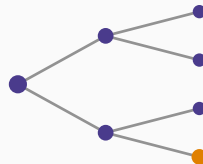


Probabilités

Chapitre 9 : La variable aléatoire



Attacher un nombre au hasard

Les variables du cours

Ce qu'il faut retenir

Attacher un nombre au hasard

Les événements ne se calculent pas

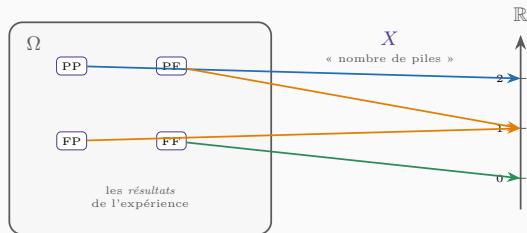
Jusqu'ici, les issues étaient des mots : « pile », « défaut », « sain ». On peut leur attribuer une probabilité, mais on ne peut ni les additionner, ni en prendre la moyenne.

Or un gestionnaire veut un **coût moyen**, une **perte totale**, un **écart-type**. Il lui faut des nombres.

La solution

On associe à chaque résultat de l'expérience un **nombre réel**. Cette association s'appelle une variable aléatoire.

Toute l'arithmétique de la statistique descriptive redevient alors disponible.



Une variable aléatoire est une fonction, pas un nombre : elle attribue une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience.

Deux résultats différents peuvent recevoir la même valeur — ici PF et FP. C'est ce qui fait que la probabilité de $X = 1$ vaut $2/4$.

$P(X = k)$ est la probabilité de *l'ensemble* des résultats auxquels X attribue la valeur k .

deux lancers d'une pièce : Ω a quatre éléments, X n'en prend que trois valeurs

Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** X est une fonction qui associe à chaque élément de l'univers Ω un nombre réel. Elle est **discrète** si l'ensemble de ses valeurs est fini ou dénombrable; **continue** si elle prend toutes les valeurs d'un intervalle.

Le nom est trompeur, et il faut le dire

Une variable aléatoire n'est ni une variable, ni aléatoire : c'est une **fonction**, et une fonction parfaitement déterminée.

Ce qui est aléatoire, c'est son **argument** — le résultat de l'expérience. Une fois ce résultat connu, X vaut ce qu'elle vaut, sans hasard.

Ce que signifie l'écriture entre accolades

$\{X = k\}$ n'est pas une équation : c'est l'**ensemble des résultats** auxquels X attribue la valeur k .

$$P(X = k) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

Sur deux lancers d'une pièce

$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ et X compte les piles.

$\{X = 0\} = \{FF\}$, donc $P(X = 0) = 1/4$. $\{X = 1\} = \{PF, FP\}$, donc $P(X = 1) = 2/4$.

$\{X = 2\} = \{PP\}$, donc $P(X = 2) = 1/4$.

Ce que le passage à X fait perdre — et gagner

On perd du détail, on gagne du calcul

Ω comptait quatre éléments; X n'en prend que trois valeurs. L'information « quel lancer a donné pile » a disparu.

C'est une perte volontaire : elle est le prix du résumé. Exactement comme, en statistique descriptive, passer des données brutes au tableau statistique perdait l'identité des individus.

Le choix de X est une décision de gestion

Sur un portefeuille de crédits, on peut définir :

- X = le **nombre** de défauts;
- Y = le **montant** total perdu;
- $Z = 1$ si la perte dépasse un seuil, 0 sinon.

Trois variables sur la même expérience, trois questions différentes. **Définir X , c'est décider ce que l'on veut mesurer.**

Les variables du cours

Trois définitions à retenir

Variable	Définition	Valeurs
Indicatrice	1 si l'événement a lieu, 0 sinon	$\{0, 1\}$
Comptage	nombre de succès sur n épreuves	$\{0, \dots, n\}$
Somme	$X = X_1 + \dots + X_n$	selon les X_i

Les trois n'en font qu'une

Une variable de comptage est la **somme d'indicatrices** :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

où X_i vaut 1 si la i -ième épreuve réussit. Cette décomposition, très simple, sera la clé de tous les calculs d'espérance du chapitre 11.

Un crédit isolé

$X = 1$ en cas de défaut, $X = 0$ sinon, avec $P(X = 1) = p = 0,04$.

$$E(X) = 0 \times 0,96 + 1 \times 0,04 = 0,04 = p$$

Le pont entre fréquence et probabilité, une dernière fois

Pour une indicatrice, **l'espérance est exactement la probabilité**.

C'est ce qui permettra, au chapitre 20, de dire que « la moyenne des observations tend vers l'espérance » et « la fréquence tend vers la probabilité » sont un seul et même théorème.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Une variable aléatoire est une **fonction** qui numérote les résultats de l'expérience.
2. Ce qui est aléatoire est son argument, pas elle.
3. $\{X = k\}$ désigne l'**ensemble** des résultats de valeur k ; $P(X = k)$ en est la probabilité.
4. Elle est **discrète** ou **continue** selon la nature de l'ensemble de ses valeurs.
5. Une variable de comptage est une **somme d'indicatrices** — et l'espérance d'une indicatrice est p .

La suite

Nous savons attacher des nombres au hasard. Il faut maintenant les organiser : quelle valeur avec quelle probabilité ?

C'est la **loi de probabilité**, et c'est le tableau statistique du cours précédent, à l'identique. Chapitre 10.