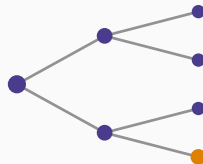


Probabilités

Chapitre 17 : Uniforme et exponentielle



La loi uniforme

La loi exponentielle

Ce qu'il faut retenir

La loi uniforme

Loi uniforme continue

X suit une loi **uniforme** sur $[a ; b]$, notée $\mathcal{U}[a ; b]$, si sa densité est constante sur l'intervalle :

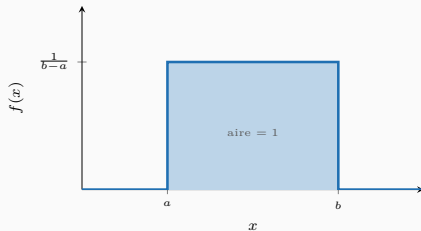
$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ sur } [a ; b], \quad 0 \text{ ailleurs}$$

Ce qu'elle exprime

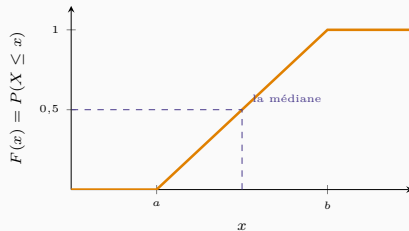
Aucune valeur de l'intervalle n'est privilégiée. C'est la traduction exacte de « je ne sais rien, sinon que la valeur est comprise entre a et b ».

C'est le pendant continu de l'équiprobabilité du dé — et la seule loi qui n'ajoute aucune information à ce que l'énoncé donne.

la densité : un rectangle



la fonction de répartition : une rampe



$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

La loi de l'**ignorance complète** : aucun point de $[a; b]$ n'est privilégié. C'est elle que produit tout générateur de nombres aléatoires, et c'est d'elle que l'on fabrique toutes les autres par simulation.

Les formules

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ sur } [a; b] \quad E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Deux résultats évidents, un moins

L'espérance est le **milieu** : la symétrie l'impose.

Toute probabilité est un **rapport de longueurs** : c'est la règle de Laplace, transposée du comptage à la mesure.

Le **12** de la variance, lui, ne se devine pas — il sort de l'intégration.

Tout générateur aléatoire produit de l'uniforme

Les fonctions `runif` de R et `random()` de Python tirent des nombres uniformes sur $[0; 1]$. Aucune autre loi n'est produite directement.

Toutes les autres s'en déduisent, par une seule opération.

La méthode de la transformée inverse

Si $U \sim \mathcal{U}[0; 1]$, alors $X = F^{-1}(U)$ suit la loi de fonction de répartition F .

On tire au hasard une hauteur entre 0 et 1, on lit l'abscisse correspondante sur la courbe de F . Toute la simulation de Monte-Carlo repose sur cette phrase.

La loi exponentielle

Loi exponentielle

X suit une loi **exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si

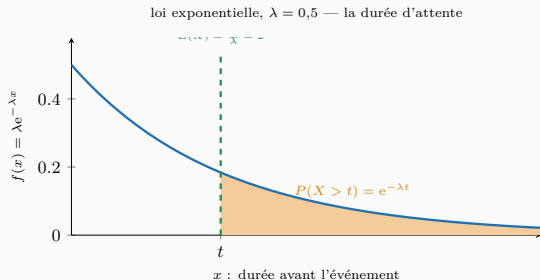
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Espérance égale écart-type

C'est une propriété caractéristique, et elle dit quelque chose : **une durée exponentielle est très dispersée.**

Une durée de vie moyenne de dix ans s'accompagne d'un écart-type de dix ans. Aucune régularité n'est à attendre.



La géométrie, en continu

Là où la géométrie comptait *combien d'essais*, l'exponentielle mesure *combien de temps*.

Absence de mémoire

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

Une ampoule allumée depuis mille heures est aussi neuve qu'au premier jour. C'est une hypothèse forte — et c'est ce qui la disqualifie pour l'usure mécanique.

Le couple à retenir : si les arrivées suivent une loi de Poisson de paramètre λ , les *délais entre deux arrivées* suivent l'exponentielle de paramètre λ .

La survie

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

C'est la fonction de **survie**, et c'est elle qu'on utilise en pratique — presque jamais la densité.

Une machine

Une machine a une durée de vie exponentielle de moyenne 5 ans, donc $\lambda = 0,2$.

$$P(X > 3) = e^{-0,6} = 0,549$$

$$P(X > 10) = e^{-2} = 0,135$$

$$P(3 < X < 10) = 0,549 - 0,135 = 0,414$$

La propriété

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

Une machine en fonctionnement depuis s années a la même loi de durée de vie restante qu'une machine neuve.

C'est la géométrie, en continu

La géométrie comptait *combien d'essais* avant le premier succès; l'exponentielle mesure *combien de temps*.

Les deux ont la même propriété, pour la même raison : à chaque instant, le processus recommence à zéro. Ce sont **les deux seules lois** qui possèdent cette propriété.

Où elle s'applique, et où elle ne s'applique pas

Le bon usage

L'exponentielle convient aux pannes **accidentelles** : composants électroniques, arrivées de clients, intervalles entre sinistres.

Elle est fautive pour l'**usure** : un roulement, un pneu, un moteur vieillissent. Leur taux de panne augmente avec l'âge, ce que l'absence de mémoire interdit.

Le couple Poisson-exponentielle

Si les arrivées suivent une loi de **Poisson** de paramètre λ par unité de temps, alors les **délais entre deux arrivées** suivent une loi exponentielle de paramètre λ .

C'est le même processus, décrit de deux façons : par le **nombre** d'événements, ou par le **temps** qui les sépare.

Le guichet du chapitre 14

$\lambda = 3$ clients par quart d'heure. La probabilité qu'aucun client n'arrive pendant un quart d'heure :

Par Poisson : $P(N = 0) = e^{-3} = 0,0498$. Par l'exponentielle : $P(X > 1) = e^{-3} = 0,0498$.

Deux questions, un seul nombre

« Aucune arrivée en un quart d'heure » et « le délai avant la prochaine arrivée dépasse un quart d'heure » sont **le même événement**, exprimé autrement.

Les deux lois devaient donc donner le même résultat, et elles le donnent.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Uniforme** : densité constante, $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$; toute probabilité est un rapport de longueurs.
2. C'est la loi de l'ignorance — et celle que produit tout générateur aléatoire.
3. **Transformée inverse** : $X = F^{-1}(U)$ fabrique n'importe quelle loi à partir de l'uniforme.
4. **Exponentielle** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $P(X > t) = e^{-\lambda t}$, $E(X) = \sigma(X) = 1/\lambda$.
5. Elle est **sans mémoire** — d'où son inadéquation aux phénomènes d'usure.
6. **Poisson compte, l'exponentielle chronomètre** : c'est un seul processus vu de deux façons.

La suite

Ces deux lois décrivent des situations particulières. La suivante décrit presque tout le reste, et pour une raison démontrable.

Le chapitre 18 est consacré à la loi **normale** — la seule dont il faille savoir lire la table.