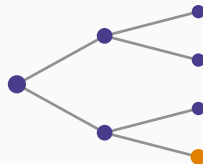


Probabilités

Chapitre 12 : Variance, covariance et couples



Mesurer le risque

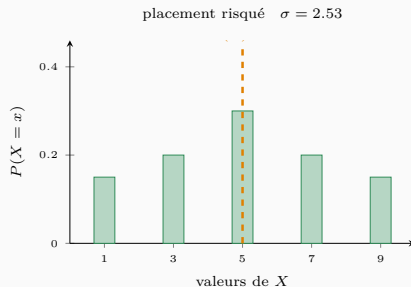
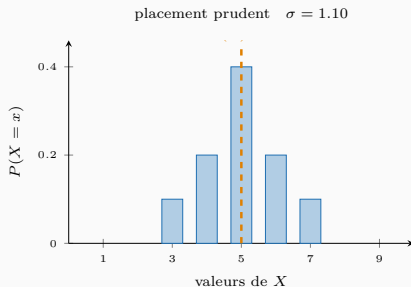
Les couples de variables

L'écart-type du portefeuille

Ce qu'il faut retenir

Mesurer le risque

La même espérance, deux risques



La même espérance ne dit pas la même chose. L'espérance situe le centre, elle ne dit rien de l'étalement.

$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$ — exactement la formule de König-Huygens, avec P à la place de f .

Variance et écart-type

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Formule de König-Huygens, transposée

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

C'est mot pour mot $V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$. **Moyenne des carrés moins carré de la moyenne** — et c'est toujours cette forme qu'on utilise pour calculer.

Les deux voies donnent le même nombre

$$E(X) = 3,5 \quad E(X^2) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6} \approx 15,167$$

$$V(X) = 15,167 - 12,25 = 2,917 \quad \sigma(X) = 1,708$$

Ce que l'écart-type apporte de plus

$V(X)$ s'exprime en *points carrés* : un nombre qu'on ne peut pas interpréter.

$\sigma(X) = 1,708$ s'exprime en points de dé. **Un lancer s'écarte en moyenne de 1,7 point de la valeur 3,5** : cette phrase a un sens, celle sur la variance n'en a pas.

Trois règles

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \qquad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

Deux lectures immédiates

La constante **b disparaît** : translater une distribution ne change pas sa dispersion.

Le coefficient **a apparaît au carré**, parce que la variance est une moyenne de carrés. Doubler les enjeux d'un pari quadruple sa variance, mais ne fait que doubler son écart-type.

Les couples de variables

$P(X = x, Y = y)$	$y = \text{faible}$	$y = \text{moyen}$	$y = \text{élevé}$	marge de X
$x = 0$	0,40	0,15	0,05	0,60
$x = 1$	0,08	0,14	0,08	0,30
$x = 2$	0,02	0,03	0,05	0,10
marge de Y	0,50	0,32	0,18	1,00

Les marges s'obtiennent en sommant une ligne ou une colonne.

C'est l'exacte transposition des *distributions marginales* du tableau de contingence.

La ligne surlignée devient une loi à elle seule si on la divise par sa marge :

$$P(Y = \text{élevé} \mid X = 2) = \frac{0,05}{0,10} = 0,50$$

C'est la *distribution conditionnelle*.

Le tableau de contingence et la loi jointe sont le même objet. On a seulement remplacé les fréquences f_{ij} par les probabilités p_{ij} : marges, conditionnelles, moyennes et covariance se calculent mot pour mot de la même façon.

Les trois lois d'un couple

Nom	Définition	Équivalent descriptif
Jointe	$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$	tableau de contingence
Marginales	$p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$	distributions marginales
Conditionnelles	$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$	profils-lignes

Indépendance de deux variables

X et Y sont indépendantes si, pour tout couple de valeurs,

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$$

soit : chaque case est le produit de ses deux marges.

Elle vient de la variance

$$V(X) = E[(X - E(X))(X - E(X))]$$

Le second facteur devient l'écart de **l'autre** variable :

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

La conséquence immédiate

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

La variance est la covariance d'une variable avec elle-même. Une seule formule pour les deux notions, exactement comme dans le cours de statistique descriptive.

Une implication à sens unique

$$X, Y \text{ indépendantes} \implies \text{cov}(X, Y) = 0$$

La réciproque est fausse. Une covariance nulle n'exclut qu'une liaison *linéaire*.

La conséquence sur la variance d'une somme

Si X et Y sont indépendantes :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

C'est **la seule** situation où les variances s'additionnent — et c'est pourquoi l'hypothèse d'indépendance revient si souvent.

Normaliser la covariance

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)} \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

La diversification, écrite en une ligne

Deux actifs de rentabilités X et Y :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\rho \sigma(X)\sigma(Y)$$

- $\rho > 0$: les actifs montent et descendent ensemble, le risque **dépasse** la somme des risques ;
- $\rho = 0$: les risques s'additionnent ;
- $\rho < 0$: les pertes de l'un compensent les gains de l'autre, le risque **diminue**.

Diversifier, c'est chercher des corrélations basses. Markowitz n'a rien écrit d'autre.

L'écart-type du portefeuille

Les 200 crédits, sous l'hypothèse d'indépendance

Chaque X_i est une indicatrice de paramètre $p = 0,04$:

$$V(X_i) = p(1 - p) = 0,04 \times 0,96 = 0,0384$$

Les crédits étant supposés indépendants, les variances s'additionnent :

$$V(X) = 200 \times 0,0384 = 7,68 \quad \sigma(X) = 2,771$$

La lecture prudentielle

$E(X) = 8$ défauts, $\sigma(X) = 2,77$. La banque doit donc provisionner non pas 8 défauts, mais 8 plus quelques écarts-types.

L'espérance donne la provision; l'écart-type donne le capital. Toute la réglementation bancaire tient dans cette distinction.

Ce que l'indépendance a permis — et ce qu'elle cache

Le chiffre 2,77 dépend entièrement d'une hypothèse

Si les défauts étaient corrélés à $\rho = 0,2$, la variance gagnerait les 200×199 termes de covariance : σ passerait de 2,8 à plus de 12.

Le nombre moyen de défauts, lui, n'aurait **pas bougé** — l'espérance est insensible à la corrélation.

La leçon de 2008, en une phrase

Les modèles ne se sont pas trompés sur les pertes moyennes. Ils se sont trompés sur leur dispersion, parce qu'ils avaient supposé nulle une corrélation qui ne l'était pas.

Le risque n'est pas dans l'espérance : il est dans les covariances.

Ce qu'il faut retenir

Sept points

1. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$: König-Huygens, transposé mot pour mot.
2. $\sigma(X)$ s'interprète, $V(X)$ non : elle est dans le carré de l'unité.
3. $V(aX + b) = a^2V(X)$: la constante disparaît, le coefficient est au carré.
4. Loi **jointe, marges, conditionnelles** : le tableau de contingence, avec des probabilités.
5. $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, et $\text{cov}(X, X) = V(X)$.
6. Indépendance entraîne covariance nulle ; **la réciproque est fausse**.
7. Les variances ne s'additionnent que sous **indépendance** — l'espérance, elle, s'additionne toujours.

La suite

Toute la machinerie est en place : loi, répartition, espérance, variance, covariance.

Reste à l'appliquer aux quelques lois qui décrivent la plupart des situations réelles. La cinquième partie s'ouvre sur celle qui les commande toutes : **Bernoulli et la binomiale**.