un nombre ≤ 6 »	Ω	6
« obtenir un 7 »	$\emptyset$	0

Les bornes

L'univers Ω est l'**événement certain** : il est toujours réalisé.

L'ensemble vide $\emptyset$ est l'**événement impossible** : il ne l'est jamais.

Un événement réduit à une seule éventualité est dit **élémentaire**.

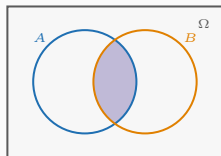
Traduire avant de calculer

La difficulté d'un exercice de probabilité est presque toujours dans la **traduction** de l'énoncé en ensemble.

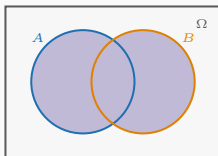
« Au moins un », « au plus deux », « aucun », « exactement trois » : chacune de ces formules désigne une partie précise de Ω . Écrivez-la avant de chercher une formule.

Les opérations

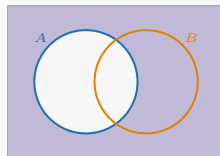
Les trois opérations, et rien d'autre



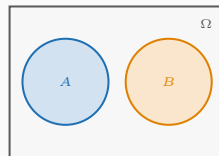
$A \cap B$
« A et B »



$A \cup B$
« A ou B »



$\overline{A}$
« non A »



$A \cap B = \emptyset$
incompatibles

Un événement est une **partie** de l'univers. Les opérations sur les événements sont celles des ensembles :
« et » est l'intersection, « ou » est la réunion, « non » est le complémentaire.

Du français aux ensembles

Français	Ensemble	Se lit
A et B	$A \cap B$	les deux sont réalisés
A ou B	$A \cup B$	l'un au moins l'est
non A	$\overline{A}$	A n'est pas réalisé
A implique B	$A \subset B$	si A l'est, B l'est aussi

Le « ou » des mathématiques est inclusif

« A ou B » est réalisé lorsque A seul l'est, lorsque B seul l'est, **et lorsque les deux le sont**.

Le langage courant emploie souvent un « ou » exclusif — « fromage ou dessert » — qui exclut le cas double. Ce n'est pas celui de $A \cup B$.

Vérification sur le dé

$A = \{2, 4, 6\}$ (pair), $B = \{5, 6\}$ (au moins 5).

$A \cap B = \{6\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Événements incompatibles

Deux événements sont **incompatibles** — ou disjoints — lorsqu'ils ne peuvent pas se produire ensemble :

$$A \cap B = \emptyset$$

Le piège le plus fréquent du cours

Incompatible n'est pas indépendant. Ce sont deux notions opposées, et les confondre coûte cher.

Deux événements incompatibles sont au contraire fortement liés : si l'un se produit, l'autre est *certainement* exclu. L'indépendance, définie au chapitre 7, dit exactement le contraire — l'un n'apprend rien sur l'autre.

Partition de l'univers

Des événements $B_1, B_2, \dots, B_k$ forment un **système complet** — ou une **partition** — lorsque :

1. ils sont deux à deux incompatibles;
2. leur réunion est l'univers entier.

Trois exemples

Sur le dé : $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$.

Le couple le plus utile de tous : A et $\overline{A}$ — deux événements forment toujours une partition.

En gestion : la segmentation d'une clientèle en catégories de risque *faible, moyen, élevé*.

À quoi cela sert

Une partition **découpe** un problème en cas exhaustifs et sans recouvrement. C'est la structure de raisonnement la plus rentable du cours : au chapitre 7, elle donnera la formule des probabilités totales ; au chapitre 8, celle de Bayes.

« Traiter cas par cas, puis rassembler » n'est pas une astuce d'exercice : c'est un théorème.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Une **expérience aléatoire** a des résultats connus à l'avance, mais imprévisibles individuellement.
2. L'**univers** Ω est la liste de ces résultats; le choisir *équiprobable* est la première décision de tout exercice.
3. Un **événement** est une partie de Ω ; traduire l'énoncé en ensemble précède tout calcul.
4. « Et », « ou », « non » sont l'intersection, la réunion, le complémentaire — le « ou » étant **inclusif**.
5. Incompatible ($A \cap B = \emptyset$) **n'est pas** indépendant : c'est même le contraire.

La suite

Le vocabulaire est en place, et la règle de Laplace attend son dû : *cas favorables sur cas possibles*.

Reste à savoir **compter** ces cas quand ils se chiffrent en milliers. C'est le dénombrement, et c'est l'objet des trois chapitres suivants.